

Organizadore(as):

Antonio José da Silva

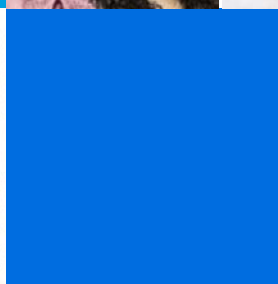
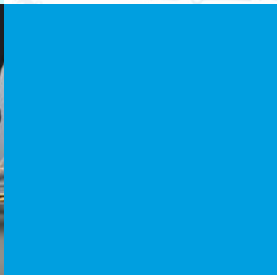
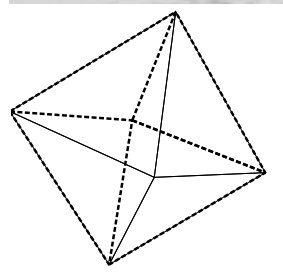
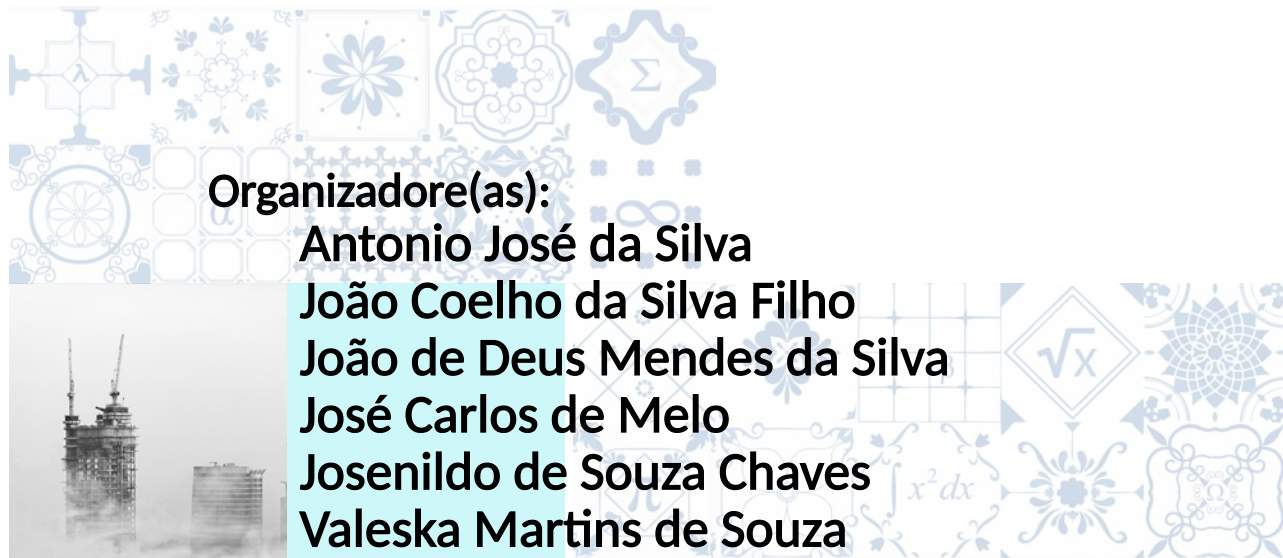
João Coelho da Silva Filho

João de Deus Mendes da Silva

José Carlos de Melo

Josenildo de Souza Chaves

Valeska Martins de Souza



# MATEMÁTICA APLICADA & Ensino



**MATEMÁTICA APLICADA  
& ENSINO**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Reitor Prof. Dr. Fernando Carvalho Silva  
Vice-Reitor Prof. Dr. Leonardo Silva Soares

EDITORA DA UFMA  
Diretor Prof. Dr. Sanatiel de Jesus Pereira

Conselho Editorial Prof. Dr. Antônio Alexandre Isídio Cardoso  
Prof. Dr. Elídio Armando Exposto Guarçoni  
Prof. Dr. André da Silva Freires  
Prof. Dr. Márcio José Celeri  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Diana Rocha da Silva  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Gisélia Brito dos Santos  
Prof. Dr. Edson Ferreira da Costa  
Prof. Dr. Marcos Nicolau Santos da Silva  
Prof. Dr. Carlos Delano Rodrigues  
Prof. Dr. Felipe Barbosa Ribeiro  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Aurea Lira Feitosa  
Prof. Dr. Flávio Luiz de Castro Freitas  
Bibliotecária Dra. Suênia Oliveira Mendes  
Prof. Dr. José Ribamar Ferreira Junior

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

**ANTONIO JOSÉ DA SILVA  
JOÃO COELHO DA SILVA FILHO  
JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA  
JOSÉ CARLOS DE MELO  
JOSENILDO DE SOUZA CHAVES  
VALESKA MARTINS DE SOUZA  
(ORGS)**

**MATEMÁTICA APLICADA  
& ENSINO**

**São Luís**



**EDUFMA**

**2023**



Copyright © 2023 by EDUFMA

Projeto Gráfico, Diagramação e Capa  
Revisão

Antonio José da Silva  
Autores e Autoras

## Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Matemática Aplicada & Ensino/ Antonio José da Silva, João Coelho da Silva  
Filho, João de Deus Mendes da Silva, José Carlos de Melo, Josenildo de Souza  
Chaves, Valeska Martins de Souza..  
. \_\_ São Luís: EDUFMA, 2023.

239 p.: il.  
ISBN : 978-65-5363-336-0

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Matemática Aplicada. 3. Matemática  
Computacional. I. Silva, Antonio José da. II. Título.

CDD 510.7  
CDU 51(07)

---

Ficha elaborada por Maria Teresa Sousa Serpa CRB 13-MA 327/Diretoria Integrada de  
Bibliotecas –DIB/UFMA

PRODUZIDO NO BRASIL [2023]

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser  
reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação ou transmitida  
de qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico,  
fotocópia, microimagem, gravação ou outro, sem permissão do autor.

| EDUFMA | EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
MARANHÃO

Av. dos Portugueses, 1966 | Vila Bacanga

CEP: 65080-805 | São Luís | MA | Brasil

Telefone: (98) 3272-8157

www.edufma.ufma.br | [edufma.sce@ufma.br](mailto:edufma.sce@ufma.br)

## APRESENTAÇÃO

Esta obra constitui uma seleção dos trabalhos apresentados no **IV Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC**, publicação digital de trabalhos relevantes em Matemática Aplicada e Computacional e Ensino de matemática, selecionados pelo Comitê Organizador e Comitê Técnico-Científico. Os trabalhos foram apresentados na Regional que abrange os Estados do Maranhão, Piauí e Ceará, realizados na Universidade Federal do Maranhão (UFMA), em São Luís, no período de 21 a 25 de novembro de 2022. Esta iniciativa é da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), com vistas a fortalecer as áreas de pesquisas em Matemática Aplicada e Computacional e ensino de matemática em todas as regiões do Brasil.

O evento reuniu a comunidade acadêmica ligada a diversas áreas da matemática, o que permitiu selecionar uma diversidade de trabalhos que são produtos de pesquisas em andamento, pesquisas concluídas, experiências profissionais, estudos teóricos e propostas didáticas. Estes se constituem, em grande maioria, fruto das ações de pesquisas ainda em andamento. O evento recebeu 208 inscrições com participantes de 05 estados brasileiros: Ceará, Maranhão, Piauí, Pará e São Paulo, e teve um total de 248 participantes. Sobre as formas de apresentação, obtivemos os formatos de Palestras, Minicursos, Sessões Técnicas de comunicações orais e Sessão de Pôsteres.

Desejamos uma excelente leitura e ressaltamos aos interessados em comunicar-se com os autores dos trabalhos dispostos aqui que os endereços eletrônicos são disponibilizados em cada capítulo, com a finalidade de aproximar leitores dos respectivos autores e fomentar o intercâmbio e a produção de novas pesquisas.

Agradecemos a todos que contribuíram para a realização do evento, especialmente à UFMA, e a todos que estiveram presentes, principalmente àqueles que, através de suas comunicações científicas, deram ótimas contribuições a este evento.

Boa leitura!

Organização IV ERMAC-2022.

# Sumário

	Página
<b>Parte I</b>	<b>8</b>
<b>01 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES</b> (Cleber Araujo Cavalcanti; Wherllem Trajano Reis)	9
<b>02 SÉRIES DE FOURIER E A EQUAÇÃO DE LAPLACE</b> (Gustavo Henrique Colins Marques; Sandra Imaculada Moreira Neto)	17
<b>03 MODELO KOZIOL - GREEN UNIFORME-LOG-LOGÍSTICO EM ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA</b> (Josenildo de Souza Chaves; Lázaro Soares Junior)	27
<b>04 ESTUDO TEÓRICO DO FULORENO C60 INTERAGINDO COM A ADENINA</b> (Andre Felipe Silva Dutra Santos; Silvete Coradi Guerini)	35
<b>05 MODELAGEM MATEMÁTICA DISCRETA DE FENÔMENOS BIOLÓGICOS: caso concentração de droga no organismo</b> (Rian de Carvalho da Costa; Francisco Carpegiani Medeiros Borges)	41
<b>06 MÉTODO DO PONTO FIXO ACELERADO APLICADO AO PROBLEMA DA MOCHILA QUADRÁTICO SEPARÁVEL SUJEITO A RESTRIÇÕES DA CAIXA</b> (Jonatas Oliveira Lima da Silva; Paulo Sérgio Marques dos Santos; Atécio Alves)	46
<b>07 ESTIMATIVAS DE DISTÂNCIAS POR ÂNGULOS DE VISÃO DE ANTENAS DE TELEMETRIAS EM RASTREIOS DE FOGUETES</b> (Jonas de Jesus Barros; Mata de Oliveira Barreiros; Allan Kardec Barros Filho)	55
<b>08 EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA FLUXOS REEB EM <math>S^1 \times S^2</math> TIGHT</b> (Diego Salazar; Luis Andrés Cerón)	64
<b>09 COMBINATÓRIA E CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA PARA FUNÇÕES UNIMODAIS DESCONTÍNUAS</b> (Ermerson Rocha Araujo)	69
<b>10 SOBRE A ISOCRONICIDADE DE UM SISTEMA HAMILTONIANO QUADRÁTICO NO PLANO</b> (Gerard John Alva Morales)	75
<b>11 SISTEMAS HIPERBÓLICOS INVERTÍVEIS E NÃO INVERTÍVEIS</b> (José Santana Campos Costa)	83
<b>12 DESACLOPAMENTO DE SISTEMAS MIMO E CONTROLE LQR COM FORMULAÇÃO LMI</b> (Vilemar Gomes da Silva; João Viana da Fonseca Neto)	91
<b>Parte II</b>	<b>101</b>
<b>01 - ESTRATÉGIAS PARA MOTIVAR MENINAS NAS ÁREAS DE STEM EM TEMPOS DE PANDEMIA DE COVID19</b> (Katia Simone T. da Silva de La Salles; Paulo Rogério de Almeida Ribeiro; Luis Enrique Arroyo Meza; Valeska M de Souza; Wendell F de La Salles; Kayla R. Braga; Cleber Araujo Cavalcanti)	102
<b>02 - DIFICULDADES RELACIONADAS AO APRENDIZADO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL NO ENSINO FUNDAMENTAL</b> (Valdiane Sales Araujo; Raabe Rodrigues Rosa; Pamela Marreiros Araujo Rocha)	115
<b>03 - ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA MODALIDADE REMOTA NO 9º ANO DO FUNDAMENTAL: Possibilidades e adversidades</b> (José Carlos Cecopierre Roldan Junior; Nilvan Ferreira Alves; Cainã da Silva Brito; Jocilandia Nunes da Rocha; Lourimara Farias Barros Alves; Daniela dos Reis Mota)	121

<b>04 EVOLUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: DO TRIÂNGULO RETÂNGULO AO TRIEDRO TRI-RETANGULAR</b> (Marlos Luis Rocha Martins; Ivanildo Silva Abreu; Celina Amélia da Silva)	129
<b>05 METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA</b> (Yasmin Kellen Louzeiro Ferreira; Antonio José da Silva)	137
<b>06 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL</b> (Paulo Batista Franca)	162
<b>07 O CONCEITO DE FUNÇÃO: uma análise de videoaulas do YouTube</b> (Gabriela Oliveira da Silva; Valdiane Sales Araujo)	169
<b>08 O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO AUXÍLIO NO ENSINO DA GEOMETRIA EM TURMAS MULTISSERIADAS</b> (Idney Charlisson Rocha; Valeska Martins de Souza)	176
<b>09 RECORRÊNCIAS LINEARES EM PROBLEMAS ASSOCIADOS A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI</b> (Aldivam do Carmo Albuquerque; Ana Gabriela Rodrigues Cardoso; Anselmo Baganha Raposo Júnior; Josenildo de Souza Chaves)	187
<b>10 USO MANCALA COMO FERRAMENTA DE ENSINO DA DISCIPLINA MATEMÁTICA DO IEMA PLENO COLINAS</b> (Ronaldo Dantas dos Santos; Erica Patrícia de Oliveira Santos; Marceane Gomes da Silva)	192
<b>11 BRINCANDO &amp; APRENDENDO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL</b> (José Carlos de Melo; Ione da Silva Guterres)	198
<b>12 GEOPIBID: USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA</b> (Valdiane Sales Araújo; Larissa Santos Chagas)	205
<b>13 SALA INVERTIDA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS USANDO VÍDEOS E CAMADA DE COMPUTAÇÃO DO DESMOS</b> (Valdelírio da Silva e Silva; José Valério Moreira Cândido)	211
<b>14 UMA PROPOSTA DE ENSINO DAS EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS ATRAVÉS DO TIRO COM ARCO</b> (Sandra Imaculada Moreira Neto; Alberto Leandro Correia Costa; Erivelton Mendes Corrêa)	220
<b>15 USO DA CALCULADORA COMO INSTRUMENTO FACILITADOR DE APRENDIZAGEM NAS AULAS DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA</b> (Priscila Marques Lopes Abitibol; Celina Amélia da Silva); Lélia de Oliveira Cruz)	225
<b>16 O CUBO MÁGICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL: um recurso para o desenvolvimento de habilidades</b> (Márcia Regina Sousa de Olanda; Waléria de Jesus Barbosa Soares; Lélia de Oliveira Cruz)	232

# Parte I

---

**Análise Funcional e EDP.  
Ciência de Dados.  
Geometria Diferencial.  
Métodos Estocásticos e Estatísticos.  
Modelagem Computacional.  
Otimização.  
Processamento de Imagens.  
Processamento de Sinais.  
Sistemas Dinâmicos.  
Teoria de Controle e Aplicações.**



## EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Wherllem Trajano Reis<sup>1</sup>

Cleber Cavalcanti<sup>2</sup>

**Resumo:** Equações de recorrência aparecem desde cedo à sorrelfa e à socapa sob a forma das progressões aritmética e geométrica, e suas aplicações. Este trabalho concentra seus esforços em resolver as equações de recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, casos homogêneo e não homogêneo, e culmina com uma versão discreta para o Teorema da Convolução.  
**Palavras-chave:** Recorrências Lineares; Equação Caraterística; Convolução.

**Abstract:** In elementary school, recurrence equations lies in shadows under the form of arithmetic or geometric progressions, and their applications. This work focuses its efforts on solving second-order linear recurrence equations with constant coefficients, homogeneous and non-homogeneous cases, and culminates with a discrete version for the Convolution Theorem.

**Keywords:** linear recurrence; characteristic equation; convolution.

### 1 INTRODUÇÃO

Uma equação de recorrência é o problema derivado de uma relação de recorrência e suas condições iniciais que consiste da intenção de encontrar uma expressão para o termo geral, referenciando-se apenas as condições iniciais e a ordem.

O trabalho está dividido em três seções. A seção 2 pavimenta o terreno tratando das equações de recorrências lineares de primeira ordem o qual abarca silenciosamente os casos com coeficientes não necessariamente constantes e os casos homogêneo e não-homogêneo. O tratamento das equações de recorrências de segunda ordem lineares com coeficientes constantes está dividido no caso homogêneo, objeto da seção 3, e caso não homogêneo, objeto da seção 4, na qual apresenta-se o Teorema da Convolução 4.

### 2 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Considere o problema:

**Problema 1.** “Determinar a sequência  $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$  conhecidas as sequências  $(p_n)_{n=0}^{\infty}$  e  $(q_n)_{n=0}^{\infty}$  reais, o valor inicial  $\mu_0$  e a relação de recorrência

$$\mu_{n+1} + p_n \mu_n = q_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

<sup>1</sup> URESI/SEDUC-MA, wherllem.tr@discente.ufma.br

<sup>2</sup> DEMAT/CCET/UFMA, cleber.cavalcanti@ufma.br

Fazendo  $n = 0, 1, 2, 3$  na relação de recorrência (1) a fim de observar se algum padrão se revela

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -p_0\mu_0 + q_0 \\ \mu_2 &= -p_1\mu_1 + q_1 = -p_1(-p_0\mu_0 + q_0) + q_1 = (-1)^2 p_1 p_0 \mu_0 - p_1 q_0 + q_1 \\ \mu_3 &= -p_2\mu_2 + q_2 = (-1)^3 p_2 p_1 p_0 \mu_0 + (-1)^2 p_2 p_1 q_0 - p_2 q_1 + q_2 \\ \mu_4 &= -p_3\mu_3 + q_3 = (-1)^4 p_3 p_2 p_1 p_0 \mu_0 + (-1)^3 p_3 p_2 p_1 q_0 + (-1)^2 p_3 p_2 q_1 - p_3 q_2 + q_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Isso sugere a solução, para  $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\mu_n = (-1)^n \left( \prod_{j=0}^{n-1} p_j \right) \mu_0 + \left[ \sum_{j=0}^{n-2} \left( (-1)^{n-j-1} \prod_{\ell=j+1}^{n-1} p_\ell \right) q_j + q_{n-1} \right] \quad (2)$$

na qual a primeira parcela é a solução da equação homogênea associada à relação de recorrência, e a segunda parcela é uma solução particular. Assim, a sequência  $(\mu_n)_{n=0}^\infty$  fica determinada por  $\mu_0$  dado,  $\mu_1 = -p_0\mu_0 + q_0$ , e demais  $\mu_n$  obtidos por (2)

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ -p_0\mu_0 + q_0, & \text{para } n = 1 \\ (-1)^n \left( \prod_{j=0}^{n-1} p_j \right) \mu_0 + \left[ \sum_{j=0}^{n-2} \left( (-1)^{n-j-1} \prod_{\ell=j+1}^{n-1} p_\ell \right) q_j + q_{n-1} \right] \end{cases} \quad (3)$$

a qual pode ser verificada por substituição direta em (1), ou usando o Princípio da Indução Finita.

### 3 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES - CASO HOMOGÊNEO

Nesta seção as atenções estão restritas à investigação que busca pela solução do problema de valores iniciais

$$\mu_{n+2} + p_0 \mu_{n+1} + q_0 \mu_n = 0 \quad (4)$$

com os coeficientes  $p_0$  e  $q_0$  constantes reais, conhecidos  $\mu_0$  e  $\mu_1$ .

**Problema 2.** “Determinar a sequência  $(\mu_n)_{n=0}^\infty$  conhecidas as constantes reais  $p_0$  e  $q_0$ , os valores iniciais  $\mu_0$  e  $\mu_1$  e a relação de recorrência

$$\mu_{n+2} + p_0 \mu_{n+1} + q_0 \mu_n = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots” \quad (5)$$

Suponha que existam constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que satisfaçam

$$\begin{aligned}\mu_{n+2} + p_0 \mu_{n+1} + q_0 \mu_n &= (\mu_{n+2} - \lambda_1 \mu_{n+1}) - \lambda_2 (\mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n) \\ &= \mu_{n+2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \mu_{n+1} + \lambda_1 \lambda_2 \mu_n\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -p_0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = q_0 \end{cases} \implies \lambda^2 + p_0 \lambda + q_0 = 0$$

denominada *equação característica*. Como é sempre possível resolver uma equação de segundo grau (sobre  $\mathbb{C}$ ), as constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  existem. A decomposição de (5) acima e a obtenção da equação característica foi adaptada do argumento em (CAVALCANTI, 2020) aplicado às Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem lineares.

Tem-se  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$  se, e somente se,  $q_0 = 0$ . Neste caso a relação de recorrência (5) de segunda ordem é imediatamente redutível ao caso de primeira ordem (1), resolvida por meio de (2).

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem não nulas, para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu_{n+2} + p_0 \mu_{n+1} + q_0 \mu_n = 0 \implies (\mu_{n+2} - \lambda_1 \mu_{n+1}) - \lambda_2 (\mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n) = 0.$$

Faça  $U_n = \mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n$  ( $U_0 = \mu_1 - \lambda_1 \mu_0$ )

$$U_{n+1} - \lambda_2 U_n = 0 \implies U_n = U_0 \cdot \lambda_2^n \implies \mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n = U_0 \cdot \lambda_2^n.$$

Para o caso  $n = 2$ , segue-se  $\mu_2 = -p_0 \mu_1 - q_0 \mu_0$  diretamente da relação de recorrência (5).

Para  $n = 3, 4, \dots$  usando (2) com  $p_n = -\lambda_1$  e  $q_n = U_0 \cdot \lambda_2^n$

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mu_0 \cdot \lambda_1^n + U_0 \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_1^{n-j-1} \lambda_2^j + U_0 \cdot \lambda_2^{n-1} \\ \implies \mu_n &= \mu_0 \cdot \lambda_1^n + (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^{n-1} + (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_1^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j\end{aligned}$$

separando o caso  $j = 0$  do somatório

$$\mu_n = \mu_1 \lambda_1^{n-1} + (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^{n-1} + (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_1^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j \quad (6)$$

para  $n \geq 3$  natural.

### 3.1 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO REAIS E DISTINTAS

Considere  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Na terceira parcela do segundo membro de (6), a soma de uma progressão geométrica, use que  $\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-2} - \lambda_1^{n-2}}{\lambda_1^{n-2}}$

$$\implies \mu_n = \left[ \mu_1 - \frac{\lambda_2 (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \lambda_1^{n-1} + \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^{n-1}$$



$$\Rightarrow \mu_n = \left( -\frac{\mu_1 - \lambda_2 \mu_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \cdot \lambda_1^n + \left( \frac{\mu_1 - \lambda_1 \mu_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \cdot \lambda_2^n, \text{ para } n = 3, 4, \dots \quad (7)$$

Apesar de a expressão (7) ter sido obtida para  $n \geq 3$ , observe-se também sua validade nos casos  $n = 0, 1, 2$ . Assim,

$$\mu_n = \left( -\frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \cdot \lambda_1^n + \left( \frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \cdot \lambda_2^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Observe que a solução expressa por (8) é uma combinação linear de  $\lambda_1^n$  e  $\lambda_2^n$ .

### 3.2 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO REAIS E IGUAIS

Quando  $\lambda_1 = \lambda_2$ , a soma  $\sum_{j=1}^{n-2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \sum_{j=1}^{n-2} 1 = n - 2$ , para  $n \geq 3$ . Pondo em (6), e denotando  $\lambda_1 = \lambda_2$  simplesmente por  $\lambda$

$$\mu_n = \mu_1 \lambda^{n-1} + (\mu_1 - \lambda \mu_0) \lambda^{n-1} + (\mu_1 - \lambda \mu_0) \lambda^{n-1} (n - 2)$$

$$\Rightarrow \mu_n = \mu_0 \lambda^n + (\mu_1 - \mu_0 \lambda) \cdot n \lambda^{n-1} \text{ para } n = 3, 4, \dots \quad (9)$$

Apesar de a expressão (9) ter sido obtida para  $n \geq 3$ , observe-se também sua validade nos casos  $n = 0, 1, 2$ . Assim

$$\mu_n = \mu_0 \lambda^n + (\mu_1 - \mu_0 \lambda) \cdot n \lambda^{n-1} \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Observe que a solução expressa por (10) é uma combinação linear de  $\lambda^n$  e  $n \lambda^{n-1}$ .

### 3.3 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS

Para o caso em que as raízes da equação característica são números complexos conjugados denote as raízes por  $\lambda = \rho [\cos(\varphi) \pm i \operatorname{sen}(\varphi)] = \rho e^{\pm i\varphi}$ , para  $\varphi \notin \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$  e  $\rho > 0$ . Assim, para  $n \geq 3$

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \sum_{j=1}^{n-2} \left( \frac{e^{\pm i\varphi}}{e^{\mp i\varphi}} \right)^j = \sum_{j=1}^{n-2} (e^{\pm 2i\varphi})^j = e^{\pm 2i\varphi} \frac{e^{\pm 2i(n-2)\varphi} - 1}{e^{\pm 2i\varphi} - 1} = e^{\pm i(n-1)\varphi} \frac{\operatorname{sen}((n-2)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}$$

logo, por (6)

$$\mu_n = \mu_1 \rho^{n-1} e^{\mp i(n-1)\varphi} + (\mu_1 - \rho e^{\mp i\varphi} \mu_0) \rho^{n-1} e^{\pm i(n-1)\varphi} + (\mu_1 - \rho e^{\mp i\varphi} \mu_0) \rho^{n-1} \frac{\operatorname{sen}((n-2)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$= \mu_1 \rho^{n-1} \left[ 2 \cos((n-1)\varphi) + \frac{\operatorname{sen}((n-2)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \right] - \mu_0 \rho^n \left[ \cos((n-2)\varphi) + \frac{\operatorname{sen}((n-2)\varphi) \cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \right]$$

$$\Rightarrow \mu_n = \mu_1 \rho^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(n\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} - \mu_0 \rho^n \frac{\operatorname{sen}((n-1)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \quad (11)$$

Apesar de a expressão (11) ter sido obtida para  $n = 3, 4, \dots$ , observe-se também sua validade nos casos  $n = 0, 1, 2$ . Assim

$$\mu_n = \mu_1 \rho^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(n\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} - \mu_0 \rho^n \frac{\operatorname{sen}((n-1)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Em (12) note que a solução é uma combinação linear de  $\rho^{n-1} \operatorname{sen}(n\varphi)$  e  $\rho^n \operatorname{sen}((n-1)\varphi)$ .

#### 4 EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES - CASO NÃO HOMOGÊNEO

**Problema 3.** “Determinar a sequência  $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$  conhecidas as constantes  $p_0$  e  $q_0$ , a sequência  $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ , os valores iniciais  $\mu_0$  e  $\mu_1$  e a relação de recorrência

$$\mu_{n+2} + p_0 \mu_{n+1} + q_0 \mu_n = f_n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Como o membro esquerdo de (13) é o mesmo em (3), aplica-se a mesma decomposição, de onde segue-se a mesma equação característica. Analogamente ao caso homogêneo,  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$ , se e somente se,  $q_0 = 0$ . Neste caso a relação de recorrência (13) de segunda ordem é imediatamente redutível ao caso de primeira ordem (1), resolvida por meio de (3).

Considerando as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não nulas, fazendo  $U_n = \mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n$  (observe-se que  $U_0 = \mu_1 - \lambda_1 \mu_0$ ) na decomposição permite-se reescrever (13) como uma relação de recorrência de primeira ordem

$$U_{n+1} - \lambda_2 U_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Observe que  $U_1$  fica determinado em termos de  $\mu_0$  e  $\mu_1$  (e  $f_0$ )

$$U_1 = f_0 + \lambda_2 U_0 = f_0 + \lambda_2 (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) = f_0 - q_0 \mu_0 + \lambda_2 \mu_1$$

Aplicando (3) ao problema (14), identificando-se os termos gerais das sequência  $(p_n)_{n=0}^{\infty}$  e  $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ , respectivamente, com  $p_n = -\lambda_2$  e  $q_n = f_n$  fornece a solução

$$U_n = \begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ f_0 - q_0 \mu_0 + \lambda_2 \mu_1, & \text{para } n = 1 \\ (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_2^{n-\ell-1} f_{\ell}, & \text{para } n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (15)$$

mas note que a última parte da expressão acima também engloba o caso  $n = 1$  (lembre-se que  $q_0 = \lambda_1 \lambda_2$ )

$$U_n = \begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_2^{n-\ell-1} f_{\ell}, & \text{para } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

E aplicando (2) à equação  $\mu_{n+1} - \lambda_1 \mu_n = U_n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$  obtém-se

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ \mu_1, & \text{para } n = 1 \\ \lambda_1^n \mu_0 + \left( \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_1^{n-j-1} U_j + U_{n-1} \right) = \lambda_1^n \mu_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_1^{n-j-1} U_j \end{cases} \quad (17)$$

Resta substituir as devidas expressões para  $U_j$  em (17). É prudente escrever separadamente o caso  $n = 2$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \lambda_1^2 \mu_0 + \lambda_1 (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) + [\lambda_2 (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) + f_0] \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \mu_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) \mu_1 + f_0 = -q_0 \mu_0 - p_0 \mu_1 + f_0\end{aligned}$$

coerente com a relação de recorrência (13) para  $n = 2$ . Para  $n = 3, 4, \dots$

$$\begin{aligned}\mu_n &= \lambda_1^n \mu_0 + \lambda_1^{n-1} (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_1^{n-j-1} \left[ (\mu_1 - \lambda_1 \mu_0) \lambda_2^j + \sum_{\ell=0}^{j-1} \lambda_2^{j-\ell-1} f_\ell \right] \\ \mu_n &= \left[ -\lambda_1^n \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \right] \mu_0 + \left[ \lambda_1^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \right] \mu_1 + \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \lambda_2^{-\ell} f_\ell \quad (18)\end{aligned}$$

Note que a terceira parcela independe dos valores iniciais  $\mu_0$  e  $\mu_1$ , por este motivo, será denotada por  $M_n$

$$M_n = \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \lambda_2^{-\ell} f_\ell = \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{-1} \sum_{\ell=0}^{n-2} \left[ \lambda_2^{-\ell} f_\ell \sum_{j=\ell+1}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \right] \quad (19)$$

As somas das potência de  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  em (18) (em particular em (19)) apresentam resultados diferentes dependendo do sinal do discriminante da equação característica.

#### 4.1 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO REAIS E DISTINTAS

Considere  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  reais. Assim, para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \frac{\lambda_2^\ell}{\lambda_1^{n-1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n-\ell} - \lambda_1^{n-\ell}}{\lambda_2 - \lambda_1} \implies \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \frac{1}{\lambda_1^{n-1}} \cdot \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{n-1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \sum_{j=\ell+1}^{n-1} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j = \frac{\lambda_2^{\ell+1}}{\lambda_1^{n-1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n-\ell-1} - \lambda_1^{n-\ell-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases}$$

Pondo em (18)

$$\mu_n = \left( -\frac{\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \mu_0 + \left( \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \mu_1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{\ell=0}^{n-2} \left[ (\lambda_2^{n-\ell-1} - \lambda_1^{n-\ell-1}) f_\ell \right]$$

Conclui-se para  $n = 3, 4, \dots$

$$\mu_n = \left( -\frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_1^n + \left( \frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_2^n + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{\ell=0}^{n-2} \left[ (\lambda_2^{n-\ell-1} - \lambda_1^{n-\ell-1}) f_\ell \right] \quad (20)$$

Observe que a expressão acima também é válida para  $n = 2$ , Permita uma última melhoria na terceira parcela de (20). Altere o índice do somatório para  $j = n - \ell$

$$M_n = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{\ell=0}^{n-2} \left[ (\lambda_2^{n-\ell-1} - \lambda_1^{n-\ell-1}) f_\ell \right] = \sum_{j=2}^n \left( \frac{\lambda_2^{j-1} - \lambda_1^{j-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} f_{n-j} \right) \quad (21)$$

Assim, a solução  $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$  fica determinada por

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ \mu_1, & \text{para } n = 1 \\ \left(-\frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \lambda_1^n + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \lambda_2^n + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_2^{j-1} - \lambda_1^{j-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} f_{n-j}\right), & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (22)$$

#### 4.2 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO REAIS E IGUAIS

Considere  $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ . Assim, para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j = \sum_{j=\ell}^{n-1} 1 = n - \ell$$

Pondo em (18), conclui-se para  $n = 3, 4, \dots$

$$\mu_n = \left[-(n-1)\lambda^n\right] \mu_0 + (n\lambda^{n-1}) \mu_1 + \lambda^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} (n-\ell-1) \lambda^{-\ell} f_{\ell} \quad (23)$$

Observe que a expressão acima também é válida para  $n = 2$ . Permita uma última melhoria na terceira parcela de (23). Altere o índice do somatório para  $j = n - \ell$

$$M_n = \lambda^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} (n-\ell-1) \lambda^{-\ell} f_{\ell} = \sum_{j=2}^n (j-1) \lambda^{j-2} f_{n-j} \quad (24)$$

Assim, a solução  $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$  fica determinada por

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ \mu_1, & \text{para } n = 1 \\ -(n-1)\mu_0\lambda^n + n\mu_1\lambda^{n-1} + \sum_{j=2}^n (j-1)\lambda^{j-2} f_{n-j}, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (25)$$

#### 4.3 RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS

Considere  $\lambda = \rho [\cos(\varphi) \pm i \operatorname{sen}(\varphi)] = \rho e^{\pm i\varphi}$ , para  $\varphi \notin \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  e  $\rho > 0$ .

Assim, para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j = (e^{\pm 2i\varphi})^{\ell} \sum_{j=0}^{n-\ell-1} (e^{\pm 2i\varphi})^j = (e^{\pm 2i\varphi})^{\ell} \frac{(e^{\pm 2i\varphi})^{n-\ell} - 1}{e^{\pm 2i\varphi} - 1} = e^{\pm i(n+\ell-1)\varphi} \frac{\operatorname{sen}((n-\ell)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}$$

Pondo em (18) usando valores apropriados para  $\ell$ , conclui-se para  $n = 3, 4, \dots$

$$\mu_n = \left[-\rho^n \frac{\operatorname{sen}((n-1)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}\right] \mu_0 + \left[\rho^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(n\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}\right] \mu_1 + \rho^{n-2} \sum_{\ell=0}^{n-2} \rho^{-\ell} \frac{\operatorname{sen}((n-\ell-1)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} f_{\ell} \quad (26)$$

Observe que a expressão acima também é válida para  $n = 2$ . Permita uma última melhoria na terceira parcela de (26). Altere o índice do somatório para  $j = n - \ell$

$$M_n = \sum_{j=2}^n \rho^{j-2} \frac{\operatorname{sen}((j-1)\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)} f_{n-j} \quad (27)$$

Assim, a solução  $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$  fica determinada por

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_0, & \text{para } n = 0 \\ \mu_1, & \text{para } n = 1 \\ \left[ -\mu_0 \frac{\text{sen}((n-1)\varphi)}{\text{sen}(\varphi)} \right] \rho^n + \left[ \mu_1 \frac{\text{sen}(n\varphi)}{\text{sen}(\varphi)} \right] \rho^{n-1} + \sum_{j=2}^n \frac{\text{sen}((j-1)\varphi)}{\text{sen}(\varphi)} \rho^{j-2} f_{n-j} \end{cases} \quad (28)$$

para  $n = 2, 3, \dots$ .

#### 4.4 TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

O Teorema da Convolução apresentado a seguir é um análogo discreto ao teorema de mesmo nome para as Equações Diferenciais Ordinárias lineares com coeficientes constantes.

**Teorema 4** (Teorema da Convolução). *A solução do Problema (13) pode ser escrita sob a forma*

$$\mu_n = \mu_n^{(h)} + M_n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (29)$$

na qual  $\mu_n^{(h)}$  é a solução do problema homogêneo associado (5) e  $M_n$  (solução particular)

$$M_n = \sum_{j=2}^n \mu_{j-1}^{(h^*)} f_{n-j}$$

na qual  $(\mu_\ell^{(h^*)})_{\ell=0}^{\infty}$  é a solução do problema homogêneo associado (5) com  $\mu_0 = 0$  e  $\mu_1 = 1$ .

### 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

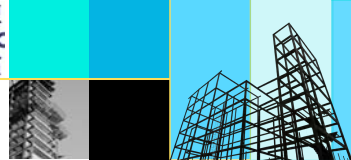
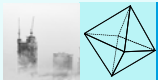
Tanto os resultados obtidos quanto a decomposição bem como a teoria propriamente dita para as equações de recorrência lineares guardam fortes paralelos com os elementos correspondentes para as equações diferenciais ordinárias lineares.

Para consultar os detalhes ora ocultos e uma variedade de exemplos, os autores recomendam a monografia (REIS, 2022).

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAVALCANTI, C. **Equações Diferenciais Ordinárias**: uma introdução honesta e suave. São Luís – MA: UFMA, 2020.

REIS, W. T. **Sobre as Soluções de Equações de Recorrência Lineares**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Matemática – Licenciatura Plena) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís – MA, 2022.



## SÉRIES DE FOURIER E A EQUAÇÃO DE LAPLACE

Gustavo Henrique Colins Marques<sup>1</sup>

Sandra Imaculada Moreira Neto<sup>2</sup>

**Resumo:** Atualmente, diante da competitividade de mercado, está cada vez mais comum a modelagem matemática para resolver processos. A matemática tem esse papel de aperfeiçoar processos há muito tempo. Dentre estes modelos destaca-se as equações diferenciais. Para resolução de tais equações existem diversos métodos, entre eles um dos mais consagrados é conhecido como Método de Fourier ou Método de Separação de Variáveis. Para um maior entendimento deste método, neste trabalho, procurou-se estudar alguns resultados a respeito das séries de Fourier, com foco principalmente na análise da convergência dessas séries. Após isso, aplicamos o Método de Fourier para resolver a equação de Laplace em um retângulo e utilizamos a teoria das séries de Fourier para concluir a solução. Além disso, utilizamos o software Geogebra para facilitar a representação gráfica das séries de Fourier e para análise gráfica da solução da equação de Laplace em um retângulo.

**Palavras-chave:** Convergência; Série de Fourier e Laplace

**Abstract:** Currently, in the face of market competitiveness, mathematical modeling to solve processes is increasingly common. Mathematics has had this role of improving processes for a long time. Among these models, differential equations stand out. For solving such equations there are several methods, among them one of the most consecrated is known as Fourier Method or Method of Separation of Variables. For a better understanding of this method, in this work, we tried to study some results regarding the Fourier series, focusing mainly on the analysis of the convergence of these series. After that, we apply the Fourier Method to solve the Laplace equation in a rectangle and use Fourier series theory to complete the solution. In addition, we used the Geogebra software to facilitate the graphical representation of Fourier series and for graphical analysis of the solution of the Laplace equation in a rectangle.

**Keywords:** Convergence; Fourier Series and Laplace

### 1 INTRODUÇÃO

A série de Fourier é uma forma de série trigonométrica usada para representar algumas funções periódicas, na forma de séries de senos e cossenos. Ela foi desenvolvida por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em seus estudos para solucionar um problema físico de condução de calor em corpos sólidos. Segundo (FIGUEIREDO, 1977), dada uma  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então podemos calcular os coeficientes de Fourier e com isso escrevermos

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (1)$$

<sup>1</sup> UFMA, gustavocolinsmarques@gmail.com

<sup>2</sup> UEMA, ymaculada@gmail.com

onde a expressão do lado direito de (1) recebe o nome de **série de Fourier** da função  $f$  e  $a_k$  e  $b_k$  são chamados de coeficientes de Fourier dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Observe que colocamos o símbolo ( $\sim$ ), na equação (1) pois nem sempre a relação entre a  $f(x)$  e sua série de Fourier é de igualdade, podendo ocorrer até a divergência da série.

O estudo das séries de Fourier é crucial quando queremos utilizar o método de Fourier ou o método de separação de variáveis para resolver equações diferenciais parciais. Neste trabalho abordaremos somente o problema de Dirichlet em um retângulo, isto é,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \end{cases}$$

onde  $f \in C(\partial\Omega)$  é dada e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  é o interior de um retângulo.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Para desenvolvimento desta pesquisa foram utilizadas sobretudo as referências (FIGUEIREDO, 1977) e (IÓRIO, 2005) para o estudo relacionado as séries de Fourier e equações diferenciais parciais (EDP) e como complemento as referências (LIMA, v.1, v.2, 2006).

### 2.1 MATERIAIS

O material utilizado para o desenvolvimento da pesquisa foi composto por livros relacionados as séries de Fourier e equações diferenciais parciais, o *software* Geogebra para construção dos gráficos e o *software* Latex para a escrita do trabalho.

### 2.2 MÉTODO

A metodologia aplicada basicamente foi: o levantamento bibliográfico necessário ao desenvolvimento da pesquisa e reuniões para discussões dos temas.

## 3 RESULTADOS

### 3.1 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

Apresentaremos a seguir alguns resultados que nos fornecem condições suficientes para que a função seja igual a sua série de Fourier. Um dos resultados mais importante é



conhecido como o Teorema de Fourier que fornece condições suficientes sobre a função  $f$  de modo que garantam a convergência de sua série de Fourier, em um ponto fixado  $x$ . A prova poderá ser encontrada na referência (FIGUEIREDO, 1977).

**Teorema 1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$ , dada em (1), converge, em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4)$$

Através do teorema é possível assegurar que quanto mais aumentarmos o número de termos da série de Fourier mais próximos estamos da função  $f$  num ponto.

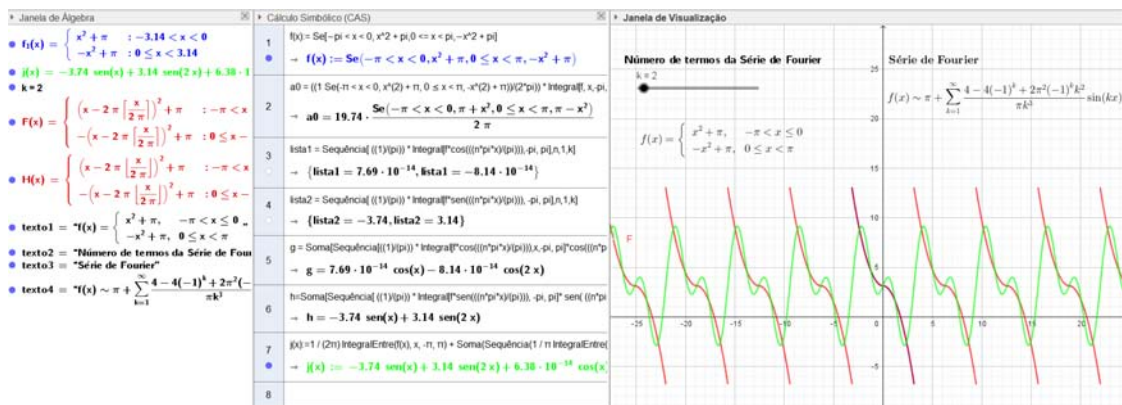
**Exemplo 1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2\pi$  e definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \pi, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ -x^2 + \pi, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

*Calculemos sua série de Fourier.*

*Neste exemplo, utilizaremos o software GeoGebra para realizarmos todos os cálculos referentes aos coeficientes de Fourier e assim obtermos a série de Fourier da função  $f$ .*

Figura 1 – Aproximação de  $f$  para  $k = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que à medida que aumentamos o número  $k$  de termos da série de Fourier, a aproximação obtida para a função  $f$  fica cada vez melhor, veja as Figuras 1 e 2.

O Teorema 1 fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função  $f$  em um ponto  $x_0$  fixado, assim dizemos que a série de Fourier converge pontualmente para  $f$ . Apresentaremos agora mais dois resultados que fornecem condições



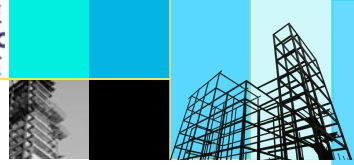
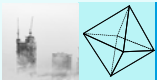
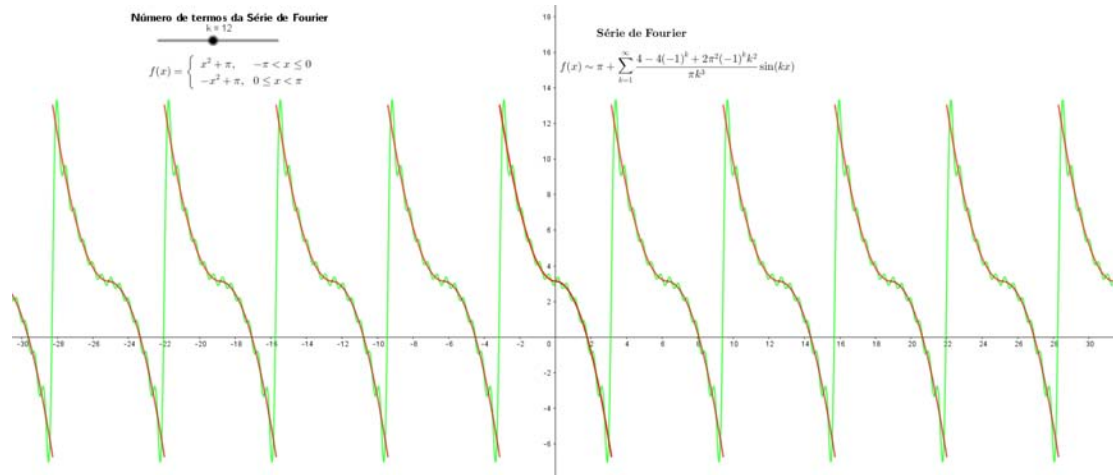


Figura 2 – Aproximação de  $f$  para  $k = 12$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

suficientes sobre a função  $f$  periódica de período  $2L$ , que garantem a convergência uniforme de sua série de Fourier. A prova poderá ser encontrada na referência (FIGUEIREDO, 1977).

**Teorema 2 (Primeiro Teorema Sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier).** *Seja a função  $f$  periódica de período  $2L$ , contínua com  $f'$  de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

**Teorema 3 (Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier).** *Seja  $f$  periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e tal que  $f'$  é de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ .*

### 3.2 A EQUAÇÃO DE LAPLACE

Daremos início ao estudo da existência de soluções para o problema de Dirichlet associado à equação de Laplace, dentro de um retângulo do  $\mathbb{R}^2$ . Para isso usamos sobretudo, (IÓRIO, 2005). A equação recebe o nome de Laplace em homenagem a Pierre-Simon Laplace (1749- 1827) que estudou extensivamente soluções para esta equação enquanto estudava a atração gravitacional entre corpos no espaço. Assim, dado um problema envolvendo a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

em que  $f \in C(\partial\Omega)$  é dada e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  é o interior de um retângulo. Para resolução do problema (5) utilizaremos o método de separação de variáveis no caso em que  $\Omega =$

$(0, a) \times (0, b)$  e que  $f$  se anule nos pontos  $y = 0$ ,  $y = b$  e  $x = 0$ . Assim obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{em } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in [0, a] \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = f(y), & y \in [0, b] \end{cases} \quad (6)$$

em que  $f \in C([0, b])$  satisfaz  $f(0) = 0 = f(b)$ . Suponhamos inicialmente que a solução do problema (6) seja da forma

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Então derivando a equação acima com relação a variável  $x$  e depois com relação a variável  $y$  temos que

$$u_{xx} = \varphi''(x)\psi(y) \text{ e } u_{yy} = \varphi(x)\psi''(y), \quad (7)$$

substituindo as equações (7) na EDP (6) obtemos

$$\varphi''(x)\psi(y) = -\varphi(x)\psi''(y).$$

Dividindo por  $\varphi(x)\psi(y)$  ambos os membros da equação anterior nos pontos onde  $\varphi \neq 0$  e  $\psi \neq 0$  segue que

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}. \quad (8)$$

Tendo em vista que ambos os membros da equação acima são iguais e dependem de variáveis diferentes devem portanto serem iguais a uma mesma constante que denotaremos por  $\lambda$ , assim temos

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \lambda$$

ou seja, obtemos duas EDOs

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \text{ e } -\psi''(y) = \lambda \psi(y). \quad (9)$$

Impondo a condição de contorno,  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$  segue que

$$\varphi(x)\psi(0) = \varphi(x)\psi(b) = 0,$$

e como  $\varphi(x) = 0$  não nos interessa por ser a solução trivial  $u(x, y) = 0$ , temos que

$$\psi(0) = \psi(b) = 0. \quad (10)$$

Logo de (9) e (10) temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \psi''(y) + \lambda \psi(y) = 0 & \text{em } (0, b), \\ \psi(0) = \psi(b) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Por outro lado, usando a condição de contorno  $u(0,y) = 0$  temos  $\varphi(0)\psi(y) = 0$ , como novamente  $\psi(y) = 0$  não nos interessa por ser a solução trivial, então  $\varphi(0) = 0$ . Assim obtemos

$$\begin{cases} \varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = 0 & \text{em } (0,a), \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Queremos resolver o problema (11), e observando que como se trata de uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes então pelo método da equação característica e impondo a condição de contorno dada na equação (11) obtemos

$$\psi(y) = \psi_k(y) = \beta_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0,b], \quad (13)$$

em que as funções  $\psi_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$  são chamadas de *funções próprias* ou *autofunções* da equação (11) e  $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{b^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  os *valores próprios* ou *autovalores* do problema (11) relacionados as autofunções. Resolvendo agora a equação (12) com  $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{b^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  temos que

$$\varphi''(x) - \frac{k^2\pi^2}{b^2} \varphi(x) = 0,$$

e novamente pelo método da equação característica obtemos

$$m^2 - \frac{k^2\pi^2}{b^2} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{k\pi}{b}.$$

Logo a solução do problema (12) é dada por

$$\varphi_k(x) = \alpha_k \exp\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \gamma_k \exp\left(-\frac{k\pi x}{b}\right), \quad x \in [0,a]$$

em que aplicando a condição de contorno dada na equação (12) temos

$$\varphi_k(0) = \alpha_k \exp\left(\frac{k\pi 0}{b}\right) + \gamma_k \exp\left(-\frac{k\pi 0}{b}\right) = 0$$

que implica em

$$\varphi_k(0) = \alpha_k + \gamma_k = 0 \Rightarrow \gamma_k = -\alpha_k.$$

Assim

$$\varphi_k(x) = \alpha_k \left[ \exp\left(\frac{k\pi x}{b}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi x}{b}\right) \right].$$

Tendo em vista que

$$2 \sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right) = \exp\left(\frac{k\pi x}{b}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi x}{b}\right),$$

então temos que a solução geral do problema (12) é da forma

$$\varphi_k(x) = 2\alpha_k \sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,a]. \quad (14)$$

Como  $u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  então substituindo as equações (13) e (14) em  $u(x, y)$  obtemos uma solução de (6) para cada  $k$  isto é,

$$u_k(x, y) = \delta_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

em que  $\delta_k = 2\alpha_k \beta_k \in \mathbb{R}$ . Como se trata de uma EDP linear e homogênea, então pelo Princípio da Superposição e tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Impondo a condição de contorno não homogênea,  $u(a, y) = f(y)$  segue que

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right), \quad y \in [0, b]. \quad (17)$$

Note que na equação acima  $f$  depende apenas de  $y$ , visto que  $\delta_k$  e  $\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)$  variam apenas com  $k$ . Logo temos que  $f$  é equivalente a uma série de Fourier de senos, assim de (3) temos

$$\delta_k = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy,$$

e fazendo

$$B_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy, \quad (18)$$

obtemos

$$\delta_k = \frac{B_k}{\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Portanto o candidato a solução do problema (6) é dado por

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Para que  $u$  em (19) seja solução do problema (6) devemos antes analisar se a série na equação (19) é convergente. Apresentaremos a seguir um importante teorema que garante a convergência do candidato a solução da equação de Laplace. A prova poderá ser encontrada na referência (IÓRIO, 2005).

**Teorema 4** *Seja  $f \in C([0, b])$  diferenciável em  $(0, b)$  a menos de um número finito de pontos com  $f' \in SC([0, b])$  e suponha que  $f(0) = 0 = f(b)$ . Então a série em (19) converge uniformemente em  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $u \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$  e  $u$  é solução de (6).*

A seguir apresentaremos um exemplo da equação de Laplace em um retângulo para um caso particular.

**Exemplo 2** Determine a função  $u$  que satisfaz a equação de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

no retângulo  $0 < x < 3$  e  $0 < y < 2$  com as seguintes condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 3;$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = f(y), \quad 0 < y < 2;$$

em que a função é dada por  $f(x) = y$ ,  $0 < y < 1$  e  $f(x) = 2 - y$ ,  $1 < y < 2$ .

Com efeito, usando as condições de contorno e aplicando a fórmula do coeficiente de Fourier  $B_k$  temos que

$$B_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy = \int_0^2 f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy.$$

Por outro lado, como

$$B_k = \int_0^2 f(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy = \int_0^1 y \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy + \int_1^2 (2 - y) \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy$$

então integrando por partes segue que

$$\int_0^1 y \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy = \frac{-2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

e

$$\int_1^2 (2 - y) \sin\left(\frac{k\pi y}{2}\right) dy = \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Logo

$$B_k = \frac{-2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

que implica

$$B_k = \frac{8}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Note que

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } k = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1 \\ 0 & \text{se } k = 2, 4, \dots, 2n, \end{cases}$$

com  $n \in \mathbb{N}$ . Assim se  $k = 2n$  então  $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$  o que não nos interessa. Por outro lado, fazendo  $k = 2n + 1$  obtemos  $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^n$ . Portanto chegamos em

$$B_n = \frac{8(-1)^n}{(2n + 1)^2\pi^2} \quad (20)$$

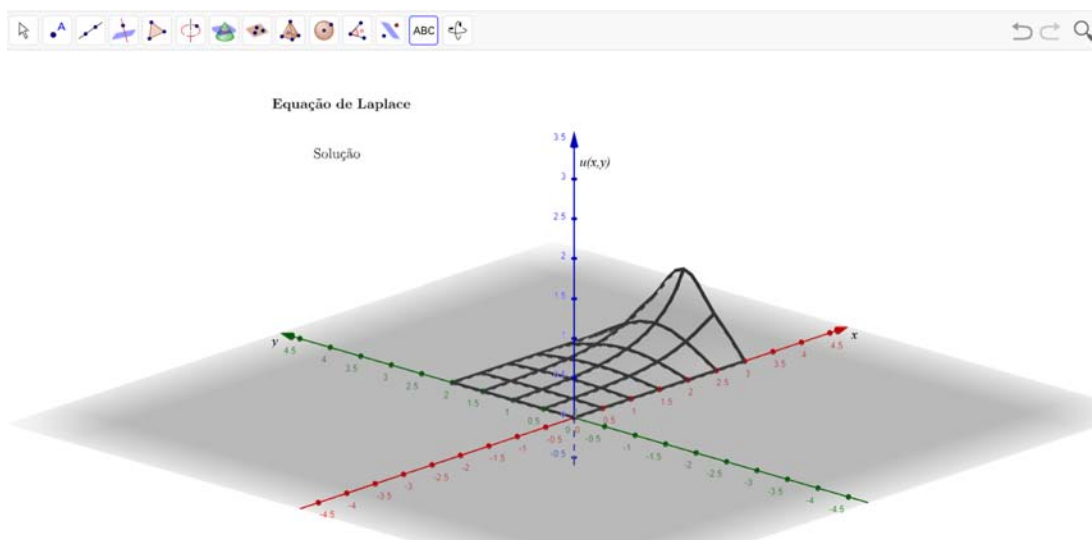


e substituindo a equação (20) na solução dada na equação (19), temos um candidato a solução geral do nosso problema

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2}\right) \frac{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{3(2n+1)\pi}{2}\right)}, \quad x \in [0,3], \quad y \in [0,2], \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Para a interpretação geométrica do candidato a solução geral do Exemplo 2 utilizando o Geogebra veja a Figura 3.

Figura 3 – Interpretação geométrica do problema



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos um método de resolução de EDP's, conhecido como método de separação de variáveis que nos permitiu simplificar a EDP (Equação de Laplace ) de tal forma que obtivemos duas EDO's e assim após manipulações algébricas chegamos em uma série trigonométrica onde utilizamos da teoria das séries de Fourier para concluir a solução da equação de Laplace. Por fim, utilizamos o software Geogebra como um facilitador para o estudo e análise gráfica das séries de Fourier e para observar o comportamento gráfico da solução da equação de Laplace em um retângulo.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais.** 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

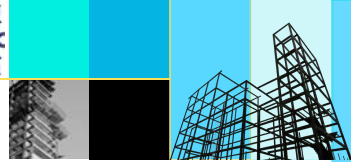
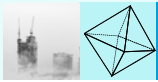


IÓRIO, Valéria. **EDP: Um curso de graduação**.2.ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.1. 12<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.2. 12<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2006.





## MODELO KOZIOL-GREEN UNIFORME-LOG-LOGÍSTICO EM ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA

Lazaro Soares Junior<sup>1</sup>

Josenildo de Souza Chaves<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste trabalho, utilizamos uma nova distribuição de probabilidade, híbrida uniforme-log-logística para representar os tempos de vida e de censura em análise de sobrevivência. Além disso, apresentamos uma extensão do modelo de Koziol-Green (KG) de censura informativa por meio de distribuições uniformizadas. Uma aplicação com dados de câncer de cólon é realizada utilizando o modelo Uniforme-KG.

**Palavras-chave:** Análise de sobrevivência; Modelo de cura padrão; Censura informativa; Distribuição log-logística e Distribuição uniforme-log-logística.

**Abstract:** In this work, we use a new hybrid uniform-log-logistic probability distribution to represent lifetimes and censoring times in survival analysis. Furthermore, we present an extension of the Koziol-Green (KG) model of informative censoring through uniformized distributions. An application with colon cancer data is performed using the Uniform-KG model.

**Keywords:** Survival analysis; Cure fraction model; Informative censoring; Log-logistic distribution and Uniform-log-logistic distribution.

### 1 INTRODUÇÃO

Análise de Sobrevivência é uma importante área da Estatística relacionada ao estudo de populações onde a variável resposta é o tempo até ocorrência de um determinado evento de interesse. Esta variável resposta é denominada de tempo de sobrevivência ou de falha (KALBFLEISCH; PRENTICE, 2002). Uma característica muito frequente em um conjunto dados de sobrevivência segundo Colosimo e Giolo (2006) é a presença de observações censuradas, aquelas em que o tempo de falha é observado parcialmente. Os modelos paramétricos utilizados nesta situação, em sua maioria, pressupõem a mesma distribuição de sobrevivência para o tempo de falha e tempo de censura.

Chaves e Rodrigues (2011) utilizaram uma abordagem que considera sobreviventes longa duração para representar o tempo de censura admitindo censura informativa. Eles apresentaram um estudo com dados simulados para revelar o impacto da censura informativa uniforme-exponencial no comprimento de intervalos de confiança assintóticos. Este e outros trabalhos, certamente motivam o uso de novas distribuições de probabilidade híbridas que dependem de um parâmetro  $T_0$  para representar a distribuição do tempo de censura sob a suposição de que esta seja informativa.

<sup>1</sup> Universidade Federal do Maranhão, junior.lazaro@ufma.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Maranhão, js.chaves@ufma.br



Entre os modelos com censura informativa encontrados na literatura, um dos mais conhecidos é o de Koziol-Green (KG), em que, a distribuição de sobrevivência do tempo de censura é uma potência da distribuição de sobrevivência do tempo de falha, Koziol e Green (1976). Este modelo possui propriedades atraentes, embora dificilmente apresente bom ajuste a um conjunto de dados reais. Isto tem motivado o uso de extensões do modelo KG para melhorar a adequação de ajustamento a dados reais (GATHER; PAWLITSCHKO, 1998; PAWLITSCHKO, 2000; BRAEKERS; VERAVERBEKE, 2008; GADDAH; BRAEKERS, 2011; JUNIOR, 2014).

## 2 MODELO DE KOZIOL-GREEN UNIFORMIZADO

Nesta seção apresentamos o modelo KG. Além disso, propomos uma extensão deste modelo para situações nas quais a distribuição do tempo de censura é uniformizada, híbrida de uma uniforme com outra distribuição. Denominamos este modelo de KG uniformizado.

### 2.1 MODELO DE KOZIOL-GREEN

Suponha que  $n$  indivíduos ou itens, num estudo de sobrevivência, tenham tempos de falha e de censura representados pelas v.a.'s  $T_1, \dots, T_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$ , respectivamente. Os dados observados são  $(x_i, \delta_i)$ , com  $i = 1, \dots, n$ . Sendo que,  $X_i = \min(T_i, Y_i)$ ,  $\delta_i = I(T_i \leq Y_i)$ .

O modelo de Koziol-Green (KG) de censura informativa e de riscos proporcionais foi introduzido por Koziol e Green (1976). Eles assumiram que a função de sobrevivência  $S_Y$  da variável de censura  $Y$  é uma potência da função de sobrevivência  $S_T$  do tempo de falha  $T$ , do seguinte modo.

$$S_Y(x; \theta) = [S_T(x; \theta)]^\beta, \beta > 0. \quad (1)$$

Sua simplicidade e aplicabilidade chamaram a atenção de vários pesquisadores. O termo “modelo de Koziol-Green” foi adotado por Csörgó e Horváth (1981). Este modelo, as vezes, é chamado de modelo de riscos proporcionais simples de censura aleatória. Note que

$$\lambda_Y(x; \theta) = \frac{f_Y(x; \theta)}{S_Y(x; \theta)} = \frac{\beta [S_T(x; \theta)]^{\beta-1} f_T(x; \theta)}{[S_T(x; \theta)]^\beta} = \frac{\beta f_T(x; \theta)}{S_T(x; \theta)} = \beta \lambda_T(x; \theta). \quad (2)$$

Uma reparametrização em (1) é obtida da relação funcional do parâmetro  $\beta$  com a probabilidade de uma observação ser não censurada,  $\bar{p}_c = Pr(T \leq Y)$ .

$$Pr(\delta = 1) = Pr(T \leq Y) = \int_0^\infty [1 - F_T(x; \theta)]^\beta dF_T(x) = \bar{p}_c,$$

em que,  $\bar{p}_c = (1 + \beta)^{-1}$ . Quando  $\beta = 0$  tem-se a ausência de censura. O modelo KG pode, também, ser escrito como

$$S_T(x; \theta) = [S_X(x; \theta)]^{\bar{p}_c}, \quad (3)$$

em que,  $S_X$  é a função de sobrevivência da v.a.  $X$ . Podemos utilizar (3) para obter um estimador para  $S_T$ , conhecido como estimador ACL,

$$S_{T^n}^{ACL}(x) = [S_{X^n}(x)]^{\hat{p}_c}, \quad (4)$$

em que,  $S_{X^n}(x) = (1/n) \sum_{i=1}^n I[X_i > x]$  é a função de sobrevivência empírica dos  $X_i$ 's observados, e  $\hat{p}_c = (1/n) \sum_{i=1}^n \delta_i$  é a proporção de observações não censuradas na amostra. A abreviação ACL deriva do nome dos três autores Abdushukurov (1984) e Cheng e Lin (1987), que independentemente propuseram este estimador. Ainda o estimador ACL é o estimador não paramétrico de máxima verossimilhança (NPML) de  $S_T$  e é assintoticamente mais eficiente que o estimador de Kaplan-Meier (STUTE, 1992).

A função de log-verossimilhança  $l(\theta, \beta; \mathcal{D})$  a partir dos dados observados  $\mathcal{D} = (x_i, \delta_i), i = 1, \dots, n$ , sob o modelo KG é igual a

$$l(\theta, \beta; \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \log f_T(x_i; \theta) + \beta \log S_T(x_i; \theta) + (1 - \delta_i) \log \beta. \quad (5)$$

## 2.2 MODELO KG UNIFORMIZADO

O modelo KG tem propriedades estatísticas atraentes, apesar de possuir difícil ajustamento (GATHER; PAWLITSCHKO, 1998). Eles assumiram que as observações censuradas são parcialmente informativas para estender o modelo KG. Pawlitschko (2000) propôs uma extensão para observações truncadas à esquerda. Gaddah e Braekers (2011) propuseram uma extensão para o modelo KG, quando os tempos de falha e de censura são dependentes, usando cópulas. A seguir, propomos uma extensão do modelo KG em que a distribuição de censura é uniformizada.

Suponha que temos interesse em realizar uma inferência sobre o vetor de parâmetros  $\theta$  a partir dos dados observados,  $\mathcal{D} = (x_i, \delta_i)$  com  $i = 1, \dots, n$ . Assumimos que

$$S_Y(x; \theta) = S_U(x; T_0) [S_T(x; \theta)]^\beta, \quad \beta > 0, \quad (6)$$

sendo que,  $S_U$  é a função de sobrevivência de uma v.a. uniforme em  $(0, T_0)$ . Denominamos esta extensão de modelo KG uniformizado (U-KG). Segue da equação (6) que a função de risco é igual a

$$\begin{aligned} \lambda_Y(x; \theta) &= \frac{f_Y(x; \theta)}{S_Y(x; \theta)} = \frac{(1/T_0) [S_T(x; \theta)]^\beta + \beta S_U(x; \theta) [S_T(x; \theta)]^{\beta-1} f_T(x; \theta)}{S_U(x; \theta) [S_T(x; \theta)]^\beta} \\ &= \frac{1}{T_0 S_U(x; \theta)} + \beta \frac{f_T(x; \theta)}{S_T(x; \theta)} = \frac{1}{T_0 - x} + \beta \lambda_T(x; \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

A função de verossimilhança sob o modelo U-KG é igual a

$$\begin{aligned} L(\theta, \beta, T_0; \mathcal{D}) &= \prod_{i=1}^n \left[ f_T(x_i; \theta) S_U(x_i; T_0) [S_T(x; \theta)]^\beta \right]^{\delta_i} \left[ [S_T(x; \theta)]^\beta (S_T(x; \theta)/T_0) \right. \\ &\quad \left. + \beta S_U(x_i; T_0) f_T(x_i; \theta) \right]^{1-\delta_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 ILUSTRAÇÃO COM DADOS REAIS

Nesta seção analisamos os dados de câncer de cólon descritos em Lin, Sun e Ying (1999). Determinamos as estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) e intervalos de confiança para os parâmetros de interesse. Este conjunto de dados está disponível no pacote survival do software R (R Core Team, 2020). Apresentamos ainda estimativas de Kaplan-Meier (EKM), Kaplan e Meier (1958) e EMVs da função de sobrevivência.

#### 3.1 INFERÊNCIA COM DADOS DE CÂNCER DE CÓLON

Analisamos os dados descritos em Lin, Sun e Ying (1999) sobre o tempo de recorrência  $X$  (em dias) de 315 pacientes com câncer de cólon ressecado tratados com terapia padrão, sendo 138 destes censurados. Este conjunto de dados também foi explorado por Lawless (2003). Entre as medidas resumo da amostra observada, podemos destacar a proporção de censura = 43,81%, o tempo mínimo = 20 dias e o tempo máximo = 3192 dias. As EKMs da função de sobrevivência  $S(z)$ , convergem para um valor  $p_0 > 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , sugerindo a existência de pacientes curados. Isto significa que uma proporção dos indivíduos não experimentarão a recorrência do câncer.

Seguindo Chaves e Rodrigues (2011) utilizamos o modelo de cura padrão com distribuição do tempo de falha log-logística para o ajuste dos dados. Para construir os intervalos de confiança assintóticos com censura não informativa e com censura informativa U-KG utilizamos matrizes de informação observadas. Para evitar problemas de identificabilidade reparametrizações nos parâmetros  $p_0$  e  $\beta$  foram necessárias. Consideramos  $\gamma = \log \beta$  e  $p = \log \left( \frac{1-p_0}{p_0} \right)$  e a distribuição log-logística na forma log-locação-escala (LAWLESS, 2003) com função densidade

$$f(z; a, b) = \frac{\exp((\log z - a)/b)}{(zb)(1 + \exp((\log z - a)/b))^2}, \quad z \geq 0. \quad (9)$$

A função de log-verossimilhança sob o modelo U-KG é dada por

$$\begin{aligned}
 l(a, b, \gamma, p, T_0; \mathcal{D}) = & \sum_{i=1}^n \delta_i \left[ \log \left( \frac{\left(1 - \frac{1}{1+\exp(p)}\right) \exp((\log z_i - a)/b)}{z_i b (1 + \exp((\log z_i - a)/b))^2} \right) + \exp(\gamma) \log \right. \\
 & \left. \left( \frac{1}{1 + \exp((\log z_i - a)/b)} \right) + \log(1 - z_i/T_0) \right] + (1 - \delta_i) [(\exp(\gamma) \\
 & - 1) \log \left( \frac{1}{1 + \exp((\log z_i - a)/b)} \right) + \log \left( \frac{1}{(1 + \exp((\log z_i - a)/b))} \right) \\
 & \times \frac{1}{T_0} + \frac{\exp(\gamma) (1 - z_i/T_0) \exp((\log z_i - a)/b)}{z_i b (1 + \exp((\log x - a)/b))^2} \left. + \log \left( \frac{1}{1 + \exp(p)} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1 - \frac{1}{1+\exp(p)}}{1 + \exp((\log x - a)/b)} \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

As EMVs dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  e  $p$  para alguns valores de  $T_0$ , de acordo com equação (10), estão apresentadas na Tabela 1. Os valores calculados do critério de informação de Akaike (AIC), Akaike (1974) também estão apresentados para escolha do melhor ajuste.

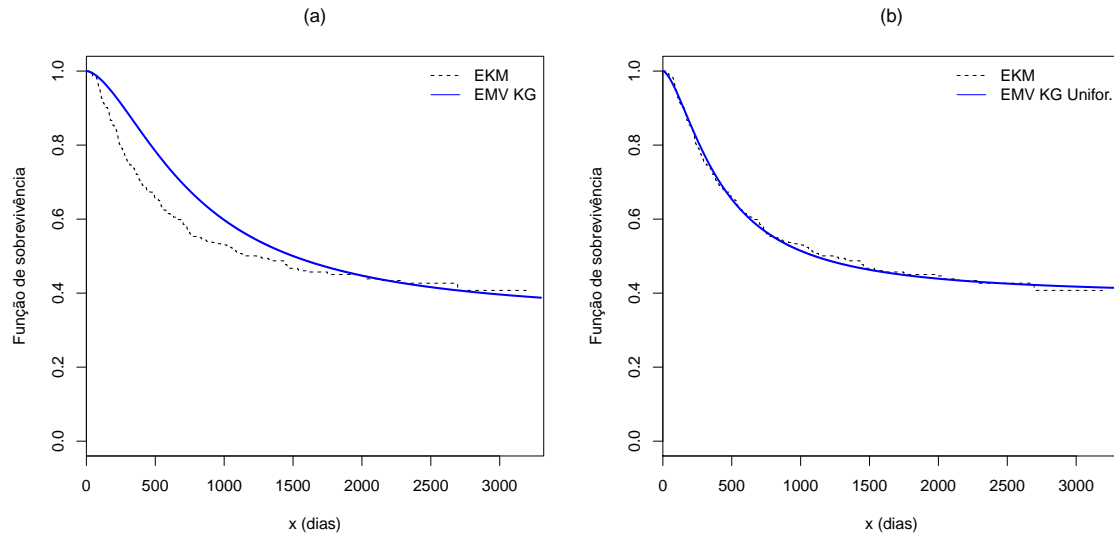
Tabela 1 – Inferência para o modelo Llog e censura U-KG com diferentes valores de  $T_0$

$T_0$	$a$	$b$	$\gamma$	$p$	AIC
3192.1	6.0395	0.6316	-8.9999	0.4401	5299.181
4000	6.0394	0.63156	-8.9999	0.4401	5342.283
8000	6.0941	0.6178	-3.3731	0.4462	5500.344
12000	6.3039	0.5950	-1.8174	0.4999	5553.497
$\infty$	6.6572	0.6010	-0.8944	0.6972	5600.354

Fonte: Os autores

Dentre os valores de  $T_0$  considerados, o critério AIC indica que  $T_0 = 3192.1$  produz um melhor ajuste. As EMVs e EKM para a função de sobrevivência  $S_p(z)$  estão apresentadas na Figura 1 (a)  $T_0 = \infty$  e Figura 1 (b)  $T_0 = 3192.1$ , respectivamente. Estas figuras sugerem que, ao contrário do modelo U-KG, o modelo KG não se ajusta bem ao conjunto de dados.

Figura 1 – Estimativas de Kaplan-Meier (EKM) e estimativas de máxima verossimilhança (EMV) da função de sobrevivência  $S_p(z)$ , dados de câncer de cólon. (a)  $T_0 = \infty$  (modelo KG) e (b)  $T_0 = 3192.1$  U-KG



Fonte: Os autores

EMVs, erros padrão, intervalos de confiança assintóticos e o comprimento destes intervalos, para os parâmetros dos modelos U-KG com censura informativa e Log-logístico (Llog) com censura não informativa, também foram calculados. Para estimar  $Var(\hat{\beta})$  e  $Var(\hat{p}_0)$  utilizamos o método delta.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos uma extensão do modelo de Koziol-Green (KG) de censura aleatória por meio de distribuições uniformizadas. O modelo de longa duração foi utilizado para representar o tempo de falha e o U-KG para o tempo de censura. Desenvolvemos, ainda, duas aplicações com dados reais: uma utilizando o modelo U-KG com distribuição de tempo de falha log-logística e outra utilizando a distribuição uniforme-log-logística nos tempos de falha e censura não informativa.

A inclusão de covariáveis poderá ser considerada em trabalhos futuros de estudos clínicos.

#### REFERÊNCIAS

ABDUSHUKUROV, A. On some estimates of the distribution function under random censorship. In: **Conference of Young Scientists. Math. Inst. Acad. Sci. Uzbek SSR (in Russian), Tashkent.** [S.l.: s.n.], 1984.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, p. 716–723, 1974.

BRAEKERS, R.; VERAVERBEKE, N. A conditional koziol–green model under dependent censoring. **Statistics & probability letters**, Elsevier, v. 78, n. 7, p. 927–937, 2008.

CHAVES, J. d. S.; RODRIGUES, J. Standard exponential cure rate model with noninformative or informative uniform-exponential censoring. **Communications in Statistics—Simulation and Computation**®, Taylor & Francis, v. 40, n. 3, p. 364–382, 2011.

CHENG, P. E.; LIN, G. D. Maximum likelihood estimation of a survival function under the koziol-green proportional hazards model. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 5, n. 1, p. 75–80, 1987.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de sobrevivência aplicada**. [S.l.]: Editora Blucher, 2006.

CSÖRGÓ, S.; HORVÁTH, L. On the koziol—green model for random censorship. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 68, n. 2, p. 391–401, 1981.

GADDAH, A.; BRAEKERS, R. An extension of the koziol–green model under dependent censoring. **Journal of Nonparametric Statistics**, Taylor & Francis, v. 23, n. 2, p. 439–453, 2011.

GATHER, U.; PAWLITSCHKO, J. Estimating the survival function under a generalized koziol-green model with partially informative censoring. **Metrika**, Springer, v. 48, n. 3, p. 189–207, 1998.

JUNIOR, L. S. **Modelo uniforme-loglogístico em análise de sobrevivência**. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, 2014. Disponível em: <<https://sigaa.ufma.br/sigaa/verProducao?idProducao=1723401&key=ffe0876dfec4c3bfef779b6f43c2c8b>>.

KALBFLEISCH, J. D.; PRENTICE, R. L. **The Statistical Analysis of Failure Time Data**. New York, second edition: Wiley, 2002.

KAPLAN, E. L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. **Journal of the American Statistical Association**, v. 53, p. 457–481, 1958.

KOZIOL, J. A.; GREEN, S. B. A cramer-von mises statistic for randomly censored data. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 63, n. 3, p. 465–474, 1976.

LAWLESS, J. F. **Statistical models and methods for lifetime data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.

LIN, D.; SUN, W.; YING, Z. Nonparametric estimation of the gap time distribution for serial events with censored data. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 86, n. 1, p. 59–70, 1999.



PAWLITSCHKO, J. Estimation in the koziol-green model with left truncated observations. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A**, JSTOR, p. 67–79, 2000.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

STUTE, W. Strong consistency under the koziol—green model. **Statistics & probability letters**, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 313–320, 1992.



## ESTUDO TEÓRICO DO FULERENO $C_{60}$ INTERAGINDO COM A ADENINA

André Felipe Silva Dutra Santos<sup>1</sup>

Silvete Coradi Guerini<sup>2</sup>

**Resumo:** Cálculos *ab initio* foram realizados para estudar a interação entre o fulereno  $C_{60}$  e a molécula adenina. Os resultados mostram que energeticamente a configuração mais favorável é aquela em que a adenina está adsorvida paralelamente à superfície do fulereno. Na análise eletrônica percebemos o surgimento de novos níveis de energia, referentes aos átomos da molécula adenina, em meio aos níveis de energia do  $C_{60}$ . Embora o fulereno seja sensível à presença da molécula de adenina, visto que a hibridização entre ambos se deu pelos orbitais dos sistemas presentes nessa interação, o sistema formado pelo  $C_{60}$  mais a molécula adenina permanece semicondutor.

**Palavras-chave:** Fulereño; Adenina e DFT.

**Abstract:** *Ab initio* calculations were performed to study the interaction between the fullerene  $C_{60}$  and the adenine molecule. The results show that energetically the most favorable configuration is the one in which the adenine is adsorbed parallel to the fullerene surface. In the electronic analysis we noticed the emergence of new energy levels, referring to the adenine molecule atoms, among the energy levels of  $C_{60}$ . Although fullerene is sensitive to the presence of adenine molecule, since the hybridization between both is due to the orbitals of the systems present in this interaction, the system formed by  $C_{60}$  plus the adenine molecule remains a semiconductor.

**Keywords:** Fullerene; Adenine and DFT.

### 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade materiais nanoestruturados são muito utilizados na indústria e setores de manufatura. Na medicina são usadas para diagnóstico, imagens, entrega de medicamentos e genes. (ALSHEHRI, Mansoor; et al., 2014) Os nanomateriais incluem uma ampla variedade de estruturas, como fulerenos, nanotubos, nanopeapods e cebolas de carbono. Seu tamanho pequeno (1-100 nm em duas ou três dimensões) (LEWINSKI, Nastassja; et al., 2008) e suas propriedades físico-químicas permitem a penetração em células, tecidos e órgãos. (CEDERVALL, Tommy; et al., 2007) Essa capacidade gerou muitas promessas na entrega direcionada de medicamentos. (FARAJI, Amir; WIPF, Peter, 2009) Os fulerenos são uma classe de nanomateriais de carbono que possuem muitas aplicações biomédicas, eletrônicas e semicondutoras, a sua descoberta em 1985 (KROTO, H.; et al., 1985) tornou possível a criação de vários dispositivos em nanoescala, justamente por conta de propriedades mecânicas únicas decorrentes da força de interação de Van der Waals e suas propriedades eletrônicas decorrentes de uma grande relação superfície-volume. (DRESSSELHAUS, Mildred; et al., 1996)

<sup>1</sup> UFMA, andre.dutra@discente.ufma.br

<sup>2</sup> UFMA, silvete.guerini@ufma.br



O fulereno  $C_{60}$  é um dos nanocarreadores mais promissores para liberação de drogas, embora as interações entre um  $C_{60}$  e uma molécula de DNA ainda não são totalmente compreendidos. (ALSHEHRI, Mansoor; et al., 2014) Principalmente quando nos referimos na interação entre o  $C_{60}$  e as bases nitrogenadas do DNA. Uma molécula de DNA é constituída de açúcar(desoxirribose) e fosfato, intercalados, unidos por ligações fosfodiéster a uma das quatro bases nitrogenadas, duas purinas, adenina e guanina, que se ligam seletivamente às duas pirimidinas, timina e citosina. (SANTOS, Welika Faria; et al., 2013) As instruções codificadas nas sequências de bases nitrogenadas do DNA constituem os genes, e são transcritas para moléculas de RNA, e destas, traduzidas nas sequências de aminoácidos das proteínas. A sequência específica dos aminoácidos na cadeia é o que diferencia uma proteína de outra. (SANTOS, Welika Faria; et al., 2013)

A adsorção da molécula adenina com com fulereno  $C_{60}$ , foram investigados através de simulações *ab initio*, a fim de explorar suas propriedades estruturais, energéticas e eletrônicas.

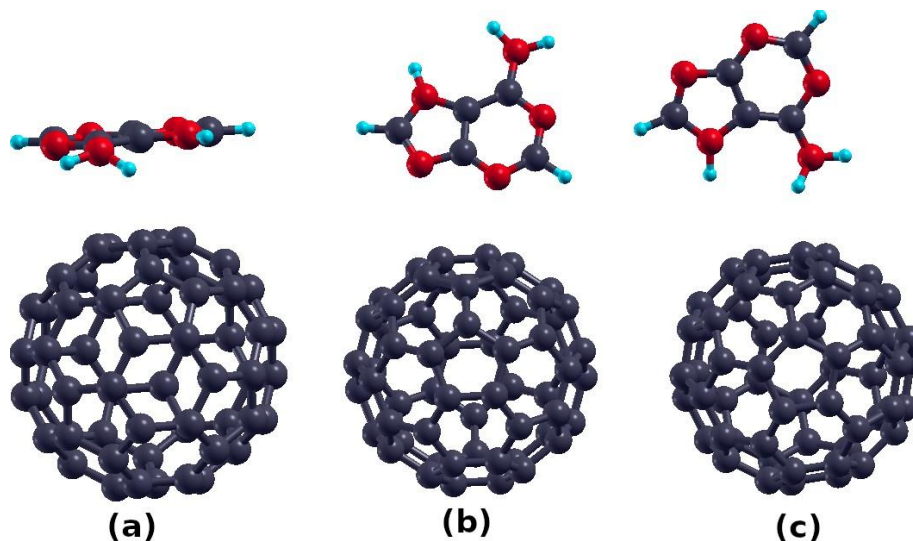
## 2 DESENVOLVIMENTO

Atualmente existem modelos teóricos que possibilitam interpretar resultados experimentais, prever novos comportamentos e inclusive auxiliar na proposição de novos materiais. Neste trabalho, apresentamos o estudo da molécula adenina interagindo com o fulereno  $C_{60}$  usando cálculos de primeiros princípios baseados na teoria funcional de densidade (HOHENBERG, Pierre; KOHN, Walter, 1964), implementada no programa computacional SIESTA (ORDEJÓN, Pablo; et al., 2001) que utiliza de uma base numérica obtida por meio de pseudo orbitais atômicos para descrever as funções de onda do sistema estudado. Para descrever a interação entre os elétrons de valência e os de caroço utilizamos o pseudopotencial de norma conservada. (TROULLIER, Niel.; MARTINS, José Luis, 1991) O potencial de troca-correlação foi tratado através da aproximação de densidade local (LDA) na parametrização de Perdew e Wang. (CEPERLEY, David; ALDER, Berni Julian, 1980)

## 3 RESULTADOS

Para analisar as propriedades estruturais da adenina interagindo com o fulereno  $C_{60}$  foram consideradas diferentes configurações, tais como: (i) a molécula de adenina paralela a superfície de fulereno [Fig. 1 (a)], (ii) a molécula de adenina posicionada de maneira que os átomos de nitrogênio da molécula estão próximos a superfície do fulereno [Fig. 1 (b)] e (iii) a molécula de adenina colocada de modo que os átomos de hidrogênio da molécula são posicionados próximos a superfície do fulereno [Fig. 1 (c)]. A fim de verificar qual das

Figura 1 – Configurações relaxadas da adenina interagindo com C<sub>60</sub>.



Fonte: André Felipe Silva Dutra Santos, 2022.

configurações estruturais é a mais estável calculamos a energia de ligação de cada uma das configurações (ver Fig. 1) através da equação:

$$E_b = E_T[C_{60} + Mol] - E_T[C_{60}] - E_T[Mol] \quad (1)$$

sendo  $E_{C_{60}+Mol}$  a energia total do C<sub>60</sub> interagindo com a molécula,  $E_{C_{60}}$  é a energia total do C<sub>60</sub> isolado e  $E_{Mol}$  é a energia total da molécula adenina isolada. A Tabela 1 mostra os valores da energia de ligação ( $E_b$ ) calculados através da Equação 1, a distância entre a molécula e o fullereno (D) e a diferença entre o HOMO (*Highest Occupied Molecular Orbital*) e o LUMO (*Lowest Unoccupied Molecular Orbital*) (Gap) para as configurações mostradas na Figura 1. Os valores negativos para a energia de ligação indicam as energias liberadas para a união dos núcleos e elétrons durante o surgimento de novas estruturas. (LEWARS, Errol; 2011) Através dos valores da energia de ligação percebemos que a configuração (a), ou seja, a configuração em que a adenina está paralela ao fullereno, 1 (a), se mostrou a mais estável energeticamente com distância de ligação de 3,00 Å e energia de ligação de 0,49 eV.

A análise da energia de ligação da molécula adenina interagindo com o fullereno mostra que a interação ocorre através de um processo químico. De acordo com Machado e colaboradores (MACHADO, Fernando; et al., 2012) para valores da energia de ligação  $\leq 0,83$  eV podem ser considerados baixos e desta forma a interação ocorre através de processos físicos. Por outro lado, se os valores da energia de ligação forem  $\geq 0,83$  eV são considerados valores altos e a interação ocorre por meio de processos de adsorção química.

Tabela 1 – Energia de ligação ( $E_b$ ), distância entre o fulereno e a adenina (D) e diferença entre o HOMO e LUMO (Gap) das configurações da Figura 1.

Configuração	$E_b$ (eV)	D (Å)	Gap (eV)
(a)	-0,49	3,00	1,60
(b)	-0,24	2,64	1,66
(c)	-0,22	2,21	1,11

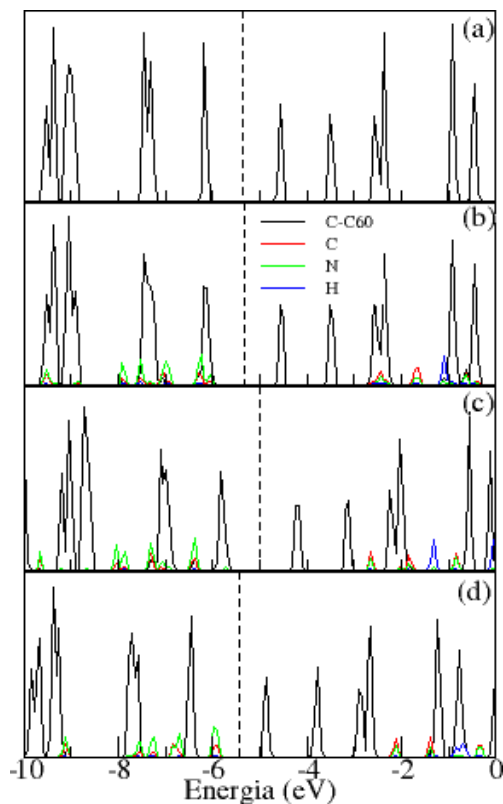
Fonte: André Felipe Silva Dutra Santos, 2022.

As propriedades eletrônicas da interação do adenina com o  $C_{60}$  foram analisadas por meio da Densidade de Estado Projetada (PDOS). O nível de Fermi é representado pela linha vertical pontilhada. O fulereno  $C_{60}$  isolado é um semiconductor com gap de aproximadamente 1,60 eV, o qual está em concordância com dados reportados na literatura. (ZANELLA, Ivana; et al., 2008)

Quando a molécula de adenina é adsorvida à parede do fulereno a energia de gap permanece em torno de 1,60 eV para as configurações 1 (a) e (b) e 1,11 eV para a configuração 1 (c) [ver Tabela 1]. Desta forma, o  $C_{60}$  mais adenina continua como semiconductor em todas as configurações estudadas. A Fig. 2 (a) mostra a PDOS para a configuração mais estável [ver Fig. 1 (a)], onde a linha preta representa os átomos de carbono do fulereno  $C_{60}$  e as linhas vermelha, verde e azul representam os átomos de C, N e H da molécula adenina, respectivamente. Comparando diretamente a PDOS do fulereno puro [ver Fig. 2 (a)] com o fulereno com a adenina adsorvida [Fig. 2 (b)], podemos verificar que novos níveis de energia surgem, principalmente na região de valência da PDOS devido a hibridização entre os níveis da molécula de adenina e do fulereno, na região entre -6,33 eV à -5,92 eV, com maior contribuição dos orbitais dos átomos de C do fulereno e os átomos de C e N da adenina, o que sugere uma interação covalente entre a molécula e o fulereno.

As PDOS mostradas nas Figs. 2 (c)-(d), referem-se às configurações mostradas nas Figs. 1 (b)-(c), respectivamente. Observamos que como no caso da PDOS da Fig. 2 (b), que níveis de energia emergem na região de valência da PDOS devido a hibridização entre os átomos da molécula e do fulereno  $C_{60}$ . Na PDOS da Fig. 2 (c), observamos que na região entre -5,95 eV a -5,57 eV aparecem níveis de hibridização entre os átomos N da molécula com os átomos de carbono do  $C_{60}$ , enquanto que na Fig. 2 (d) surge um nível exclusivo da molécula próximo ao nível de Fermi.

Figura 2 – Densidade de Estado Projetado (PDOS) para o fulereno  $C_{60}$  puro (a) e [(b), (c) e (d)] diferentes configurações da adenina adsorvido no fulereno, as quais correspondem as configurações mostradas na Fig. 1 (a)-(c), respectivamente. O nível de Fermi é representado pela linha pontilhada vertical.



Fonte: André Felipe Silva Dutra Santos, 2022.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizamos simulações computacionais com base na teoria do funcional da densidade com a finalidade de verificar a interação da molécula adenina com o fulereno  $C_{60}$ , em diferentes configurações.

A análise estrutural mostra que a configuração cuja molécula está paralela à superfície do fulereno é a mais favorável energeticamente. Por meio da energia de ligação pode-se observar que a interação entre a adenina e o  $C_{60}$  ocorre por meio de processo físico nas três configurações analisadas.

Na análise eletrônica, por meio da PDOS, foi possível observar que o  $C_{60}$  é sensível a presença da molécula adenina visto que a hibridização entre ambos se deu pelos orbitais dos sistemas presentes nessa interação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSHEHRI, Mansoor; et al. C60 fullerene binding to DNA. **Eur. Phys. J. B**, v. 87, n. 199, 2014.
- CEDERVALL, Tommy; et al. Understanding the nanoparticle-protein corona using methods to quantify exchange rates and affinities of proteins for nanoparticles. **Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.**, v. 104, n. 7, p. 2050–2055, 2007.
- CEPERLEY, David; ALDER, Berni Julian. Ground state of the electron gas by a stochastic method. **Phys. Rev. Lett.**, v. 45, p. 566–569, 1980.
- DRESSELHAUS, Mildred; et al. **Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes**. 1. ed. New York: Academic Press, p. 965, 1996.
- FARAJI, Amir; WIPF, Peter. Nanoparticles in cellular drug delivery. **Biorg. Med. Chem.**, v. 17, n. 8, p. 2950–2962, 2009.
- HOHENBERG, Pierre; KOHN, Walter. Inhomogeneous electron gas. **Phys. Rev.**, v. 136, p. B864–B871, 1964.
- KROTO, Harold; et al. C<sub>60</sub>: Buckminsterfullerene. **Nature**, v. 318, p. 162–163, 1985.
- LEWARS, Errol. **Computational Chemistry: Introduction to the Theory and Applications of Molecular and Quantum Mechanics**. 2.ed. New York: Springer, p. 664, 2011.
- LEWINSKI, Nastassja; et al. Cytotoxicity of nanoparticles. **Small**, v. 4, p. 26–49, 2008.
- MACHADO, Fernando; et al. Adsorption of reactive blue 4 dye from water solutions by carbon nanotubes: experiment and theory. **Phy. Chem. Chem. Phy.**, v. 14, p. 11139–11153, 2012.
- ORDEJÓN, Pablo; et al. **User's Guide SIESTA 1.1**. Madri, Espanha, 2001.
- SANTOS, Welika Faria ; et al. Sequenciamento de dna: métodos e aplicações. In: PROCEEDINGS OF SAFETY, HEALTH AND ENVIRONMENT WORLD CONGRESS, XIII., 2013, Porto, Portugal. Porto, Portugal: Science and Education Research Council, 2013. p. 138–140.
- TROULLIER, Niel; MARTINS, José Luis. Efficient pseudopotentials for plane wave calculations. II. Operators for fast iterative diagonalization. **Phys. Rev. B**, v. 43, p. 8861, 1991.
- ZANELLA, Ivana; et al. Theoretical Study of Ascorbic Acid Interacting with C<sub>61</sub>(COOH)<sub>2</sub> Complexes. **J. Comp. Theor. Nanoscience.**, v.5, p. 2176, 2008.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CENAPAD-SP e ao LSIM-UFMA pelos recursos computacionais.



## MODELAGEM MATEMÁTICA DISCRETA DE FENÔMENOS BIOLÓGICOS: CASO CONCENTRAÇÃO DE DROGA NO ORGANISMO

Rian de Carvalho da Costa<sup>1</sup>  
Francisco Carpegiani Medeiros Borges<sup>2</sup>

**Resumo:** A princípio a modelagem Matemática é uma ferramenta usada para compreender a ocorrência de fenômenos, e através da existência de um padrão nas recorrências é possível formular uma expressão de recorrência onde se obtêm a modelagem do fenômeno de tal forma, compreendendo seu comportamento e prevendo certas situações. No estudo dos fenômenos biológicos se tem a necessidade de entender determinada ação de tal forma, assim, para compreender o processo se dá pela Modelagem matemática aplicando as equações de diferenças, dessa forma se resulta em funções lineares ou não lineares, diante dessa modelagem com N aplicações no campo biológico, será abordado como exemplo o estudo do projeto de pesquisa na UFDPAr.

**Palavras-chave:** Modelagem; Fenômeno; Matemática; Recorrência.

**Abstract:** At first, mathematical modeling is a tool used to understand the occurrence of phenomena, and through the existence of a pattern in the recurrences, it is possible to formulate a recurrence expression where the phenomenon is modeled in such a way, understanding its behavior and predicting certain situations. . In the study of biological phenomena, there is a need to understand a certain action in such a way, thus, to understand the process is given by Mathematical Modeling applying the equations of differences, in this way resulting in linear or non-linear functions, in view of this modeling with N applications in the biological field, the study of the research project at UFDPAr will be discussed as an example.

**Keywords:** Modeling; Phenomenon; Mathematics; Recurrence.

### 1 INTRODUÇÃO

O projeto de pesquisa sobre a Biomatemática, na UFDPAr estudou sobre a aplicação das equações de diferenças para o estudo dos fenômenos biológicos. A modelagem é a forma mais próxima da verdadeira essência da matemática, pois se baseia em criar um modelo para exemplificar situações do mundo real, e junto com a modelagem computacional é possível representar, através de equações, gráficos, e demais outras formas de demonstrar fatores que ocorrem, no modelo de relação de recorrência, sempre gira em volta de um certo padrão regular que se faz presente nas n repetições, onde se observa que de fato os dados resultantes tem um padrão em familiaridade, sendo assim, são meios de compreender melhor os fenômenos que estão acontecendo na realidade, como a variação da concentração de uma droga “x” no organismo de uma pessoa com o decorrer do tempo, possuindo um valor inicial e um valor final, resultando em um sistema de equações lineares e não lineares, as quais são formas de entender o caminho que a informação está tomando. A temática para a realização da modelagem, se baseou na aplicação das equações de diferenças para o estudo de uma problemática encontrada no

---

<sup>1</sup> Vínculo (UFDPAr - Universidade Federal do Delta do Parnaíba).  
riancarvalho345@ufpi.edu.br

<sup>2</sup> Vínculo (UFDPAr - Universidade Federal do Delta do Parnaíba). carpegiani@ufpi.edu.br

material “APLICAÇÕES EM PROCESSOS BIOLÓGICOS USANDO MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL” (NASCIMENTO; SANTOS; NASCIMENTO, 2020), sobre a variação da concentração de uma droga no organismo de uma pessoa, de tal forma que ocorre uma somatória da quantidade de medicação inserida em cada aplicação, havendo uma perda em cada ciclo devido fatores naturais do corpo, tendo-se uma busca pelo melhor método de análise.

Através de estudos e artifícios algébricos para formular uma expressão de recorrência para o fenômeno, de tal forma que se pudesse fazer uma progressão no ambiente de programação Python.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Diante dos meios de pesquisa, tem-se que a metodologia aplicada para o estudo do projeto foi feita através de material didático "Equações Diferenciais com Aplicações" (BASSANEZI, FERREIRA JR, 1988), e para as formulações dos modelos “Mathematical models in Biology” (EDELSTEIN-KESHET, 2005), esses artigos de equações de diferenças foram de grande importância para a pesquisa, as aulas sobre a formulações de gráficos na linguagem de programação Python, para compreender melhor a questão das funções não lineares, para fazer a progressão dos pontos da imagem diante dos pontos do domínio informados, pois ocorre uma questão de compreensão das funções matemáticas dentro da linguagem computacional, como somatória, método de quadrados mínimos, são métodos específicos de cada sintaxe, diante que o professor deixou o aluno pesquisador com uma linguagem de programação que tinha conhecimento, assim podendo explorar novas ideias, com mais aplicações, ocorrendo reuniões periódicas, para conversar e abordar como estava o assunto da pesquisa, sendo a temática do estudo da modelagem, sobre a variação da concentração de uma droga no organismo de uma pessoa, de tal forma que ocorre uma somatória da quantidade de medicação inserida em cada aplicação, tendo uma perda em cada ciclo devido fatores naturais do corpo, na coleta dos dados, escolhendo um melhor método de análise. Um fenômeno que foi abordado pelo artigo, equações de diferenças foi a utilização de um medicamento, onde o paciente irá receber  $n$  aplicações do mesmo, o qual tem uma quantidade inicial  $Q_0$ , e será a mesma quantidade aplicada em cada ciclo, porém a uma taxa de eliminação do corpo denotada de  $r$ , o questionamento é a quantidade deste medicamento que estará presente no organismo do indivíduo no fim dessas aplicações denotada  $Q_n$ , pela colocação das variáveis, se tem um modelo inicial dessa recorrência:

$$Q_{n+1} = (1 - r)Q_n + Q_0$$

Depois de um cálculo feito por indução e colocando o fator  $\frac{Q_0}{r}$  em evidência através de produtos notáveis, encontra-se a equação de recorrência do sistema:

$$Q_n = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(1 - r)^n Q_0 + \frac{Q_0}{r}$$

Partindo de que  $Q_0$  é a quantidade de droga que será aplicada em cada ciclo, e  $Q_n$  é quantidade de droga presente no organismo no instante daquela aplicação, o  $r$  será a taxa de eliminação natural feita pelo corpo, e  $n$  o ciclo o qual se faz presente a aplicação.



A representação da quantidade de drogas no organismo do indivíduo após  $n$  aplicações, fazendo mais uma observação a taxa de eliminação  $r$ , não pode ser 0 e 1, pois assim a substância seria eliminada em 0% ou 100%, logo vamos calcular o limite dessa equação para  $n$  tendendo ao infinito, e  $0 < r < 1$ .

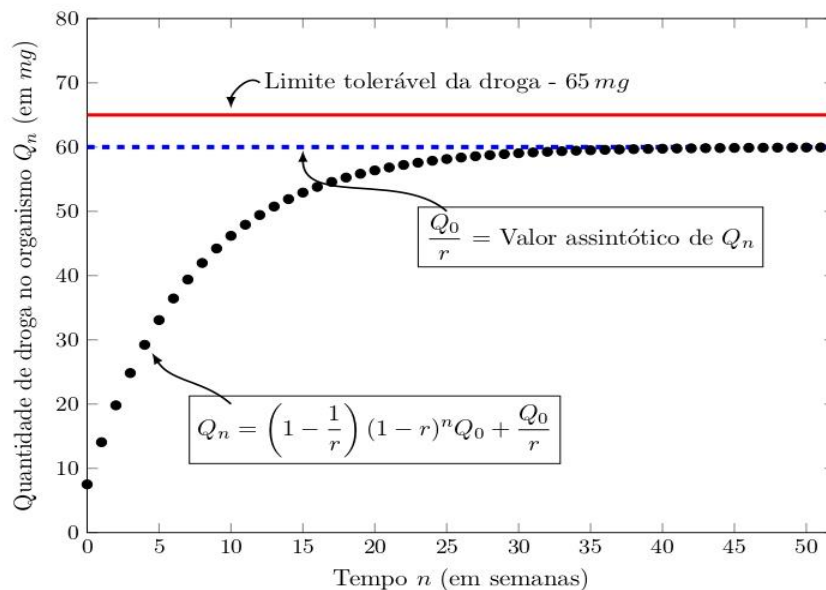
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{r}\right)(1 - r)^n Q_0 + \frac{Q_0}{r} \right] = \frac{Q_0}{r}$$

Portanto,  $Q_n$  converge em  $\frac{Q_0}{r}$ , valor assintótico de  $Q_n$ . Logo se deduz que a quantidade de droga tende a se estabilizar no organismo com o decorrer do tempo, assim abrindo novas perguntas, como se comporta a variação da quantidade de droga em relação ao tempo? Temos que para convergir, a quantidade de droga está diretamente ligada a quantidade de aplicações, assim em um caso o qual foi dado pelo artigo das aplicações em processos biológicos.

Para exemplificar nossa modelagem, vamos considerar que um paciente do Hospital Geral do Estado (HGE) é colocado em medicação que por sua vez é tomada uma vez por semana e terá 52 aplicações. A dose aplicada no paciente é de 7,5 mg. Além disso, considere também que a cada semana o seu metabolismo queima 12,5% da droga em seu organismo. Se o nível de medicamento no organismo atingir 65 mg as consequências são muito graves. É seguro para o paciente tomar este medicamento por tempo indeterminado?

Diante dos seguintes dados:  $r = 0,125$ ,  $n = 52$  e  $Q_0 = 7,5$ . O gráfico formado no jupyter, baseado no gráfico encontrado no artigo Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas (NASCIMENTO; SANTOS; NASCIMENTO, 2020). Como se pode evidenciar que de fato,  $\frac{Q_0}{r}$  converge em 60 mg, com 52 semanas de aplicação, onde o valor se aproximou bastante de 60, mas não ultrapassou, o valor ficou aproximadamente 59,94935 mg (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Trajetória da concentração da medicação “x” com a variação das aplicações.



Fonte: Autoria Própria.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados obtidos foram satisfatórios e os objetivos previstos na ementa do projeto foram alcançados, assim obtendo êxito. Algumas problemáticas encontradas como a questão da equação de recorrência bem como o estudo da função da trajetória da concentração da droga no organismo, diante de toda a modelagem prevista, e tendo em vista um ponto de convergência, o estudo foi feito pela propriedade em possuir um fator regular, que está na relação entre a quantidade constante que está sendo injetada e a quantidade após o ciclo, no caso  $Q_n$  em função de  $Q_0$ , nesse caso da expressão de recorrência da questão do acúmulo de droga no organismo, aonde se foi criado uma progressão de como se daria o acúmulo com o tempo, havendo perdas e ganhos no valor na variável  $Q_n$ , no estudo sobre os fenômenos biológicos se tem que muitas vezes o resultado pode chegar em uma função linear ou não linear, através das modelagens computacionais é possível projetar um gráfico das funções, e fazer uma busca pelos valores de uma expressão através do método dos quadrados mínimos, a linguagem Python acoplada com muitas bibliotecas foram de extrema importância no entendimento do comportamento da função e buscar os meios de desenvolver a expressão de recorrência, a qual possibilita compreender o caminho que o próximo dado tomará, sendo possível fazendo uma progressão.



## REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C, FERREIRA JR., W. C., **Equações Diferenciais com Aplicações**, São Paulo: Harbra, 1988.

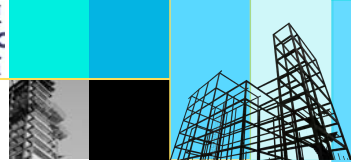
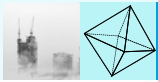
EDELSTEIN-KESHET, L., **Mathematical models in Biology**, Filadélfia: SIAM, 2005.

NASCIMENTO, Adriana Carla de Souza; SANTOS, Genilton Ferreira dos;  
NASCIMENTO, Arlyson Alves do. **APLICAÇÕES EM PROCESSOS BIOLÓGICOS USANDO MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**. Anais do CIET:EnPED:2020 - (Congresso Internacional de Educação e Tecnologias | Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância), São Carlos, ago. 2020. ISSN 2316-8722. Disponível em:  
<https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2020/article/view/1292>

DINIZ, GERALDO L., **Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas** – São Carlos, SP: SBMAC, 2011, 62p – (Notas em Matemática Aplicada; v. 54). Disponível em: [https://proceedings.science/series/23/proceedings\\_non\\_indexed/59](https://proceedings.science/series/23/proceedings_non_indexed/59)

## AGRADECIMENTOS

Meus Agradecimentos a Universidade Federal do Delta do Parnaíba – UFDPAr, Pró-Reitoria de Pós-graduação, Pesquisa e Inovação (PROPOPI), ICV/UFDPAr, Ao meu orientador Dr. Francisco Carpegiane Borges Medeiros



## MÉTODO DO PONTO FIXO ACELERADO APLICADO AO PROBLEMA DA MOCHILA QUADRÁTICO SEPARÁVEL COM RESTRIÇÕES DA CAIXA

Atécio Alves<sup>1</sup>

Jonatas Silva<sup>2</sup>

Paulo Santos<sup>3</sup>

Luiz Matioli<sup>4</sup>

Sissy Souza<sup>5</sup>

**Resumo:** Neste artigo, apresentamos uma extensão do método do ponto fixo com técnicas de aceleração conhecidas como aceleração de Anderson e aceleração de Aitken. Aplicamos o algoritmo resultante no problema da mochila quadrático separável com restrições de caixa. A formulação natural do método do ponto fixo analisado nesse artigo, torna a adaptação do algoritmo acelerado simples e intuitiva. Mostramos primeiramente as expressões algébricas que resultam no método do ponto fixo, e em seguida, incorporamos as técnicas de aceleração para resolver problemas quadráticos. Resultados numéricos mostram os ganhos obtidos na performance do algoritmo acelerado com relação ao algoritmo original.

**Palavras-chaves:** Método do ponto fixo. Aceleração de Anderson. Aceleração de Aitken.

**Abstract:** In this article we present an extension of the fixed point method with acceleration techniques known as Anderson acceleration and Aitken acceleration. We apply the resulting algorithm to the box-constrained quadratic knapsack problem. The natural formulation of the fixed point method analyzed in this article makes the adaptation of the accelerated algorithm simple and intuitive. We first show the numerical expressions that result in the fixed point method and then we incorporate the acceleration techniques to solve quadratic problems. Numerical results show the gains obtained in the performance of the accelerated algorithm in relation to the original algorithm.

**Keywords:** Fixed-point method. Anderson acceleration. Aitken acceleration.

### 1 INTRODUÇÃO

Neste artigo, estudamos como resolver o problema da mochila quadrático separável que possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min x \quad & \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} p_i x_i^2 - a_i x_i \right), \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n b_i x_i = c, \\ & l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

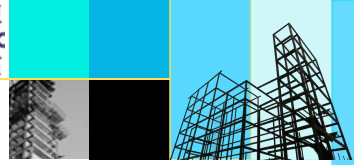
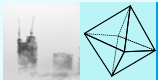
<sup>1</sup> UFPI, atecio.alves@gmail.com

<sup>2</sup> UFMA/UFPI, jonatas.iw@gmail.com

<sup>3</sup> UFDPAr, psergio@ufpi.edu.br

<sup>4</sup> UFPR, matioli@ufpr.br

<sup>5</sup> UFDPAr, sissy@ufpi.edu.br



onde  $p_i, b_i > 0$  e  $l_i < u_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  com  $c > 0$  tal que  $\langle b, l \rangle \leq c \leq \langle b, u \rangle$ .

O problema da mochila, também conhecido como problema de alocação de recursos, pode ser formulado por um modelo matemático onde a função objetivo é maximizar ou minimizar um custo, sendo a restrição da mochila a capacidade que a mochila possui. Suas variáveis podem ser binárias, inteiras ou contínuas e se sua função objetivo é não linear, então o problema é um problema de mochila não linear. Existem diferentes classes do problema da mochila e uma revisão desses problemas podem ser visto em (BRETTHAUER; SHETTY, 2002) e (PATRIKSSON, 2008).

Assim, estudamos uma forma robusta de aprimorar a performance do algoritmo do ponto fixo aplicado ao Problema (1). O algoritmo de aceleração de Anderson e o algoritmo de aceleração de Aitken são incorporados no método do ponto fixo e os algoritmos resultantes são comparados entre si. Técnicas de aceleração são comumente incorporadas em métodos que fazem uso da iteração do ponto fixo afim de melhorar sua performance. Exemplos de tais aplicações podem ser vistos em (AKSENOV; CHERTOV; SINKOV, 2021) e (BAUMANN; KLYMAK, 2021).

A organização deste artigo é dada da seguinte forma: na Seção 2, introduzimos brevemente a formulação do ponto fixo e apresentamos o seu algoritmo, na Seção 3, incorporamos no algoritmo do ponto fixo, as técnicas de aceleração estudadas, na Seção 4, apresentamos e comparamos a performance do algoritmos e, finalmente, na Seção 5, apresentamos as considerações finais.

## 2 MÉTODO DO PONTO FIXO

Baseados em (BRETTHAUER; SHETTY, 2002), apresentamos um teorema das condições de otimalidade.

Um vetor  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um mínimo do Problema (1) se, e somente se, existe multiplicadores de Lagrange  $\lambda_* \in \mathbb{R}$ ,  $v^* \in \mathbb{R}_+^n$  e  $w^* \in \mathbb{R}_+^n$  tal que

$$\nabla L_x(x^*, \lambda_*, v^*, w^*) = \nabla f(x^*) + \lambda_* \nabla g(x^*) + (\nabla r(x^*))' v^* + (\nabla s(x^*))' w^* = 0 \quad (2)$$

e além disso,

$$v_i r_i(x_i^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$w_i s_i(x_i^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

onde  $g(x) = b^T x - c$ ,  $r(x) = l - x$  e  $s(x) = x - u$ . Sob as suposições dadas no Teorema 2, (2) é equivalente a

$$\left. \begin{aligned} 0 &\geq \frac{p_i u_i - a_i}{b_i} + \lambda_*, & \text{se } x_i^* = u_i \\ 0 &= \frac{p_i x_i^* - a_i}{b_i} + \lambda_*, & \text{se } x_i^* \in (l_i, u_i) \\ 0 &\leq \frac{p_i l_i - a_i}{b_i} + \lambda_*, & \text{se } x_i^* = l_i, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Motivados por (5), nós ainda tratamos  $x$  como uma função dependente da variável  $\lambda$ . Para alcançar isso definimos

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

com

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} l_i, & \text{se } \lambda \geq \frac{a_i - p_i l_i}{b_i} \\ \frac{a_i - \lambda b_i}{p_i}, & \text{se } \frac{a_i - p_i u_i}{b_i} < \lambda < \frac{a_i - p_i l_i}{b_i} \\ u_i, & \text{se } \lambda \leq \frac{a_i - p_i u_i}{b_i}. \end{cases} \quad (7)$$

Um vetor  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é a única solução do Problema (1) se, e somente se, existe um multiplicador  $\lambda_* \in \mathbb{R}$  tal que  $x(\lambda_*)$  definido em (7) satisfaz

$$g(x(\lambda_*)) = 0. \quad (8)$$

Agora, para obter o algoritmo do ponto fixo, usamos (7) para definir

$$\begin{aligned} I_\ell(\lambda) &:= \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} : \lambda \geq \frac{a_i - p_i l_i}{b_i} \right\}, \\ I_u(\lambda) &:= \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} : \lambda \leq \frac{a_i - p_i u_i}{b_i} \right\} \\ I_{eq}(\lambda) &:= \{1, 2, \dots, n\} \setminus (I_\ell(\lambda) \cup I_u(\lambda)). \end{aligned} \quad (9)$$

Então, definimos a seguinte função

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\frac{\sum_{i \in I_\ell(\lambda)} b_i l_i + \sum_{i \in I_u(\lambda)} b_i u_i + \sum_{i \in I_{eq}(\lambda)} \frac{b_i a_i}{p_i} - c}{\sum_{i \in I_{eq}(\lambda)} \frac{b_i^2}{p_i}}. \quad (10)$$

É fácil de ver que  $g(x(\lambda)) = 0$  se, e somente se,  $\lambda = F(\lambda)$ .

A fórmula (10) aparece em (KIWIEL, 2008) com um passo intermediário no algoritmo de fixação de variável. Além disso, seguindo (KIWIEL, 2008), assumimos que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se  $I_{eq}(\lambda_k) \neq \emptyset$ , então  $I_{eq}(\lambda_{k+1}) \neq \emptyset$ .

Abaixo descrevemos formalmente o algoritmo de ponto fixo (abreviado como APF). Por uma questão de simplicidade, para  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos  $I_\ell(\lambda^k) = I_\ell^k$ ,  $I_u(\lambda^k) = I_u^k$  e  $I_{eq}(\lambda^k) = I_{eq}^k$ .

### Algoritmo APF

#### Passo 0 (Inicialização)

Tome  $k = 0$ . Seja  $\lambda^k \in \mathbb{R}$  de acordo com (KIWIEL, 2008).

#### Passo 1 (Calcular limite dual)

Para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\text{Tome } [LR_i, UR_i] = \left[ \frac{a_i - p_i l_i}{b_i}, \frac{a_i - p_i u_i}{b_i} \right].$$

#### Passo 2 (Calcular somas da iteração do ponto fixo)

$$SLR^k = \sum_{i \in I_\ell^k} b_i l_i; \quad SLU^k = \sum_{i \in I_u^k} b_i u_i; \quad SLE_a^k = \sum_{i \in I_{eq}^k} \frac{b_i a_i}{p_i}; \quad SLE_b^k = \sum_{i \in I_{eq}^k} \frac{b_i^2}{p_i};$$

Onde os conjuntos  $I_\ell$ ,  $I_u$  e  $I_{eq}$  são definidos de acordo com Equação (9).

#### Passo 3 (Atualizar variável dual)

$$\text{Tome } \lambda^{k+1} = \frac{SLR^k + SLU^k + SLE_a^k - c}{SLE_b^k}.$$

#### Passo 4 (Checar critério de parada)

Se  $abs(\lambda^{k+1} - \lambda^k) < \varepsilon$ , então determine  $x_i$  de acordo com Equação (7) e pare. Caso contrário, tome  $k = k + 1$  e retorne ao **Passo 2**.

## 3 TÉCNICAS DE ACELERAÇÃO APLICADAS À ITERAÇÃO DO PONTO FIXO

Como mencionado em (WALKER; NI, 2011), métodos de aceleração podem aliviar convergência lenta. Nosso interesse é em dois métodos particulares. O primeiro o qual é referido como aceleração de Anderson (WALKER; NI, 2011) e o segundo referido como aceleração de Aitken (BAUMANN; KLYMAK, 2021). Nas próximas subseções, descrevemos ambos os algoritmos e definimos o método do ponto fixo acelerado incorporando as técnicas de aceleração.



### 3.1 ACELERAÇÃO DE ANDERSON

A aceleração de Anderson defini um vetor de pesos  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ . Esses pesos são determinados por meio do seguinte problema otimização:

$$\min_{\alpha} \|G_k \alpha\|_2 \quad s.t. \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1, \quad (11)$$

onde  $G$  é encontrado da forma a seguir. Vamos considerar  $\lambda = F(\lambda)$  de acordo com a Equação (10) e  $g = F(\lambda) - \lambda$ . Então,  $G_k = [g_{k-m}, \dots, g_i]$ , onde  $g_k = F(\lambda_k) - \lambda_k$ .

Com esses pesos podemos criar a expressão para a próxima iteração como:

$$\lambda_{k+1} = \sum_{i=0}^m \alpha_i F(\lambda_{k-m+i}) \quad (12)$$

Abaixo descrevemos a abordagem de Anderson incorporado no algoritmo APF.

#### Algoritmo APF-Anderson

##### Passo 0 (Inicialização)

Defina  $k = 0$ . Let  $\lambda^k \in \mathbb{R}$  de acordo com (KIWIEL, 2008).

##### Passo 1 (Calcular limite dual)

Para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

Compute  $[LR_i, UR_i] = \left[ \frac{a_i - p_i l_i}{b_i}, \frac{a_i - p_i u_i}{b_i} \right]$ .

##### Passo 2 (Computar $G(\lambda^k)$ )

Compute  $SLU^k$ ,  $SLE_a^k$  and  $SLE_b^k$  usando  $\lambda^k$  e de acordo com algoritmo APF.

Compute  $G(\lambda^k) = \frac{SLU^k + SLE_a^k - c}{SLE_b^k}$ .

##### Passo 3 (Atualizar variáveis da aceleração de Anderson)

Defina  $m_k = \min\{m, k\}$ .

Determine  $f_k = G(\lambda^k) - \lambda^k$ .

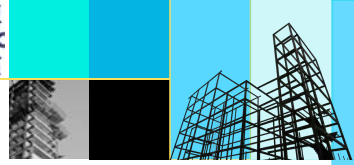
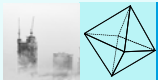
Determine  $F_k = (f_{k-m_k}, \dots, f_k)$ .

Defina  $\alpha^k = \{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_{m_k}^k\}$  de acordo com Equação (11).

Defina  $\lambda^{k+1} = \sum_{i=0}^{m_k} G(\lambda_{k+m_k+i})$  de acordo com Equação (12).

##### Passo 4 (Checar critério de parada)

Se  $abs(f_k) < \varepsilon$ , então defina  $x_i$  de acordo com equação 7 e pare. Caso contrário, defina



$k = k + 1$  e retorne ao **Passo 2**.

### 3.2 ACELERAÇÃO DE AITKEN

Como em (BAUMANN; KLYMAK, 2021), a ideia da aceleração de Aitken é alterar o fator de relaxação ( $e$ , assim, e o tamanho do passo de iteração) baseado nas informações das iterações passadas.

Seguindo (BAUMANN; KLYMAK, 2021), vamos considerar a sequência de escalares  $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$  que converge linearmente para seu ponto fixo  $\hat{\lambda}$ . Iso implica que para um grande  $k$ :

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} \approx \frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+2}}{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}. \quad (13)$$

A expressão acima pode ser reformulada para prever a iteração do próximo ponto fixo, ou seja,

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^2}{\lambda_{k+2} - 2\lambda_{k+1} + \lambda_k}. \quad (14)$$

Abaixo incorporamos a abordagem de Aitken no algoritmo APF de acordo com a Equação (14).

#### Algoritmo APF-Aitken

##### Passo 0 (Inicialização)

Defina  $k = 0$ . Let  $\lambda^k \in \mathbb{R}$  de acordo com (KIWIEL, 2008).

##### Passo 1 (Calcular limite dual)

Para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\text{Compute } [LR_i, UR_i] = \left[ \frac{a_i - p_i l_i}{b_i}, \frac{a_i - p_i u_i}{b_i} \right].$$

##### Passo 2 (Calcular somas da iteração do ponto fixo e definir $\lambda_1^k$ )

Compute  $SLU_1^k$ ,  $SLE_{a1}^k$  e  $SLE_{b1}^k$  usando  $\lambda^k$  de acordo com algoritmo APF.

$$\text{Compute } \lambda_1^k = \frac{SLU_1^k + SLE_{a1}^k - c}{SLE_{b1}^k}.$$

##### Passo 3 (Checar critério de parada)

Se  $abs(\lambda_1^k - \lambda^k) < \varepsilon$ , então defina  $x_i$  de acordo com Equação (7) e pare.

##### Passo 4 (Calcular somas da iteração do ponto fixo e definir $\lambda_2^k$ )

Compute  $SLU_2^k$ ,  $SLE_{a2}^k$  and  $SLE_{b2}^k$  usando  $\lambda_1^k$  de acordo com algoritmo APF.

$$\text{Compute } \lambda_2^k = \frac{SLU_2^k + SLE_{a2}^k - c}{SLE_{b2}^k}.$$

**Passo 5 (Computar iteração de Aitken)**

$$\text{Compute } \lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{(\lambda_1^k - \lambda^k)^2}{\lambda_2^k - 2\lambda_1^k + \lambda^k}.$$

**Passo 7 (Checar critério de parada)**

Se  $abs(\lambda^{k+1} - \lambda^k) < \varepsilon$ , então defina  $x_i$  de acordo com Equação (7) e parar. Caso contrário, defina  $k = k + 1$  e retorne ao **Passo 2**.

#### 4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a performance dos algoritmos propostos, foram implementados os algoritmos APF-Anderson, APF-Aitken e APF em linguagem de programação C. Os algoritmos foram compilados com GCC versão 12.2.0 em um PC Desktop Ubuntu com processador Intel Core i5 CPU 2.9 GHz com memória 16GB RAM. Compilamos os algoritmos com otimização `flags-march=native -O3 -fast-math`.

Os problemas resolvidos foram gerados com dimensões entre  $n = 50000$  e  $n = 2000000$ . O problema utilizado nos experimentos é também conhecido como *Weakly correlated* (KIWIEL, 2008) e foi gerado de acordo com as especificações abaixo:

- Weakly correlated:  $b_i \in [10, 25]$ ,  $a_i, p_i \in [b_i - 5, b_i + 5]$ ;  $l_i, u_i \in [1, 15]$ ,  $i \in N$  e  $r \in [b^T l, b^T u]$ .

Nas Tabelas 1 e 2, apresentamos os resultados das iterações e dos tempos computacionais respectivamente para os algoritmos APF-Aitken, APF-Anderson e APF. Para cada algoritmo, destacamos o valor mínimo, máximo e a média dos resultados. Foram gerados 50 problemas, onde foi executado 50 repetições de cada problema gerado e para cada valor de  $n$ , afim de obter uma média confiável para o tempo computacional dos experimentos.

Os resultados mostram que a aceleração de Aitken, representada pelo algoritmo APF-Aitken, apresentou os melhores tempos computacionais. O algoritmo APF-Anderson baseado na aceleração de Anderson não apresentou melhoras comparado ao algoritmo APF.

A Tabela 1, mostra que os algoritmos APF-Aitken e APF-Anderson precisaram de menos iterações para convergir que o algoritmo APF. Porém isso não reflete diretamente em uma melhora no tempo computacional, pois o custo por iteração dos algoritmos APF-Aitken e APF-Anderson são maiores que os do algoritmo APF.

Tabela 1 – Resultado das iterações para os problemas *Weakly correlated*

Dimension	Iterações			Iterações			Iterações		
	med	max	min	med	max	min	med	max	min
<i>n</i>	APF-Aitken			APF-Anderson			APF		
50000	2.3	4	2	2.8	9	1	4.5	8	3
100000	2.6	5	2	3.9	13	1	5.1	9	3
500000	2.6	4	2	4.2	14	2	5.2	8	4
1000000	2.6	5	2	4.4	13	2	5.2	9	4
1500000	2.5	4	2	4.2	12	2	5.2	8	4
2000000	2.5	5	2	4.0	15	2	5.1	10	4

Tabela 2 – Resultado dos tempos computacionais para os problemas *Weakly correlated*

Dimension	Tempo (msec)			Tempo (msec)			Tempo (msec)		
	med	max	min	med	max	min	med	max	min
<i>n</i>	APF-Aitken			APF-Anderson			APF		
50000	1.1	1.2	1.0	1.1	1.2	1.0	1.1	1.2	1.0
100000	2.3	2.6	2.2	2.4	2.6	2.1	2.3	2.5	2.2
500000	15.6	17.4	15.0	16.6	23.6	15.0	15.7	17.3	14.9
1000000	32.2	37.8	31.0	34.9	48.1	31.1	32.8	37.7	30.9
1500000	48.4	54.0	46.3	51.8	69.4	46.7	49.1	53.9	46.4
2000000	63.9	76.1	61.6	67.8	99.2	61.9	64.7	75.7	61.5

A Tabela 2 mostra que, apesar de em algumas instâncias o algoritmo APF obter tempos mínimos e máximos menores que a versão acelerada, para os problemas de tamanho  $n = 2.000.000$ , o algoritmo APF-Aitken obteve um ganho de aproximadamente 5,7% e 1,2% com relação aos algoritmos APF-Anderson e APF respectivamente. O que torna a aceleração uma alternativa para problema grandes.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, apresentamos um algoritmo de simples implementação baseado em um método unidimensional do ponto fixo para resolver o problema da mochila quadrático separável sujeito a restrições de caixa. Em seguida, incorporamos técnicas de aceleração como uma alternativa de melhorar a performance do algoritmo proposto. Experimentos numéricos mostraram que uma das alternativas obteve ganhos. Outras técnicas de aceleração, assim como, uma análise de convergência dos métodos estudados, serão apresentadas como trabalho futuro.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKSENOV, V.; CHERTOV, M.; SINKOV, K. Application of accelerated fixed-point algorithms to hydrodynamic well-fracture coupling. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 129, p. 103783, 2021.

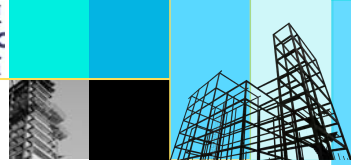
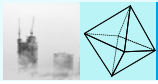
BAUMANN, S.; KLYMAK, M. Fixedpoint: A suite of acceleration algorithms with applications. 2021.

BRETTTHAUER, K. M.; SHETTY, B. The nonlinear knapsack problem—algorithms and applications. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 138, n. 3, p. 459–472, 2002.

KIWIEL, K. Variable fixing algorithms for the continuous quadratic knapsack problem. **Journal of Optimization Theory and Applications**, Springer, v. 136, n. 3, p. 445–458, 2008.

PATRIKSSON, M. A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 185, n. 1, p. 1–46, 2008.

WALKER, H. F.; NI, P. Anderson acceleration for fixed-point iterations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 49, n. 4, p. 1715–1735, 2011.



## ESTIMATIVAS DE DISTÂNCIAS POR ÂNGULOS DE VISÃO DE ANTENAS DE TELEMETRIAS EM RASTREIOS DE FOGUETES

Jonas de Jesus Barros<sup>1</sup>  
Marta de Oliveira Barreiros,<sup>2</sup>  
Allan Kardec Barros Filho<sup>3</sup>

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma metodologia para estimativas das distâncias desconhecidas entre um foguete em voo apontado por duas antenas receptoras de tele medidas baseado nos seus ângulos de linha de visão. A metodologia envolve procedimento algorítmico onde a estimava das distâncias incógnitas envolvem mudanças de referências geográficos e método de triangulação. A partir da solução encontrada é construída a trajetória do veículo traqueada por ambas antenas de telemetria que atua como sensor passivo. O resultado leva a uma idealização de um sistema operando como um pseudoradar podendo atuar como suporte adicional e independe de rastreios de foguetes

**Palavras-chave:** Antenas; Distância; Telemetria; Foguete.

**Abstract:** This work presents a methodology for estimating the unknown distances between a rocket in flight pointed by two tele-receiving antennas based on their line-of-sight angles. The methodology involves an algorithmic procedure where the estimation of unknown distances involves changes in geographic references and a triangulation method. From the solution found, the trajectory of the vehicle is constructed, traced by both telemetry antennas that act as a passive sensor. The result leads to an idealization of a system operating as a pseudo-radar capable of acting as additional support and independent of rocket tracking.

**Keywords:** Antenna; Distance; Telemetry; Rocket.

### 1 INTRODUÇÃO

Em rastreios de aeronaves, foguetes e outros artefatos a detecção, são usualmente feitas por radares, bastante utilizados em sistemas de vigilância e navegação. Entretanto sensores passivos são amplamente utilizados na detecção e rastreamento do alvo quando o uso de sensores ativos não é possível onde se incluem sensores que detectam a energia do alvo (BAR-SHALOM.1995). Uma grande variedade de técnicas de localização utilizada é categorizada de acordo com as medidas empregadas e algoritmos de processamento dos ângulos de chegada (AOA) do pulso retornado ou a direção na qual o feixe de transmissão é apontado ou por diferença de tempo de chegada (TDOA) são técnicas comum para cálculos de distância. Técnica de triangulação entre dois sensores é aplicada para estimativa de posição 3D e velocidade usando ângulos de dois sensores ópticos (SANDERS, 2001).

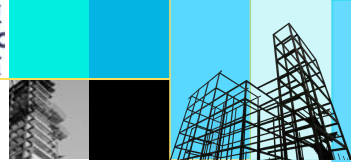
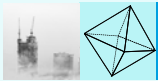
---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Maranhão, jonas.discente@ufma.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Maranhão, marta.barreiros@ufma.br

<sup>3</sup> Universidade Federal do Maranhão, allan.kardec@ufma.br





Em aplicações por satélites, modelos matemáticos fornecem medidas de distância com base na leitura sinais de relógio do satélite e receptor, onde retardo de propagação e divergência de leitura são causas precisão e viés na chamada pseudodistância. O artigo Panchuck (2008) propõe eliminar a linearização e refinar o modelo matemático corrente fazendo uma análise geométrica das equações resultante em um sistema equivalente permitindo solução analítica e melhora na acurácia. O uso de medições por GPS para rastreamento de foguetes sondagem dotado de receptores em sua carga útil é alternativa para a substituição dos radares em rastreamento além do alcance radar em veículos que não possuem transponder. Os algoritmos para tratamentos medidas do radar, além do monitoramento do deslocamento do alvo, tem por função disponibilizar para outros sensores as coordenadas de localização do veículo para auxílio de orientação de apontamento e recuperação de rastreamento.

Nesse contexto as estações de telemetria atuam passivamente, recebendo informação para uma eventual necessidade de reapontamento. As medidas da posição de um alvo fornecida por radar são em coordenadas polares: distância radial  $r$ , ângulo de elevação  $\phi$  e ângulo de azimute  $\theta$ , em relação ao sistema local de eixos ortogonais com radar fixado na origem. O erro de apontamento e a aquisição em lóbulo secundário da antena, degradação da relação do sinal/ruído de recepção de eco/transponder e efeitos atmosféricos são fatores que podem degradar as medidas de rastreamento de um foguete desde sua decolagem até seu impacto, ou instante de ejeção de satélite e devido fatores internos externos ao veículo tais como ajuste do lançador e velocidade e direção de ventos (BARROS,2014).

O trabalho de Medeiros (2020) relata estimativa de distância de foguete em relação a antenas de telemetria aplicando imediato método da triangulação, se utiliza das coordenadas já fornecidas. Cantanhede (2021) propôs um estudo de caso para reconstruir as coordenadas de posição de rastreamento de um foguete Vs30 utilizando dados dos ângulos de apontamento de uma antena de telemetria e a distância calculada por equipamento externo de Slant-Range, onde reconstrói a trajetória. O resultado comparado com medidas radar que atuou no mesmo rastreamento mostrou um viés entre distância do ponto de impacto final entre as duas fontes de medidas de 200m.

Este artigo propõe uma metodologia de cálculo que pode ser implementado por algoritmo para estimar as distâncias desconhecidas entre foguete em voo e duas antenas receptoras de estações de telemetrias baseado nos seus respectivos ângulos visada em direção ao foguete. O algoritmo constrói as trajetórias em relação às duas antenas nos seus respectivos referenciais locais. Implementado, o sistema pode atuar com um sensor passivo de rastreamento independente do radar dentro de um ambiente de multi sensores no rastreamento de veículos e artefatos espaciais.

## 2 DISTÂNCIAS POR ÂNGULOS DE VISÃO DE ANTENAS

Este artigo apresenta uma metodologia de cálculo baseado em mudanças de referenciais geodésicos e triangulação para estimar as distâncias desconhecidas entre foguete em voo traqueado por duas antenas receptoras de estações de telemetrias baseado. O algoritmo matemático tendo como dados de entrada os ângulos de visada em direção ao foguete constrói as trajetórias em relação às duas antenas nos seus respectivos referenciais locais. Implementado, o sistema pode atuar com um sensor



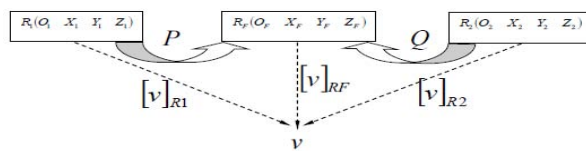
passivo de rastreamento independente do radar dentro de um ambiente de multi sensores no rastreamento de veículos e artefatos espaciais.

### 2.1 Materiais e método

Em substituição aos ângulos das linhas de visadas de duas telemetrias é utilizada ângulos de azimute e elevação de dois radares. A distância radial simulado radar é utilizada para validar a distância estimada pelo método proposto. As antenas estão localizadas no Centro de Lançamento de Alcântara (Maranhão-Brasil), distantes entre si de aproximadamente de 30 km. Uma simulação por trajetória teórica movimenta as antenas.

O ponto de interseção das linhas de visadas R1 a V e R2 a V, coincide com a posição do foguete e as estimativas das distâncias desconhecidas desse ponto a cada antena são em função das medidas angulares e de processos de mudanças de referenciais geodésicos e método de triangulação. Duas transformações simultâneas de mudança para um outro referencial RF comum,  $R_i \rightarrow RF$ ,  $i=1,2$ . onde as distancias radiais são incógnitas do problema. Pela unicidade do vetor em relação a uma base (Lima,2014) resulta na igualdade em RF para algum par de distância  $r_1, r_2$ . O problema consiste encontrar uma relação entre  $r_i$ ,  $i=1,2$  que torne verdadeira igualdade em RF, onde é aplicado o princípio da triangulação. As figuras Fig.1 e Fig.2 ilustram o processo.

Figura1. Mudanças do alvo V em relação aos referenciais R1, R2 para a referência RF.



Fonte: Autor

### 2.2 Dados de entrada

Registros posição ruidosas rastreamento simulado baseado na trajetória teórica de um foguete balístico, de tempo de amostragem de 50 ms. O lançador na plataforma em RF ajustado para voo em ângulo de azimute de 25° e ângulo de elevação de 78°. As informações de entrada ao problema são os ângulos das linhas de visão das antenas  $v_i = [\varphi_i \ \theta_i]^T$ ,  $i=1,2$  em R1 e R2 em direção ao alvo. Na Fig.2 estão apresentados a evolução dos ângulos de elevações e azimutes do veículo nas referências R1 e R2.

Coordenadas geográficas das antenas dos sensores, Tabela 1, centradas na origem OF1 de R1, OF2 origem de R2 e OF origem de RF com distância entre si de 34,71 km. Os coeficientes das matrizes P e Q, de dimensões 3x3, efetuam as mudanças dos referenciais  $P:R1 \rightarrow RF$  e  $Q:R2 \rightarrow RF$ , dependem unicamente das coordenadas

geográficas (Quadro 1) das coordenadas das origens de R1, expressos em RF (2), (3), e considera a não esfericidade da terra.

Fig.2. Ângulos de elevações e azimutes do veículo nas referências R1 e R2 .

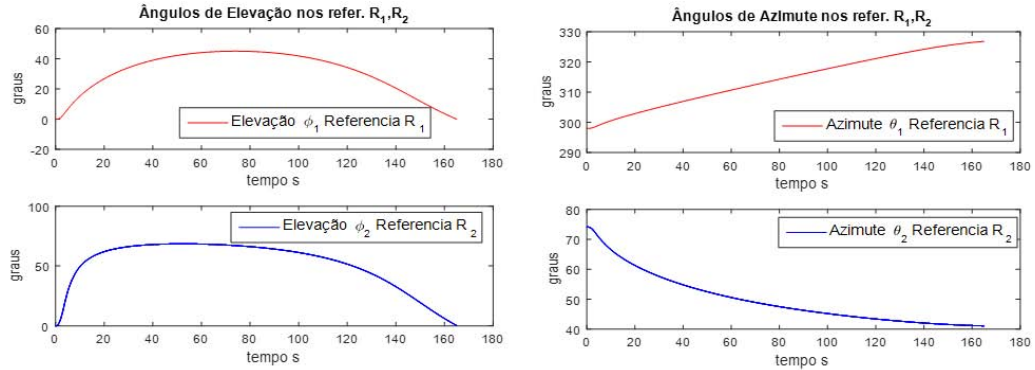


Tabela 1. Coordenadas geográficas dos referenciais

Coordenadas Geográficas			
	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>F</sub>
Longitude	-44.1294051700°	44.4208387800°	-44.3677465800°
Latitude	-2.4435347300°	-2.3310835100°	-2.3159899300°
Altitude	45.150 m	58.826 m	42.54 m

### 2.3 Desenvolvimentos matemático

São efetuadas duas transformações simultâneas de mudança de referência para o referencial comum RF,  $R_i \rightarrow RF$ ,  $i=1,2$ . Os vetores unitários de origens com  $OR_1, OR_2$  sobre as respectivas linhas de visada em direção ao foguete são explicitadas em ângulos fornecidos pelas das antenas e as distancias radiais são incógnitas do problema.

As matrizes P e Q transferem  $[v]_{R_i}$ ,  $i=1,2$ ,  $T_1: [v]_{R_1} \rightarrow [v]_{RF}; [v]_{R_2}$  e  $T_2: [v]_{R_2} \rightarrow [v]_{RF}; [v]_{RF}$  para RF, sendo as distâncias radiais r1 e r2 incógnitas

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_9 \end{bmatrix}, \text{ onde } [v]_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \phi_1 \sin \theta_1 \\ r_1 \cos \phi_1 \cos \phi_1 \\ r_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix}, [v]_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \cos \phi_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \cos \phi_2 \cos \phi_2 \\ r_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix}$$

Escrevendo as transformações T1 e T2 e pela unicidade do vetor em relação a uma base a equação (1) e desenvolvendo as operações evidenciando as incógnitas r1 e r2, as transformações P e Q são aplicadas somente às componentes dos vetores direção unitário. Denominando os vetores direção transformados (6) e (7) em RF, por:

$$[v]_F = P \begin{bmatrix} v_{1x} - o_{F1x} \\ v_{1y} - o_{F1y} \\ v_{1z} - o_{F1z} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} v_{2x} - o_{F2x} \\ v_{2y} - o_{F2y} \\ v_{2z} - o_{F2z} \end{bmatrix} \quad (1) \quad r_1 \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_{2x} \\ o_{2y} \\ o_{2z} \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_{1x} \\ o_{1y} \\ o_{1z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[v_{F1}] = \begin{bmatrix} v_{F1x} \\ v_{F1y} \\ v_{F1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \text{ sen } \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \text{sen } \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \text{ sen } \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \text{sen } \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad [v_{F2}] = \begin{bmatrix} v_{F2x} \\ v_{F2y} \\ v_{F2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \text{ sen } \theta_2 \\ \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \text{sen } \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \text{ sen } \theta_2 \\ \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \text{sen } \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A igualdade (4) com escrita simplificada (5), ou (6)

$$[v]_F = r_1 \begin{bmatrix} v_{F1x} \\ v_{F1y} \\ v_{F1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_{F1x} \\ o_{F1y} \\ o_{F1z} \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} v_{F2x} \\ v_{F2y} \\ v_{F2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_{F2x} \\ o_{F2y} \\ o_{F2z} \end{bmatrix} \quad (5), \quad \text{ou} \quad [v]_F = r_1[v_{F1}] + [o_{F1}] = r_2[v_{F2}] + [o_{F2}] \quad (6).$$

Igualando componente a componente os termos esquerdo e direito da igualdade (7), pode-se relacionar r1 em função de r2, vice-versa, de quaisquer linhas da igualdade do vetor [v] em RF;

$$[v]_F = \begin{bmatrix} r_1 v_{F1x} + o_{F1x} \\ r_1 v_{F1y} + o_{F1y} \\ r_1 v_{F1z} + o_{F1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 v_{F2x} + o_{F2x} \\ r_2 v_{F2y} + o_{F2y} \\ r_2 v_{F2z} + o_{F2z} \end{bmatrix} \quad (7) \quad r_1 = r_2 \frac{v_{F2x} + (o_{1x} - o_{2x})}{v_{F1x}} \quad (8) \quad \text{e fazendo } \lambda_2 = \frac{v_{F2x}}{v_{F1x}}, \text{ e } \lambda_{o2} = \frac{(o_{1x} - o_{2x})}{v_{F1x}}$$

onde r1 e r2 estão relacionados em RF por  $r_1 = r_2 \lambda_2 + \lambda_{o2}$  (8). De maneira análoga, pode-se obter r2 em função de r1, temos:  $r_2 = r_1 \lambda_1 + \lambda_{o1}$  (9).

Dos vetores unitários com origem O1 e O2 em R1 e R2,  $[v_1] = [\cos \varphi_1 \text{ sen } \theta_1 \quad \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \quad \text{sen } \varphi_1]^T$  e  $[v_2] = [\cos \varphi_2 \text{ sen } \theta_2 \quad \cos \theta_2 \cos \varphi_2 \quad \text{sen } \varphi_2]^T$  sobres as respectivas linhas de visadas ao alvo V,  $O_1V$   $O_2V$  e os vetores  $O_{12}$ ,  $O_{21}$  sobre eixo  $O_1O_2$ , linha eixo, obtém-se os ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,  $\phi_1 = \cos^{-1} \frac{\langle [v_1], [O_{12}] \rangle}{\| [v_1] \| \| [O_{12}] \|}$  (10) e  $\phi_2 = \cos^{-1} \frac{\langle [v_2], [O_{21}] \rangle}{\| [v_2] \| \| [O_{21}] \|}$  (11), onde  $\phi_1 + \phi_2 + \alpha = \pi$  (12), sendo  $\langle \rangle$  produto

interno entre vetores e  $\| \|$  a norma euclidiana de um vetor. Pela lei dos senos no triângulo  $O_1VO_2$ , onde V é a posição do foguete em dado instante temos:

$$\frac{r_1}{\text{sen } \phi_2} = \frac{r_2}{\text{sen } \phi_1} = \frac{d}{\text{sen } \alpha} \quad (13).$$

Substituindo (8) ou (9) em (13), obtemos o par de distâncias desconhecidas r1 (20) e r2(21) do alvo V às antenas em R1 e R2.

$$r_1 = \frac{\lambda_{o1}}{\left( \frac{\text{sen } \phi_{R1}}{\text{sen } \phi_{R2}} \right) - \lambda_1} \quad (14) \quad r_2 = \frac{-\lambda_{o2}}{\lambda_2 - \left( \frac{\text{sen } \phi_{R2}}{\text{sen } \phi_{R1}} \right)} \quad (15)$$

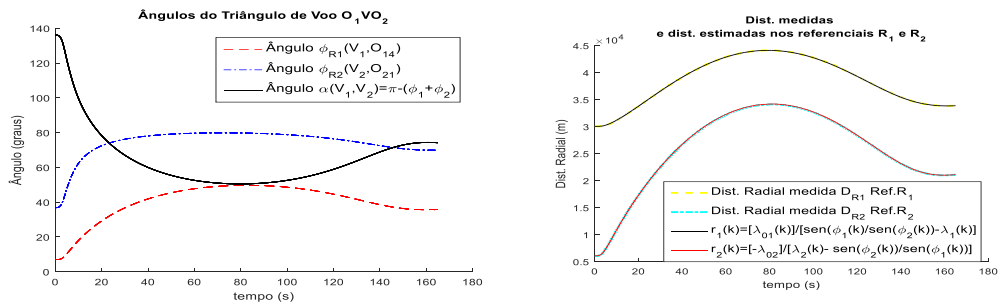
Por outro lado, aplicando a norma e desenvolvendo os quadrados em (6),  $r_1^2 \| [v_{F1}] \|^2 + \| [o_{F1}] \|^2 + 2r_1 \langle [v_{F1}], [o_{F1}] \rangle = r_2^2 \| [v_{F2}] \|^2 + \| [o_{F2}] \|^2 + 2r_2 \langle [v_{F2}], [o_{F2}] \rangle$  (16), obtem-se a distância no referencial comum RF, denotado  $\| [v_F] \|$ , plataforma de lançamento. Em termos de normas e ângulos escreve-se (16):

$$r_1^2 \| [v_{F1}] \|^2 + \| [o_{F1}] \|^2 + 2r_1 \| [v_{F1}] \| \| [o_{F1}] \| \cos \phi_1 = r_2^2 \| [v_{F2}] \|^2 + \| [o_{F2}] \|^2 + 2r_2 \| [v_{F2}] \| \| [o_{F2}] \| \cos \phi_2 \quad (17)$$

## 2.4 Resultados

Os ângulos  $\phi_1$  (10),  $\phi_2$  (11) e  $\alpha$  (12) variam em função dos ângulos de elevações e azimutes. Substituindo  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  em (14) e (15) obtem-se as estimativas das distâncias radiais r1 e r2 das antenas ao alvo em deslocamento em relação aos sistemas locais R1 e R2 representadas na figura 3.

Figura 3. Evolução dos ângulos do triângulo, distancias estimada e medidas



As medidas estimadas por (14) e (15) são comparadas medidas dos radares DR1 e DR2, Fig (3), aparecem sobrepostas às respectivas medidas de distancias radar, nos referenciais locais. É adotado o erro absoluto  $|r_i - DR_i|$ ,  $i=1,2$ , na avaliação de erros entre as distâncias radiais estimadas e medidas, comparadas as estatísticas de primeira e segunda ordem e valores extremos do erro absoluto  $|r_i - DR_i|$ , Fig.4 e Quadro.2

Figura 4. Erros Absolutos em R1 e R2

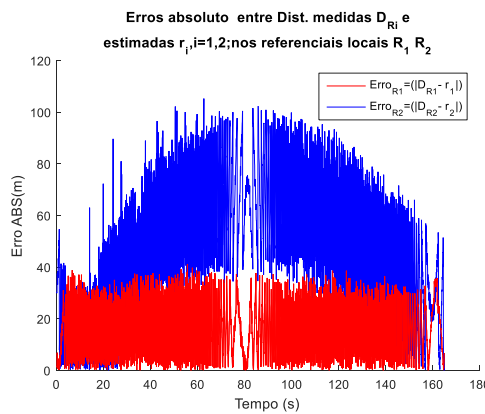


Tabela 2. Estatísticas dos erros nas referenciais R1 e R2.

	Média	D.Padrão	Min.	Max
<b> DR1-r1 </b>	15.91m	9.86m	0.005m	41.03m
<b> DR2-r2 </b>	48.76 m	24.76 m	0.004 m	105.25m

Verifica-se, que as estatísticas do erro absoluto  $|r_1 - DR_1|$ , são menores do que as do erro absoluto  $|r_2 - DR_2|$ . Afim de validar as equações do método as distâncias DR1, DR2 são aplicadas na equação (16), são calculadas em relação ao sistema de referência comum RF, plataforma de lançamento, Figura 5. Erros considerados e ruídos, os erros absolutos são refletidos nos erros absolutos em RF,  $|DRF_1 - DRF_2|$ ,  $DRF_1 \approx DRF_2$  Tabela 3.

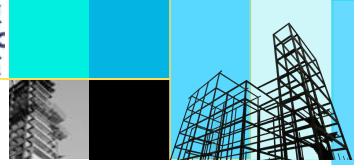
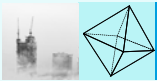


Fig.5- Distâncias medidas , estimadas e erros em RF.

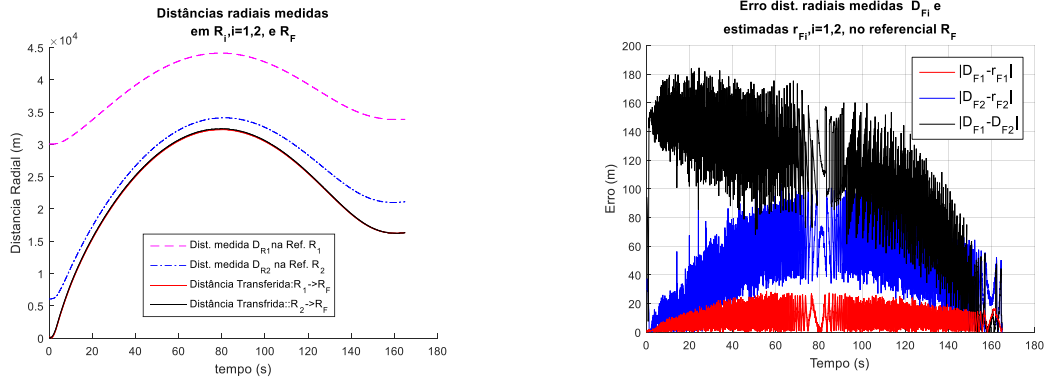


Tabela 3. Estatísticas dos Erros Absolutos entre as Distâncias em RF

	Média	Desv. P	Min.	Max.
<b> DR1F-r1F </b>	9.33m	6.46m	0.0037m	28.75m
<b> DR2F-r2F </b>	47.16m	24.96m	0.0031m	103.40m
<b> DR2F- DR1F </b>	105.43m	43.99m	0.05m	184.51m

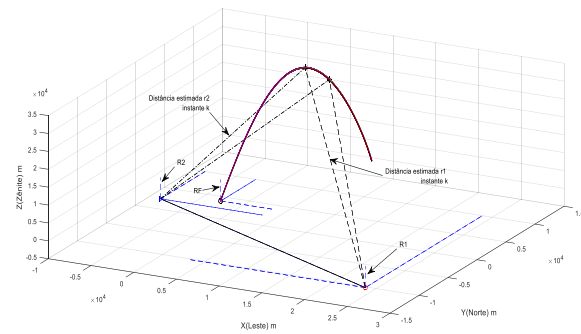
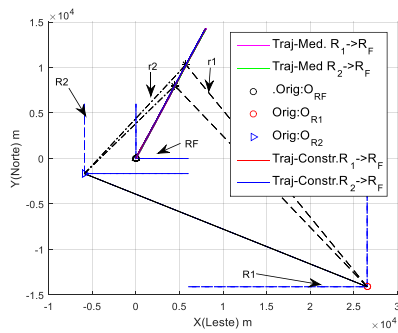
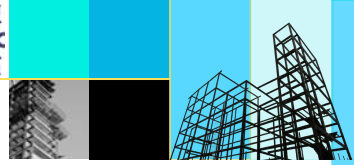
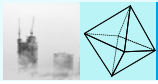
Avaliando erro na referência comum RF, as estatísticas são menores no erro em **|DR1F-r1F|** e maior entre as distancias medidas, quadro-3. Isso é explicado devido as medidas angulares em mil radianos mais precisas do que as medidas distanciam simuladas incrementadas em quantum de 60 m. Estimadas as distancias r<sub>i</sub>, i=1,2, reconstrói-se as trajetória T1 e T2 na forma cartesianas nas referências das antenas em R1 e R2 m respectivamente (19),(20)

$$T_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R1} = \frac{\lambda \omega_1}{\begin{pmatrix} \text{sen} \phi_1 \\ \text{sen} \phi_2 \end{pmatrix}} - \lambda_1 \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \text{ sen} \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \phi_1 \\ \text{sen} \phi_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}_{R2} = \frac{-\lambda \omega_2}{\lambda_2 - \begin{pmatrix} \text{sen} \phi_2 \\ \text{sen} \phi_1 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \text{ sen} \theta_2 \\ \cos \theta_2 \cos \phi_2 \\ \text{sen} \phi_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Após as transformação em T1 e T2 pelas matrizes  $P: T_1 \rightarrow T_F$  e  $Q: T_2 \rightarrow T_F$  a trajetórias é também construída no referencial RF. Nas Figuras 6 e 7 temos esses resultados e triângulo de voo em dois instantes distintos.

Figura 6. Visão no plano XY da trajetória em dois instantes, Visão 3D da trajetória construída em RF



### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentaram estimativas das distâncias baseado apenas nos ângulos de visão ao alvo em voo traqueado por duas antenas. Mesmo sem aplicar nenhum processo de filtragem às medidas ruidosas dos ângulos, obteve-se as estimativas de distância desconhecidas. O método resulta em um algoritmo pode levar á concepção de um pseudo radar em rastreios de foguetes dotado de transmissor na sua de carga útil.

#### Referências

BARROS, Jonas de J. Análise Estatísticas dos Ratreios dos Voos dos Foguetes de Treinamento

BAR-SHALOM Y. and X.R. Li, Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques, YBS Publishing, Storrs, CT, 1995.

BÁSICO do CLA. V Simposio Brasileiro de Geofisica Espacial e Aeronomia e IV Forum de Pesquisa e Inovação, UFRN- RN ,2014.

CANTANHEDE, N. et. al. Impact **Point Survey Rocket by Telemetry and Slant-Rang.** Anais da Academia Brasileira de Ciências. 2021

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear / Elon Lages Lima.** 1.ed. Rio de Janeiro :IMPA, 2014

MEDEIROS A., Macedo1 , Luiz G. Localização de Veículos Aeroespaciais por Triangulação de Antenas. SIEGE, ISSN 1983 7423,ITA 29 a 30 , Set 2020.

PANCHUCK, K.L. Et al. Geometric model of pseudo-distance measurement in satellite location systems. J. Phys. Conf. Ser. 998 012021.



RADAR ATLAS. Modules- Documentation technique, Vol 1/6, Généralité.T, THOMPSON  
,January 2012

SANDERS J.N. -Reed, Error propagation in 2 sensor 3D position estimation, Opt. Eng., 40  
April, 2001



## EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA FLUXOS DE REEB EM $S^1 \times S^2$ TIGHT

Diego Alfonso Sandoval Salazar<sup>1</sup>

Luis Andrés Rosso Cerón<sup>2</sup>

### Resumo:

O objetivo principal deste trabalho é motivar um futuro projeto de pesquisa na área da dinâmica simplética. Neste, apresentamos um resultado de existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb em  $S^1 \times S^2$  com a estrutura de contato *tight*. Mostramos que a existência de um certo *link*  $L \subset S^1 \times S^2$  formado por duas órbitas periódicas não-contráteis força a existência de infinitas outras órbitas periódicas cujas classes de homotopia no complementar de  $L$  estão prescritas conforme os números de rotação das componentes de  $L$ . Este resultado se baseia no trabalho de Hryniewicz, Momin e Salomão (2015) em que é provada uma versão do teorema de Poincaré-Birkhoff para fluxos de Reeb na 3-esfera *tight* e em  $SO(3)$  universalmente *tight*.

**Palavras-chave:** Variedade de Contato; Curvas pseudo-holomorfas; órbitas de Reeb e homologia de contato.

### Abstract:

The main goal of this work is to motivate a future research project into the area of symplectic dynamics. Here, we present a result of the implied existence of closed orbits for Reeb flows in  $S^1 \times S^2$  equipped with the tight contact structure. We show that the existence of a certain *link*  $L \subset S^1 \times S^2$  formed by two non-contractible closed orbits forces the existence of infinitely many closed orbits whose homotopy classes in the complement of  $L$  are prescribed according to the rotation numbers of the components of  $L$ . This result is based on work by Hryniewicz, Momin e Salomão (2015) in which a version of the Poincaré-Birkhoff theorem is proved for Reeb flows on the tight 3-sphere and the universally tight  $SO(3)$ .

**Keywords:** Contact Manifold; Pseudo-holomorphic curves; Reeb orbits and e Contact homology.

## 1 INTRODUÇÃO

**Definição 1** Uma 1-forma  $\lambda$  definida numa variedade  $M$  de dimensão  $2n + 1$  é uma forma de contato se  $\lambda \wedge (d\lambda)^n$  define uma forma de volume em  $M$ . A forma de contato determina uma distribuição tangente  $\xi = \ker \lambda \subset TM$ , chamada de estrutura de contato, e um campo de vetores  $R_\lambda$ , chamado de campo de Reeb, definido por  $\lambda(R_\lambda) = 1$  e  $d\lambda(R_\lambda, \cdot) = 0$ . O par  $(M, \xi = \ker \lambda)$  é chamado de variedade de contato co-orientável. O fluxo de  $R_\lambda$  em  $M$  é chamado de fluxo de Reeb associado a  $\lambda$ .

Suponha que  $M$  tenha dimensão 3. Dizemos que a estrutura de contato  $\xi = \ker \lambda$  é *overtwisted* se existe um disco mergulhado  $D \hookrightarrow M$  tal que  $T_p D = \xi_p, \forall p \in \partial D$ . Caso

<sup>1</sup> UFMA, diego.salazar@ufma.br

<sup>2</sup> UFMA, luis.rosso@ufma.br

contrário, dizemos que  $\xi$  é *tight*. Esta definição é devida a Y. Eliashberg. Uma classificação das estruturas de contato em  $S^1 \times S^2$  diz que existe apenas 1 estrutura de contato *tight* a menos de difeomorfismos. Maiores informações encontram-se nos trabalhos de Eliashberg (1989), Eliashberg (1992), Geiges (2008) e Honda (2000).

## 2 OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um resultado de existência implicada de órbitas periódicas de fluxos de Reeb associadas a formas de contato *tight* em  $S^1 \times S^2$  publicado em (SANDOVAL, 2017). A pesquisa feita por Hryniewicz, Momin e Salomão (2015) mostra um resultado muito semelhante para fluxos de Reeb em  $S^3$ . Mais precisamente, provamos que a existência de certas órbitas periódicas força a existência de infinitas outras órbitas periódicas.

Um objetivo específico é motivar um futuro projeto ou grupo de pesquisa na área de dinâmica simplética na Universidade Federal do Maranhão com a apresentação deste resultado.

## 3 RESULTADO

Para entender o resultado e as ferramentas usadas na demonstração do resultado foi construída uma família de formas de contato em  $S^1 \times S^2$  que será apresentada a seguir. Seja

$$[-1, 1] \ni \eta \mapsto (f(\eta), g(\eta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

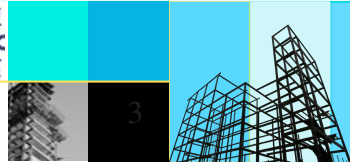
uma curva suave tal que

- $f(-1) > 0, g(-1) = 0, f(1) < 0, g(1) = 0.$
- $g(\eta) > 0, \forall \eta \in (-1, 1).$
- $(fg' - g'f)(\eta) > 0, \forall \eta.$
- $(f'g'' - g'f'')(\eta) > 0, \forall \eta.$

Em  $S^1 \times S^2$ , temos as coordenadas  $(t, \theta, \varphi)$ , em que  $t \in S^1$  e  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0, \pi)$  são as coordenadas esféricas usuais em  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . Nestas coordenadas, a 1-forma

$$\lambda_{f,g} := f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta,$$

determina uma forma de contato em  $S^1 \times S^2$ . A estrutura de contato induzida, nesse caso, é *tight*. É possível verificar que  $P_1 := S^1 \times (0, 0, 1)$  e  $P_2 := S^1 \times (0, 0, -1)$  são órbitas periódicas do fluxo de Reeb associado a  $\lambda_{f,g}$ , segundo (SANDOVAL, 2017).



Consideramos  $f_0(\eta) = -\eta$  e  $g_0(\eta) = 1 - f_0^2(\eta)$ ,  $\eta \in [-1, 1]$ , então a estrutura de contato  $\ker \lambda_{f_0, g_0}$  é denotada por  $\xi_0$ .

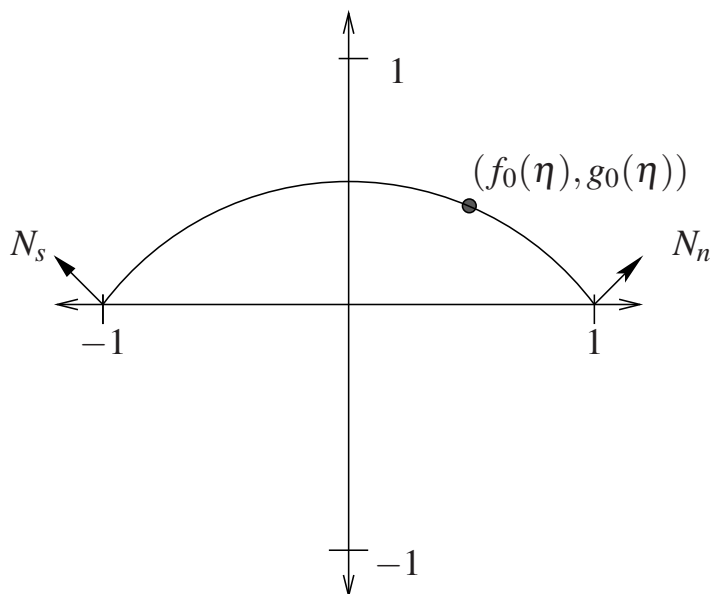


Figura 1 – Traço da curva definida por  $f_0$  e  $g_0$ .  
Fonte: (SANDOVAL, 2017, p. 11)

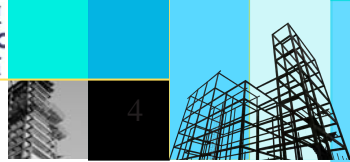
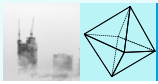
Neste trabalho, apresentamos o seguinte resultado para o caso de  $S^1 \times S^2$  tight, apresentada em (SANDOVAL, 2017).

**Teorema 1** *Seja  $\lambda$  uma forma de contato em  $S^1 \times S^2$  que induz a estrutura de contato tight  $\xi_0$ . Suponha que o link  $L := P_1 \sqcup P_2 \subset S^1 \times S^2$  é formado por um par de órbitas periódicas do seu fluxo de Reeb. Então o fluxo de Reeb de  $\lambda$  admite um número infinito de órbitas periódicas, cujas classes de homotopia no complementar de  $L$  estão prescritas de acordo com o número de rotação de suas componentes.*

A demonstração deste teorema faz uso da homologia de contato no complementar do link  $L$ , um invariante construído a partir do fluxo de Reeb no complementar de um número finito de órbitas periódicas. Mostramos que, no caso do teorema acima, este invariante é não-nulo para infinitas classes de homotopia no complementar de  $L$ . Assim, que este fato implica a existência de infinitas órbitas periódicas.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pretendemos com esta apresentação motivar futuras pesquisas na área de dinâmica simplética na Universidade Federal do Maranhão, área que liga os sistemas dinâmicos com a geometria simplética. Neste caso, evidenciada através da existência de órbitas de



Reeb obtidas a partir de técnicas estudadas da geometria simplética e no estudo das curvas holomorfas. Logo, uma futura pesquisa pode ser proposta se consideramos formas de contato definidas por curvas  $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$  que dão apenas uma volta, cujas estruturas de contato são *Overwisted*. Por exemplo, Taubes (2002) considera a forma de contato

$$\lambda_1 = (3 \cos^2 \varphi - 1)dt + \sqrt{6} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\theta.$$

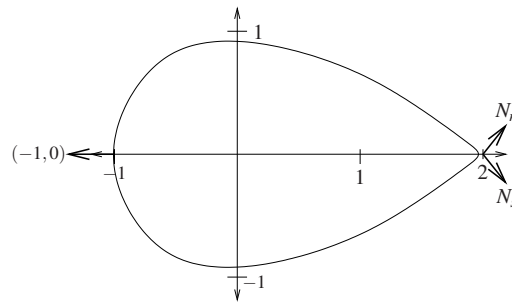


Figura 2 – Traço da curva que define a forma de contato de Taubes  $\lambda_1$   
**Fonte:**(SANDOVAL, 2017, p. 11)

No caso *overwisted*, a não-trivialidade da homologia de contato no complementar de  $L$  não é imediata já que nos modelos integráveis utilizados para seu cálculo pode haver múltiplos toros invariantes contendo órbitas periódicas na mesma classe de homotopia no complementar de  $L$ . Isso acontece pois existem modelos onde há diferentes pontos da curva  $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$  cujos vetores normais têm a mesma direção. Esta dificuldade é solucionada escolhendo-se modelos apropriados de formas de contato. Acredito que os futuros resultados vão depender de um conjunto finito de órbitas com certas propriedades em seus números de rotação, por exemplo, as órbitas de Reeb nas classes de homotopia  $(-1, 0)$  e/ou  $(1, 0)$ , as quais também poderão forçar a existência de outras órbitas de Reeb cujas classes de homotopia no complementar deste conjunto estejam definidas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ELIASHBERG, Y. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. **Invent. Math.**, v. 98, n. 3, p. 623–637, 1989. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01393840>>.

ELIASHBERG, Y. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 42, n. 1-2, p. 165–192, 1992. ISSN 0373-0956. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1992\\_\\_42\\_1-2\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_165_0)>.

GEIGES, H. **An introduction to contact topology**. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. v. 109. xvi+440 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 109). ISBN 978-0-521-86585-2. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511611438>>.

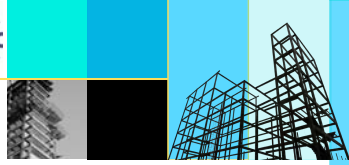
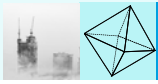


HONDA, K. On the classification of tight contact structures I. **Geom. Topol.**, Mathematical Sciences Publishers (MSP), Berkeley, CA; Geometry & Topology Publications c/o University of Warwick, Mathematics Institute, Coventry, v. 4, p. 309–368, 2000. ISSN 1465-3060; 1364-0380/e.

HRYNIEWICZ, U.; MOMIN, A.; SALOMÃO, P. A Poincaré-Birkhoff theorem for tight Reeb flows on  $S^3$ . **Invent. Math.**, v. 199, n. 2, p. 333–422, 2015. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00222-014-0515-2>>.

SANDOVAL, D. A. **Existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb em  $S^1 \times S^2$** . 84 p. Tese (Doutorado em Matemática) — Universidade de São Paulo, 2017.

TAUBES, C. H. A compendium of pseudoholomorphic beasts in  $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^2)$ . **Geom. Topol.**, v. 6, p. 657–814, 2002. ISSN 1465-3060. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2140/gt.2002.6.657>>.



## COMBINATÓRIA E CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA PARA FUNÇÕES UNIMODAIS DESCONTÍNUAS

Ermerson Araujo<sup>1</sup>

**Resumo:** Nós caracterizamos as classes de conjugação topológica para funções unimodais com descontinuidade no ponto de virada. Para isso, usaremos a combinatória (sequências *kneading*) deste ponto de virada.

**Palavras-chave:** Conjugação topológica; Sequências *kneading* e Funções unimodais.

**Abstract:** We characterize the topological conjugacy classes for unimodal maps with discontinuity at the turning point. For that, we will use the combinatorics (kneading sequences) of this turning point.

**Keywords:** Topological conjugacy; Kneading sequences e Unimodal maps.

### 1 INTRODUÇÃO

A área de Sistemas Dinâmicos busca compreender o comportamento da maioria dos sistemas ao longo do tempo. Uma maneira de fazer isso é considerar um sistema com estrutura mais simples e estudar a combinatória das órbitas de pontos especiais. Assim, pode-se estabelecer algum tipo de equivalência entre uma dinâmica complexa e uma com comportamento de mais fácil compreensão.

A noção usual de equivalência é a *conjugação topológica*: Sejam  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  funções contínuas definidas nos espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . Dizemos que  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$  se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  cumprindo a equação  $h \circ f = g \circ h$ . Em dinâmica unidimensional, além da definição acima, é usual pedir que  $h$  preserve a orientação.

A classificação de sistemas dinâmicos é um tópico com inúmeros trabalhos publicados. Poincaré introduziu o conceito de *número de rotação* para estudar homeomorfismos que preservam a orientação no círculo e, assim, construir conjugações com rotações. Parry (1966) mostrou que uma função transitiva e monótona por partes é equivalente a um modelo linear com inclinação constante. Milnor e Thurston (1988) construíram o que hoje em dia é conhecida como *teoria kneading* para estudar endomorfismos contínuos de um intervalo e, como consequência, recuperar os resultados de Parry (1966). O trabalho de Milnor e Thurston foi estendido para vários outros contextos: Alsedà e Misiurewicz (2015) mostraram que funções contínuas por partes e monótonas por partes em intervalos são equivalentes a um modelo linear. Bobok (2012) recupera os resultados de Milnor e

<sup>1</sup> UFMA, ermerson.araujo@ufma.br



Thurston para funções com enumeráveis ramos de monotonicidade. Mendes e Ramos (2004) constroem uma teoria *kneading* para aplicações triangulares. Araujo (2021) estrutura as classes de conjugação topológica para *toy models* da família de Hénon. Araujo (2022) estende os argumentos de Araujo (2021) para sistemas dinâmicos não-autônomos constituídos de funções unimodais.

Este artigo tem por objetivo caracterizar as classes de conjugação topológica de funções unimodais com descontinuidade no ponto de virada. Mais especificamente, provaremos o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções unimodais descontínuas no ponto de virada. Suponha que nenhuma delas tenha intervalos errantes, intervalos de pontos periódicos e nem pontos periódicos atratores. Então  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$  se, e somente se, ambas possuem as mesmas sequências *kneading*.*

Observamos que este resultado, de fato, é bem conhecido e é consequência de trabalhos anteriores. Veja, por exemplo, Parry (1966), Melo e Strien (1993), Alesdà e Misiurewicz (2015), e Araujo e Espinosa (2022). Por outro lado, apresentaremos uma demonstração seguindo as linhas de Araujo (2018, 2021).

## 2 FUNÇÕES UNIMODAIS DESCONTÍNUAS

Nesta seção estudaremos funções unimodais com uma descontinuidade no ponto de virada. Tais funções são definidas como segue: sejam  $I = [a, b]$  um intervalo compacto e  $c \in (a, b)$ . Considere  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow I$  uma função de modo que  $f \upharpoonright_{[a,c]}$  é crescente,  $f \upharpoonright_{(c,b]}$  é decrescente e  $f(a) = f(b) = a$ . Veja a Figura 1.

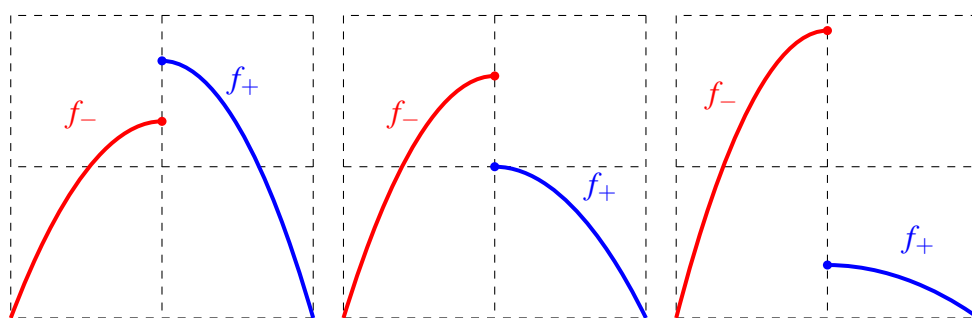


Figura 1 – Funções unimodais descontínuas no ponto de virada.

A fim de estabelecer a combinatória necessária para a classificação das classes de conjugação topológica para esta família de funções, nós vamos proceder com argumentos análogos a Araujo (2018, 2021).

Estendemos  $f$  para  $c$  adicionando dois pontos  $c^-, c^+$  e definindo  $f(c^-) := \lim_{x \nearrow c} f(x)$  e  $f(c^+) := \lim_{x \searrow c} f(x)$ . Os pontos  $c^-, c^+$  são chamados *pontos de virada* de  $f$ . Sejam  $I^- =$



$[a, c^-]$  e  $I^+ = [c^+, b]$ , defina  $\widehat{I} := I^- \sqcup I^+$  sua união e considere a topologia da união disjunta sobre este espaço. Assim, a função  $f$  será dada agora considerando sua ação em  $I^\pm$ , ou seja,  $f_- := f|_{I^-}$  e  $f_+ := f|_{I^+}$ , onde faremos a seguinte convenção: dado  $j \in \{-, +\}$ , se  $x \in I^j$  e  $f_j(x) = c$  então  $f_j(x) = c^j$ . Isso é essencial para a combinatória estar bem-definida.

A órbita de um ponto  $x \in \widehat{I}$ , denotada por  $\mathcal{O}_f(x)$ , é dada da seguinte forma: para todo  $x \in \widehat{I}$  existe uma *única* sequência  $j(x) = (j_1 j_2 \cdots j_m \cdots) \in \{-, +\}^{\mathbb{N}}$  de modo que  $f^{m+1}(x) = f_{j_{m+1}}(x_m)$  para cada  $m \geq 0$ , onde  $x_m = f_{j_m} \circ \cdots \circ f_{j_2} \circ f_{j_1}(x)$ . Um ponto  $p \in \widehat{I}$  é chamado *periódico* se existe  $m \geq 1$  tal que  $f^m(p) = p$ . Agora daremos a definição formal das hipóteses que aparecem no teorema principal deste trabalho.

**PONTOS PERIÓDICOS ATRADORES:** Dado um ponto periódico  $p \in \widehat{I}$  de  $f$ , o conjunto  $\mathcal{B}(p) := \{x \in \widehat{I} : f^k(x) \rightarrow \mathcal{O}_f(p) \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$  é chamado *bacia* de  $\mathcal{O}_f(p)$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto periódico atrator* se  $\mathcal{B}(p)$  contém um aberto.

**INTERVALO PERIÓDICO:** Um intervalo  $J \subset \widehat{I}$  é dito *periódico* se todo  $x \in J$  é um ponto periódico de  $f$ .

Observe que os pontos de um intervalo de pontos periódicos não precisam ter o mesmo período, já que  $f$  não é contínua em geral.

**INTERVALO ERRANTE:** Um intervalo  $J \subset \widehat{I}$  é chamado *errante* se

- $f^n(J) \cap f^m(J) = \emptyset$  para todo  $n \neq m$ ;
- $(f^n(J))_{n \geq 0}$  não converge para uma órbita periódica.

## 2.1 SEQUÊNCIAS KNEADING

Vamos agora definir a combinatória que será utilizada no texto. Considere o espaço simbólico  $\Sigma_f = \{L, c^-, c^+, R\}^{\{0,1,2,\dots\}}$ , onde  $L = [a, c^-]$  e  $R = (c^+, b]$ . O *endereço* de um ponto  $x \in \widehat{I}$  é dado por  $i_f(x) = L$  se  $x \in L$ ,  $i_f(x) = R$  se  $x \in R$  e  $i_f(x) = c^\pm$  se  $x = c^\pm$ . O *itinerário* de  $x \in \widehat{I}$  é a sequência  $\mathcal{I}_f(x) \in \Sigma_f$  definida por

$$\mathcal{I}_f(x) = (i_f(x), i_f(f(x)), \dots, i_f(f^n(x)), \dots).$$

Por fim, as *sequências kneading* de  $f$  são as sequências

$$\mathcal{I}_f(c^\pm) = (i_f(c^\pm), i_f(f(c^\pm)), \dots, i_f(f^n(c^\pm)), \dots).$$

A proposição abaixo mostra que conjugações topológicas preservam as sequências *kneading*.

**Proposição 2.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções unimodais descontínuas nos pontos de virada  $c_f^\pm$  e  $c_g^\pm$ , respectivamente. Se  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$ , então  $\mathcal{I}_f(c_f^-) = \mathcal{I}_g(c_g^-)$  e  $\mathcal{I}_f(c_f^+) = \mathcal{I}_g(c_g^+)$ .*

*Demonstração.* Seja  $h : \widehat{I}_f \rightarrow \widehat{I}_g$  a conjugação topológica entre  $f$  e  $g$ . Como  $h$  é um homeomorfismo que preserva a orientação, segue que  $h(c_f^\pm) = c_g^\pm$ . Assim, para todo  $k \geq 1$  temos que  $h(f^k(c_f^\pm)) = g^k(c_g^\pm)$  e, conseqüentemente,  $i_f(f^k(c_f^\pm)) = i_g(g^k(c_g^\pm))$ . Portanto,  $\mathcal{I}_f(c_f^\pm) = \mathcal{I}_g(c_g^\pm)$ .  $\square$

## 2.2 CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA

Nesta seção mostraremos que as sequências *kneading*, sob certas hipóteses, constituem um invariante total para as classes de conjugação topológica de funções unimodais descontínuas.

Dada  $f$  uma função unimodal com descontinuidade no ponto de virada, consideramos o conjunto *crítico* de  $f$  definido por

$$\mathcal{C}(f) = \left\{ x \in \widehat{I}_f : \text{existe } k \geq 0 \text{ tal que } f^k(x) \in \{c_f^-, c_f^+\} \right\}.$$

O teorema abaixo mostra que a igualdade entre sequências *kneading* de duas funções unimodais descontínuas  $f$  e  $g$  é suficiente para garantir que tais funções possuem conjuntos críticos com mesma cardinalidade. Mais ainda, tais conjuntos possuem a mesma ordenação no intervalo. Nessas condições dizemos que  $f$  é *combinatorialmente equivalente* a  $g$ .

**Teorema 3.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções unimodais descontínuas nos pontos de virada  $c_f^\pm$  e  $c_g^\pm$ , respectivamente. Suponha que  $f$  e  $g$  possuam as mesmas sequências *kneading*. Então existe uma bijeção crescente  $h : \mathcal{C}(f) \rightarrow \mathcal{C}(g)$  tal que  $h \circ f = g \circ h$  em  $\mathcal{C}(f) \setminus \{c_f^-, c_f^+\}$ .*

A demonstração desse teorema segue de maneira análoga ao Teorema 2.3 de Araujo (2021). Assim, daremos apenas um esboço e deixamos os detalhes para o leitor interessado.

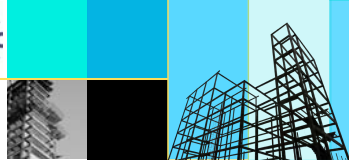
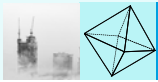
*Esboço da demonstração.* Para cada  $n \geq 1$  seja

$$\mathcal{C}_n(f) = \left\{ x \in \widehat{I}_f : f^k(x) \in \{c_f^-, c_f^+\} \text{ para algum } 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Note que  $\mathcal{C}(f) = \bigcup_n \mathcal{C}_n(f)$  e  $\mathcal{C}_n(f) \subset \mathcal{C}_{n+1}(f)$ . Analogamente para  $g$ . Da igualdade entre as sequências *kneading* segue que para cada  $n \geq 1$  existe  $h_n : \mathcal{C}_n(f) \rightarrow \mathcal{C}_n(g)$  bijeção crescente cumprindo

- (i)  $h_n \circ f = g \circ h_n$  em  $\mathcal{C}_n(f) \setminus \{c_f^-, c_f^+\}$ ;
- (ii)  $h_n \upharpoonright_{\mathcal{C}_{n-1}(f)} = h_{n-1}$ .

Assim, considere  $h : \mathcal{C}(f) \rightarrow \mathcal{C}(g)$  definida como  $h(x) = h_n(x)$ , onde  $n$  é tal que  $x \in \mathcal{C}_n(f)$ . Agora é fácil ver que  $h$  é uma bijeção crescente e vale  $h \circ f = g \circ h$  em  $\mathcal{C}(f) \setminus \{c_f^-, c_f^+\}$ .  $\square$



Apresentaremos agora dois lemas que serão úteis na prova do teorema principal. O primeiro é um resultado bem simples e conhecido. De qualquer forma, daremos uma demonstração sintetizada. Para uma prova detalhada veja o Lema 3.13 de Oliveira (2004).

**Lema 4.** *Sejam  $[c, d]$  um intervalo compacto com interior não vazio e  $\xi : [c, d] \rightarrow [c, d]$  uma função contínua estritamente monótona. Então  $[c, d]$  contém um intervalo de pontos periódicos de  $\xi$  ou um ponto periódico atrator.*

*Demonstração.* A menos de substituir  $\xi$  por  $\xi^2$  podemos supor que  $\xi$  é crescente. Pelo Teorema do Valor Intermediário,  $\xi$  possui pelo menos um ponto fixo. Em particular, o conjunto dos pontos periódicos de  $\xi$  é não vazio. Se não existem intervalos de pontos periódicos de  $\xi$ , então cada ponto periódico é isolado em  $[c, d]$ . Dado  $(p, q) \subset [c, d]$  uma componente conexa do complementar dos pontos periódicos, a monotonicidade de  $\xi$  implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(x) = p$  ou  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k(x) = q$  para todo  $x \in (p, q)$ . O resultado segue agora considerando os casos em que  $d$  (e consequentemente  $c$ ) é ou não um ponto fixo de  $\xi$ .  $\square$

**Lema 5.** *Seja  $f$  uma função unimodal com descontinuidade no ponto de virada. Suponha que  $f$  não tenha intervalos errantes, intervalos de pontos periódicos e nem pontos periódicos atratores. Então o conjunto crítico de  $f$  é denso em  $\hat{I}$ .*

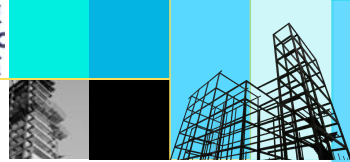
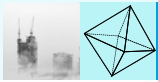
*Demonstração.* A prova é uma consequência do Lema 4 e segue as mesmas linhas do Teorema 2.1 de Araujo (2018). Veja também Melo e Strien (1993), Capítulo II, Seção 3 e Lema 3.1.  $\square$

Podemos agora apresentar a demonstração do Teorema 1, ou seja, mostraremos como passar de uma equivalência combinatória para uma conjugação topológica.

*Demonstração do Teorema 1.* Segue da Proposição 2 que só precisamos mostrar a implicação reversa. Pela igualdade entre as sequências *kneading*, o Teorema 3 implica a existência de uma bijeção crescente  $h : \mathcal{C}(f) \rightarrow \mathcal{C}(g)$  cumprindo  $h \circ f = g \circ h$  em  $\mathcal{C}(f) \setminus \{c_f^-, c_f^+\}$ . A monotonicidade de  $h$  e o Lema 5 garantem que podemos estender essa bijeção continuamente para um homeomorfismo que preserva a orientação  $h : \hat{I}_f \rightarrow \hat{I}_g$ . Resta ver que  $h \circ f = g \circ h$  em  $\hat{I}_f$ , mas isso também é uma consequência do Lema 5. Com efeito, dado  $x \in \hat{I}_f$  existe uma sequência  $(x_n)_n$  em  $\mathcal{C}(f) \setminus \{c_f^-, c_f^+\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Daí,

$$(h \circ f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ h)(x_n) = (g \circ h)(x).$$

Portanto,  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas e a prova do teorema está finalizada.  $\square$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSEDÀ, L.; MISIUREWICZ, M. Semiconjugacy to a map of a constant slope. **Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B**, v. 20, n. 10, p. 3403–3413, 2015.

ARAUJO, E. **Kneading sequences for a two-dimensional family**. 62 p. Tese (Doutorado em Matemática) — IMPA, Rio de Janeiro – Brasil, 2018.

ARAUJO, E. Kneading sequences for toy models of hénon maps. **Ergodic Theory Dynamical Systems**, v. 41, n. 12, p. 3521–3540, 2021.

ARAUJO, E. Topological equiconjugacy for unimodal nonautonomous discrete dynamical systems with limit property. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, v. 21, n. 1, p. 1–14, 2022.

ARAUJO, E.; ESPINOSA, A. Z. **Kneading theory for iteration of monotonous functions on the real line**. arXiv, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2211.08528>>.

BOBOK, J. Semiconjugacy to a map of a constant slope. **Studia Mathematica**, v. 208, n. 3, p. 213—228, 2012.

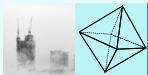
MELO, W. de; STRIEN, S. van. **One-dimensional dynamics**. 1. ed. Berlin: Springer, 1993. 594 p.

MENDES, D. A.; RAMOS, J. S. Kneading theory for triangular maps. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 10, n. 4, p. 421—450, 2004.

MILNOR, J.; THURSTON, W. On iterated maps of the interval. **Lecture Notes in Mathematics**, v. 1342, p. 465—563, 1988.

OLIVEIRA, E. **Sequências kneading e classificação de aplicações monótonas por partes**. 55 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — UFRGS, Porto Alegre – Brasil, 2004.

PARRY, W. Symbolic dynamics and transformations of the unit interval. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 122, n. 2, p. 368—378, 1966.



## SOBRE A ISOCRONICIDADE DE UM SISTEMA HAMILTONIANO QUADRÁTICO NO PLANO

Gerard John Alva Morales<sup>1</sup>

**Resumo:** Estudaremos uma equação diferencial da classe  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , onde  $f(x)$  é um polinômio quadrático, para o qual a isocronicidade não ocorre.

**Palavras-chave:** Sistema Hamiltoniano, Centro, Isocronicidade.

**Abstract:** We will study a differential equation of the class  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , where  $f(x)$  is a quadratic polynomial, for which the isochronicity does not occur.

**Keywords:** Hamiltonian System, Center, Isochronicity.

### 1 Introdução

A isocronicidade é um assunto relevante e bastante estudado em varios contextos, em particular, em relação ao centro de sistemas hamiltonianos no plano [1].

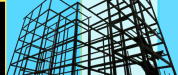
Neste artigo, observaremos em particular um sistema hamiltoniano quadrático  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , o qual foi estudado em [2], onde os autores mostram que a função período  $T(E)$  das órbitas periódicas correspondentes, dependendo da energia hamiltoniana  $E = y^2/2 + F(x)$  com  $F(x) = \int^x f(t)dt$ , satisfaz uma equação diferencial da forma

$$\frac{d}{dE} \left( M \frac{dy}{dE} \right) + \lambda y = 0, \quad E_1 < E < E_2 \quad (1)$$

onde  $M$  depende da energia e  $\lambda$  é uma constante.

Nosso estudo inclui a solução direta da equação diferencial (1), a qual é dada em série de potências, sendo assim nossa abordagem diferente a qual foi feita em [2]; proporcionando o resultado pertinente.

<sup>1</sup>DEMAT-UFMA, gerard.jam@ufma.br



## 2 Desenvolvimento

A equação diferencial  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , escrita no plano  $(x, y)$  como

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases} \quad (2)$$

é um sistema hamiltoniano com hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x), \quad F(x) = \int^x f(t) dt$$

cujas soluções são dadas pelas curvas de nível  $H = C$ .

A situação  $f(x) = x$ , é conhecida de corresponder o período constante  $T(E)$  para suas soluções periódicas de (2) [1].

Veremos a continuação a situação mais complicada em que

$$F(x) = -\frac{x^3 - 3x}{2}$$

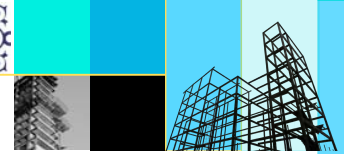
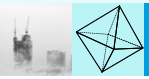
e  $E = 2H$  é a energia do sistema (2) como estudado em [2]; para o qual são introduzidas as funções auxiliares (integrais abelianas)

$$I_0(E) = \int_{\gamma} y dx, \quad I_1(E) = \int_{\gamma} xy dx \quad (3)$$

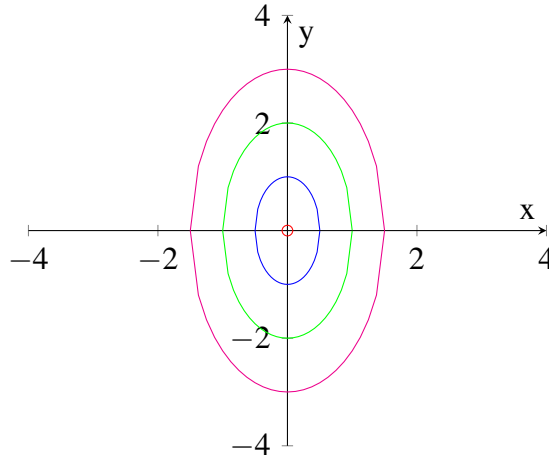
onde  $\gamma = \gamma(E)$  é uma trajetória periódica de (2), as quais estão associadas com a equação algébrica

$$y^2 = x^3 - 3x + E$$

por exemplo veja na figura a seguir um centro em  $(0, 0)$  para  $\ddot{x} + x = 0$



### Centro e soluções periódicas



Notemos que as derivadas das funções  $I_0(E)$  e  $I_1(E)$  satisfazem

$$I'_0 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dx}{y},$$

$$I'_1 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{x}{y} dx$$

e o período  $T(E)$  associado a (2) satisfaz a igualdade

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E + x^3 - 3x}} = 2I'_0$$

Tem sido mostrado em [2] que o período  $T(E)$  associado a (2) satisfaz a equação diferencial ordinária

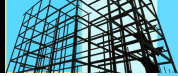
$$(\Delta y')' + \lambda y = 0 \tag{4}$$

onde  $\lambda = \frac{5}{6}$  e  $\Delta = 6(E^2 - 4)$ . Para isso, o método utilizado, considera as relações das funções  $I_0(E)$  e  $I_1(E)$ .

A continuação uma breve explicação de como funciona este método. Usando integração por partes e as derivadas  $I'_0, I'_1$ ; é possível obter as equações

$$\begin{cases} \frac{5}{6} I_0 = EI'_0 - 2I'_1 \\ \frac{7}{6} I_1 = -2I'_0 + EI'_1 \end{cases} \tag{5}$$





onde o determinante  $E^2 - 4 < 0$  é crucial para o análise das derivadas superiores de  $I_0$  e  $I_1$ .

Derivando as equações anteriores (5) em relação a  $E$ , tem-se

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}I_0' &= EI_0'' - 2I_1'' \\ \frac{1}{6}I_1' &= -2I_0'' + EI_1'' \end{cases} \quad (6)$$

onde é preservado o mesmo determinante  $E^2 - 4 < 0$ , para as derivadas de segunda ordem de  $I_0$  e  $I_1$ .

Derivando as equações anteriores (6) em relação a  $E$ , resulta

$$\begin{cases} -\frac{7}{6}I_0'' &= EI_0''' - 2I_1''' \\ -\frac{5}{6}I_1'' &= -2I_0''' + EI_1''' \end{cases} \quad (7)$$

onde é preservado o mesmo determinante  $E^2 - 4 < 0$ , para as derivadas de terceira ordem de  $I_0$  e  $I_1$ .

Nas equações (7), podemos eliminar  $I_1'''$  e logo obter

$$-\frac{7}{6}EI_0''' - \frac{10}{6}I_1'' = (E^2 - 4)I_0''' \quad (8)$$

A expressão de  $I_1''$ , dada na equação (6), pode ser introduzida na equação (8), para obter

$$6(E^2 - 4)I_0''' + 12EI_0'' + \frac{5}{6}I_0' = 0 \quad (9)$$

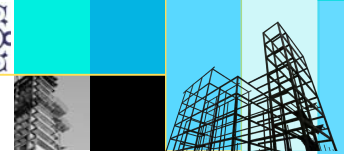
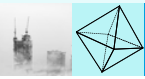
Consequentemente, a equação (4) é obtida uma vez que  $T = 2I_0'$ .

### 3 Resultados

Tem-se que  $T(E)$ , satisfaz a equação diferencial

$$(\Delta y)' + \lambda y = 0$$

onde  $\lambda = \frac{5}{6}$  e  $\Delta = 6(E^2 - 4)$ . Esta equação diferencial pertence à família de Legendre [3]:



(i) Para os pontos regulares  $E \in (-2, 2)$ , tem-se o Wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \frac{C}{\Delta} \implies \{y_1, y_2\} - \ell.i. \quad (\text{Abel})$$

(ii) Para os pontos singulares regulares  $E = \pm 2$ , tem-se os limites

$$\lim_{E \rightarrow \mp 2} (E \pm 2) \frac{\Delta'}{\Delta} = 1, \quad \lim_{E \rightarrow \mp 2} (E \pm 2)^2 \frac{\lambda}{\Delta} = 0, \quad (\text{Fuch})$$

Assim, obtemos o seguinte resultado

**Lema 1** No caso  $-2 < E < 2$  e  $M = E^2 - 4$ , obtemos as soluções para (1), nas vizinhanças de  $E = -2$  e  $E = 0$  respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k (6\ell(\ell-1) + \lambda)}{(24)^k (k!)^2} (x+2)^k \\ y(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k (A_\ell + \lambda)}{(24)^k (2k)!} (x)^{2k} \\ y(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k (B_\ell + \lambda)}{(24)^k (2k+1)!} (x)^{2k+1} \end{aligned}$$

onde  $A_n = 12(n-1)(2n-1)$ ,  $B_n = 12n(2n-1)$  e as séries tem raio de convergência de Hadamard  $R = 4$ .

**DEMONSTRAÇÃO 1** Para o ponto  $E = -2$ , podemos procurar soluções na forma

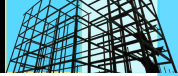
$$y(E) = (E+2)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k (E+2)^k,$$

com  $r$  um número real; nesse caso, substituindo na equação (9), obtemos

$$-24c_0 r^2 (E+2)^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [F_k(r) + G_k(r)] (E+2)^{k+r} = 0$$

com coeficientes

$$\begin{aligned} F_k(r) &= -24c_{k+1} (k+r+1)^2 \\ G_k(r) &= (6(k+r)(k+r-1) + 12(k+r) + \lambda) c_k \end{aligned}$$



De onde, obtemos as igualdades

$$c_0 r^2 = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{[6(k+r)(k+r-1) + 12(k+r) + \lambda]}{24(k+r+1)^2} c_k$$

Para  $c_0 = 0$ , tem-se  $c_k = 0$  e logo a solução  $y(E) = 0$  (mas o período é positivo).

Para  $r = 0$  e  $c_0 \neq 0$ , tem-se a equação recursiva

$$c_{k+1} = \frac{[6k(k-1) + 12k + \lambda]}{24(k+1)^2} c_k$$

para o qual conseguimos a relação

$$c_k = \frac{\prod_{\ell=1}^k [A_\ell + \lambda]}{(24)^k (k!)^2} c_0, \quad A_\ell = 6\ell(\ell-1), \quad k \geq 1$$

de onde, obtemos uma solução em série de potências

$$y(E) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k [A_\ell + \lambda]}{(24)^k (k!)^2} (E+2)^k$$

cuja convergência é dada no limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left[ 6 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{\lambda}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

Para o ponto  $E = 0$ , podemos procurar soluções na forma

$$y(E) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k E^k$$

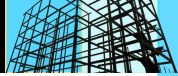
nesse caso, substituindo na equação (9), obtemos

$$[\lambda c_0 - 48c_2] + [(12 + \lambda)c_1 - 6(24)c_3]E + \sum_{k=2}^{\infty} [F_k + G_k]E^k = 0$$

com coeficientes

$$F_k = -24c_{k+2}(k+2)(k+1)$$

$$G_k = (6k(k-1) + (12k + \lambda))c_k$$



De onde, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\lambda}{48} c_0 \\ c_3 &= \frac{(12 + \lambda)}{6(24)} c_1 \\ c_{k+2} &= \frac{[6k(k-1) + (12k + \lambda)]}{24(k+2)(k+1)} c_k, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

com as quais conseguimos os coeficientes

$$c_{2k} = \frac{\prod_{\ell=1}^k [P_\ell + \lambda]}{(24)^k (2k)!} c_0, \quad c_{2k+1} = \frac{\prod_{\ell=1}^k [Q_\ell + \lambda]}{(24)^k (2k+1)!} c_1, \quad k \geq 1$$

onde  $P_\ell = 12(\ell-1)(2\ell-1)$  e  $Q_\ell = 12\ell(2\ell-1)$ .

Assim, obtemos as soluções linearmente independentes

$$\begin{aligned} y_1(E) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k [P_\ell + \lambda]}{(24)^k (2k)!} E^{2k}, \\ y_2(E) &= E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{\ell=1}^k [Q_\ell + \lambda]}{(24)^k (2k+1)!} E^{2k+1} \end{aligned}$$

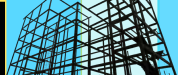
que claramente satisfazem as igualdades

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= 0 \\ y_1'(0) &= 0, & y_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

A convergência destas séries de potências é dada pelos limites

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1} + \lambda}{24(2(n+1))(2(n+1)-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left[ \frac{6n}{n+1} + \frac{\lambda}{2(n+1)(2(n+1)-1)} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1} + \lambda}{24(2n+3)2(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left[ \frac{6(2n+1)}{(2n+3)} + \frac{\lambda}{(2n+3)2(n+1)} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



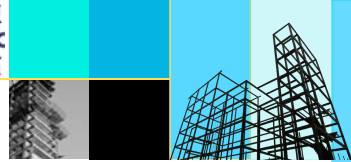
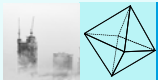
## 4 Considerações finais

Note que o estudo da equação algébrica  $y^2 = x^3 - 3x + E$  definida pela energia  $F(x) = -\frac{x^3-3x}{2}$ , pode ser vista como a redução da expressão geral  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ,  $A \neq 0$ , pela transformação linear do tipo  $x - \frac{B}{3A}$ .

Deve ser interessante observar a influencia que estes coeficientes  $A, B, C$  e  $D$  exercem no estudo da função período das orbitas periodicas para (2).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Cima, F. Mañosas and J. Villadelprat, **Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems**, Universitat Autònoma de Barcelona (1998).
- [2] S.N. Chow and J. A. Sanders, **On the number of critical points of the period**, Journal of Differential Equations (1986).
- [3] Willian E. Boyce and Richard C. DiPrima; **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**; John Wiley (2001).



## SISTEMAS DINÂMICOS HIPERBÓLICOS INVERTÍVEIS E NÃO INVERTÍVEIS

José Santana C Costa<sup>1</sup>

**Resumo:** Neste trabalho faremos uma breve introdução sobre sistemas dinâmicos hiperbólicos através da história e mostraremos algumas semelhanças e diferenças entre os casos invertível e não invertível.

**Palavras-chave:** endomorfismos parcialmente hiperbólicos; endomorfismos Anosov; número de órbitas; direções invariantes.

**Abstract:** In this work we will briefly introduce hyperbolic dynamical systems throughout history and show some similarities and differences between the invertible and non-invertible cases.

**Keywords:** partially hyperbolic endomorphisms; Anosov endomorphisms; number of orbits; invariant directions.

### 1 INTRODUÇÃO

Sistemas Dinâmicos, que é uma subárea da matemática, teve suas origens em problemas vindos do mundo físico, um dos mais conhecidos é o problema da *Estabilidade do Sistema Solar*, chamado também de problema dos três corpos, que foi descrito no século XVII através das equações de Isaac Newton (1642-1727). Resolver este problema era o mesmo que resolver uma equação diferencial ordinária, que hoje pode ser escrita da seguinte forma:

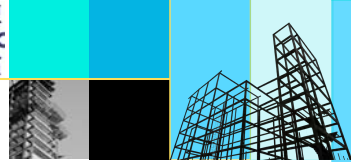
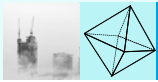
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-c^2\vec{x}}{||\vec{x}||^3},$$

em que  $\vec{x}$  representa as órbitas dos planetas em função do tempo  $t$ . Isaac Newton e Robert Hook (1635-1703) resolveram casos bastante particulares, ficando o problema em aberto por um longo tempo.

Em 1889 o rei da Suécia e Noruega, Oscar II, decide promover um evento, por ocasião do seu aniversário, com o objetivo de dar um prêmio para quem resolvesse alguns determinados problemas na matemática. O responsável pelo evento foi o matemático Mittag-Leffler (1846-1927), na época o editor da revista *Acta Mathematica*. Dentre os problemas escolhidos pelo matemático Weierstrass (1815-1897) estava o problema dos três corpos. O ganhador desse prêmio foi um professor de matemática de Paris, Jules Henri Poincaré (1854-1912), com uma ideia bastante esperta. Poincaré não resolveu completamente o problema dos três corpos, mas desenvolveu técnicas e descobriu fenômenos que

---

<sup>1</sup> UFMA, jsc.costa@ufma.br



revolucionou a matemática da época. Além de iniciar o estudo qualitativo das equações diferenciais, Poincaré descobriu um fenômeno que ele batizou de *sensibilidade as condições iniciais*, que depois foi chamado também de *efeito borboleta* pelo meteorologista Edward Lorenz (1917-2008) e foi essa a principal dificuldade que ele encontrou quando tentou resolver o problema, na verdade ele percebeu que era impossível dar uma solução completa. Esse fenômeno foi um dos embriões da teoria de sistemas dinâmicos hiperbólicos e o que provocava o fenômeno foi chamada de *ponto homoclínico*, algo que é simples de definir, mas gera um comportamento bastante complicado, nas palavras do próprio Poincaré: “Uma pessoa ficaria chocada pela complexidade dessa figura, que eu nem tentarei desenhar. Nada pode dar uma ideia mais clara sobre a complexidade do problema de três corpos e em geral de todos os problemas da dinâmica...”. (MILNOR, 2001)

Essa área de Sistemas Dinâmicos fica quase sem atividade desde então, apenas no século XX o fenômeno descoberto por Poincaré volta a ser estudado com mais intensidade pelo matemático americano George David Birkhoff (1884-1944), que desenvolveu trabalhos acerca de ponto homoclínico na década de 1920. E em 1960, Steve Smale, que na época estava no Rio de Janeiro terminando o seu pós doutorado, consegue entender esse fenômeno, através de um exemplo topológico. Este exemplo ficou conhecido como *ferradura de Smale*. Ele provou que se um sistema dinâmico tem ponto homoclínico então ele também tem uma ferradura. Desde então os sistemas hiperbólicos foram largamente estudados em todo o mundo, principalmente os conhecidos como *Sistemas de Anosov*. Mas tarde foram introduzidas formas mais fracas de hiperbolicidade, por exemplo: os parcialmente hiperbólicos, volume hiperbólico, com decomposição dominada, etc.

Na década de 1970 foram definidos Sistemas Anosov não invertíveis. Os trabalhos pioneiros para o estudo desses sistemas foram (MAÑÉ; PUGH, 1975) e (PRZYTYCKI, 1976). Motivados a investigar a estabilidade estrutural para Endomorfismos Anosov, eles mostraram que existem grandes diferenças entre os hiperbólicos invertíveis e não invertíveis. Recentemente foram definidos Endomorfismo Parcialmente Hiperbólico, por exemplo temos os trabalhos (HE; SHI; WANG, 2019) e (COSTA; MICENA, 2022).

## 2 DINÂMICA HIPERBÓLICA INVERTÍVEL

Assim como em todo sistema dinâmico, o estudo dos sistemas dinâmicos hiperbólicos tem por principal objetivo descrever o comportamento (assintótico) da grande maioria das órbitas, este particularmente detém características especiais que são os comportamentos de contração e expansão. Historicamente este conceito despontou como uma característica importante de muitos sistemas. Hoje são conhecidas muitas de suas propriedades sendo bem compreendidas, formando um capítulo muito especial em toda a teoria.

Considere  $M$  é uma variedade riemanniana compacta, conexa e sem bordo.



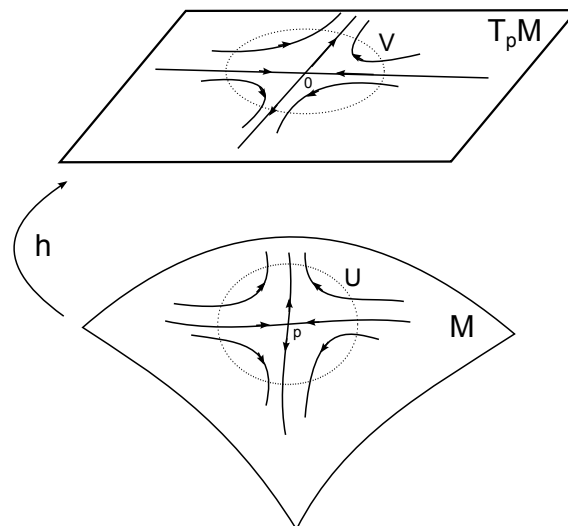
**Definição 2.1.** Seja o difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  e  $p$  um ponto fixo de  $f$ , isto é,  $f(p) = p$ . Dizemos que  $p$  é *hiperbólico* se a matriz da diferencial  $Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$  não tem autovalores com módulo igual a 1. Um ponto periódico de período  $k$  (isto é,  $f^k(p) = p$ ) é chamado de *periódico hiperbólico* se é um ponto fixo hiperbólico para  $f^k$ .

O espaço tangente de um ponto periódico hiperbólico decompõe-se em subespaços que contraem e expandem uniformemente pela ação da diferencial. Isto é uma aproximação linear do que acontece na variedade como mostra o teorema abaixo.

**Teorema 2.1** (Teorema de Hartman). *Seja o difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  e  $p$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ , então  $f$  e  $Df_p$  são localmente conjugadas. Mas precisamente, existe um vizinhança  $U_p$  de  $p$  em  $M$  e uma vizinhança  $V$  de  $0$  em  $T_pM$  e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

Figura 1 – Esquema do Teorema de Hartman



Fonte: Autoria própria.

Grosseiramente falando, um conjunto é hiperbólico quando todos os seus pontos se comportam como pontos fixos hiperbólicos, mais precisamente:

**Definição 2.2.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Um conjunto compacto invariante  $\Lambda \subset M$  é *hiperbólico* se para todo  $x \in \Lambda$  existem subespaços  $E^s(x) \subset T_xM$  e  $E^u(x) \subset T_xM$  satisfazendo:

- (1)  $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$
- (2)  $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$  e  $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$
- (3) Existem constantes  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tal que:

- (a)  $\|DF_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\| \forall v \in E^s(x)$  e  $n \geq 0$ .  
 (b)  $\|DF_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\| \forall v \in E^u(x)$  e  $n \geq 0$ .

*Exemplo 2.1.* Seja  $x$  um ponto fixo hiperbólico de  $f : M \rightarrow M$ , o conjunto  $\{x\}$  é hiperbólico.

*Exemplo 2.2 (Automorfismo do Toro).* Podemos parametrizar o círculo unitário  $S^1$  como sendo:  $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  onde  $0 \leq t \leq 1$ . Se identificarmos o ponto 0 com o ponto 1 podemos ver o círculo unitário  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  como sendo o intervalo  $[0, 1]$ , ou melhor identifica-lo com o conjunto quociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Podemos ver o toro como sendo  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 = [0, 1] \times [0, 1]$ . Portanto podemos olhar o toro  $\mathbb{T}^2$  como sendo o quadrado de lado 1, com os lados opostos identificados. Vamos construir uma transformação  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Primeiro olharemos para a transformação linear  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$L(x, y) = (2x + y, x + y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vamos restringir a  $T^2$ , definimos então  $F_L : T^2 \rightarrow T^2$  por  $F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \pmod{1}$ . Como essa matriz é simétrica possui uma base de autovetores ortogonais  $v_1, v_2$  com autovalores<sup>2</sup>  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$  e  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ . Então  $T^2$  é um conjunto hiperbólico, pois em todo ponto existe uma decomposição  $E^c \oplus E^u$  onde  $E^u$  é o subespaço gerado pelo vetor  $v_2$  com taxa de expansão  $\lambda_2$  e  $E^c$  é o subespaço gerado pelo vetor  $v_1$  com taxa de contração  $\lambda_1$ .

Existem algumas outras formas mais fracas de hiperbolicidade, como os sistemas parcialmente hiperbólico, volume hiperbólico, com decomposição dominada dentre outros.

### 3 DINÂMICA HIPERBÓLICA NÃO INVERTÍVEL

Na década de 1970, Michael Shub prova, em sua tese, alguns resultados sobre estabilidade estrutural para Difeomorfismo Anosov e lá ele sugere que com as mesmas técnicas pode-se provar que o mesmo é válido para Endomorfismos Anosov (SHUB, 1974). Motivados por esse problema, no mesmo período surgiram dois trabalhos, (MAÑÉ; PUGH, 1975) e (PRZYTICKI, 1976), provando, de forma independente, que a afirmação de Shub não era verdadeira, mostrando que existem diferenças significativas entre os sistemas hiperbólicos invertíveis e não invertíveis. Atualmente o estudo dessas dinâmicas está bastante ativo. Para mais detalhes sobre esse tema veja (QIAN; XIE; ZHU, 2009) e (AOKI; HIRAIDE, 1994).

<sup>2</sup> Encontrados resolvendo a equação  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

### 3.1 ENDOMORFISMOS ANOSOV

Antes de definirmos Endomorfismos Anosov, queremos observar um fato topológico interessante sobre os difeomorfismos locais: os pontos tem exatamente o mesmo número de pré-imagens.

**Proposição 3.1.** *Se  $X$  é um espaço topológico compacto e conexo e  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo local então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\#\{f^{-1}(x)\} = k$ , para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.* De fato, como  $f$  é um homeomorfismo local, existe uma cobertura aberta  $\{B_n\}$  de  $X$  tal que a restrição  $f : B_n \rightarrow f(B_n)$  é um homeomorfismo. Como  $X$  é compacto existe uma subcobertura de  $\{B_n\}$  finita. Assim para cada  $x \in X$  o conjunto  $\{f^{-1}(x)\}$  tem no máximo um ponto em cada  $B_n$ , logo  $\{f^{-1}(x)\}$  é um conjunto finito.

Agora considere o conjunto  $X_k = \{x \in X; \#\{f^{-1}(x)\} = k\}$ . Vamos mostrar que para cada  $k$ ,  $X_k$  é um conjunto aberto e fechado. Seja  $x \in X_k$  e  $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_k\}$ , existem abertos disjuntos  $U_i$  de  $x_i$  tal que  $f(U_i)$  é aberto e  $f : U_i \rightarrow f(U_i)$  é homeomorfismo, logo o aberto  $V = \bigcap_i f(U_i)$  contém  $x$  e está contido em  $X_k$ .

Para mostrar que é fechado considere a sequência  $x_n \in X_k$  convergindo para  $x \in X$ ,  $x \in X_l$  para algum  $l$ , como  $X_l$  é aberto e  $x_n \rightarrow x$  existe  $N > 0$  tal que para  $n > N$ ,  $x_n \in X_l$  logo  $k = l$  e  $x \in X_k$ .

Como  $X$  é conexo os únicos conjuntos simultaneamente aberto e fechados de  $X$  são  $\emptyset$  e o próprio  $X$ , logo existe  $k$  tal que  $X = X_k$ . □

**Definição 3.1** ((MAÑÉ; PUGH, 1975)). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo local. Dizemos que  $f$  é um endomorfismo fracamente Anosov se existe um subfibrado contínuo  $E^s \subset TM$  invariante por  $Df$  e se existem constantes  $C, C' > 0$ ,  $0 < \mu < 1 < \lambda$  e uma métrica Riemanianna  $\|\cdot\|$  em  $TM$  tal que para todo  $n > 0$ ,*

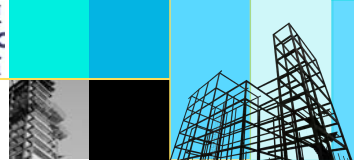
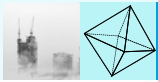
$$(1) \|Df^n(v)\| \leq C\mu^n\|v\|, \text{ para todo } v \in E^s,$$

$$(2) \|\overline{Df}^n(v + E^s)\| \geq C'\lambda^n\|v + E^s\|, \text{ para todo } v + E^s \in TM/E^s$$

onde  $\overline{Df}$  é a aplicação induzida no espaço quociente  $TM/E$  e  $\|\cdot\|$  é a métrica induzida em  $TM/E$ .

**Definição 3.2** ((PRZYTICKI, 1976)). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo local. Dizemos que  $f$  é um endomorfismo Anosov se existem constantes  $C > 0$ ,  $0 < \nu < 1$  e uma métrica Riemanianna  $\|\cdot\|$  em  $TM$  tal que para cada  $f$ -trajetória  $\{x_i\}$  (isto é, uma sequência de pontos em  $M$  satisfazendo  $f(x_n) = x_{n+1}$ ), existe uma decomposição*

$$T_{\{x_i\}}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{E_{x_i}^s \oplus E_{x_i}^u\}$$



que é preservada pela  $Df$  e para todo  $n > 0$ ,

- (1)  $\|Df_{x_i}^n(v)\| \leq Cv^n \|v\|$ , para todo  $v \in E_{x_i}^s$
- (2)  $\|Df_{x_i}^n(v)\| \geq C^{-1}v^{-n} \|v\|$ , para todo  $v \in E_{x_i}^u$ .

**Proposição 3.2** ((SAKAI, 1987)). *As definições 3.1 e 3.2 acima são equivalentes.*

**Observação 3.1.** *No caso de difeomorfismo hiperbólico o subespaço  $E^s$  é caracterizado pelos vetores que contraem exponencialmente por  $Df^n$ , veja Definição 2.2. Qualquer outro vetor que não está em  $E^s$  crescem exponencialmente, assim para caracterizar o subespaço  $E^u$  é necessário olhar os iterados passados,  $Df^{-n}$ , assim os vetores de  $E^u$  são os únicos que contraem exponencialmente com  $Df^{-n}$ . Para endomorfismo Anosov o subespaço  $E^s$  está bem definido, pois só depende da órbita futura, já o subespaço  $E^u$  depende da órbita passada e como pode existir várias pré-órbitas, para cada uma destas temos uma direção instável.*

Vários resultados clássicos em difeomorfismo Anosov também valem para Endomorfismos Anosov como foi provado por (PRZYTYCKI, 1976) e (MAÑÉ; PUGH, 1975). Por exemplo: (a) Existência de métrica adaptada, Proposição(1.4) de (PRZYTYCKI, 1976); (b) O ângulo entre  $E_x^s$  e qualquer  $E_x^u$  é uniformemente afastado de zero, Proposição(1.7) de (PRZYTYCKI, 1976); (c) As distribuições  $E_{\{x_i\}}^s$  e qualquer  $E_{\{x_i\}}^u$  variam continuamente com  $\{x_i\}$ , Teorema(1.10) de (PRZYTYCKI, 1976); (d) O conjunto dos endomorfismos Anosov é aberto, Teorema (1.16) de (PRZYTYCKI, 1976) e Corolário 1 de (MAÑÉ; PUGH, 1975); (e) Existência de variedades estável e instável local  $W_{Loc}^s, W_{Loc}^u$ , Teorema (2.1) de (PRZYTYCKI, 1976). Mas existem fenômenos diferentes do que ocorre nos difeomorfismos, por exemplo: (f) Os Endomorfismos Anosov, com exceção dos expansores, não são estruturalmente estáveis, Teorema 1 de (MAÑÉ; PUGH, 1975).

### 3.2 ENDOMORFISMOS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS

Nesta seção falaremos brevemente de algumas definições e propriedades básicas de Endomorfismos Parcialmente Hiperbólicos contidas em (COSTA; MICENA, 2022).

**Definição 3.3.** Seja  $f : M \rightarrow M$  uma imersão  $C^1$ . Dizemos que  $f$  é um *endomorfismo parcialmente hiperbólico* se existe uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e constantes  $0 < \nu < \gamma_1 < 1 < \gamma_2 < \mu$  e  $C > 1$  tal que para cada trajetória  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $f$ , isto é  $f(x_n) = x_{n+1}$ , existe uma decomposição  $T_{x_n}M = E_{x_n}^s \oplus E_{x_n}^c \oplus E_{x_n}^u$  satisfazendo:

- (1)  $Df(E_{x_i}^s) = E_{x_{i+1}}^s$  (2)  $Df(E_{x_i}^c) = E_{x_{i+1}}^c$  (3)  $Df(E_{x_i}^u) = E_{x_{i+1}}^u$
- (4)  $\|Df_{x_i}^n(v^s)\| \leq Cv^n \|v^s\|, \quad \forall v^s \in E_{x_i}^s$

$$(5) C^{-1}\gamma_1^n \|v^c\| \leq \|Df_{x_i}^n(v^c)\| \leq C\gamma_2^n \|v^c\|, \quad \forall v^c \in E_{x_i}^c$$

$$(6) C^{-1}\mu^n \|v^u\| \leq \|Df_{x_i}^n(v^u)\|, \quad \forall v^u \in E_{x_i}^u.$$

*Exemplo 3.1.* A aplicação induzida por  $A = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  com  $n \geq 2$  em  $\mathbb{T}^2$ , como no *Exemplo 2.2*, é um endomorfismo Anosov. De modo semelhante  $f = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  induz um endomorfismo parcialmente hiperbólico em  $\mathbb{T}^3$ .

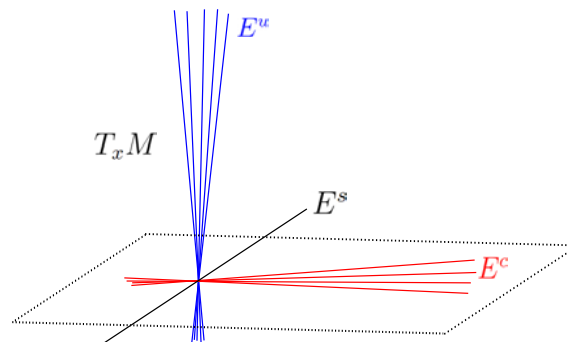
**Observação 3.2.** Analogamente como na *Observação 3.1* a direção  $E^s$  está bem definida, entretanto as distribuições  $E^c$  e  $E^u$  dependem das pré-histórias de  $x$ . Isto é, em cada ponto nós temos uma direção estável e podemos ter várias direções instáveis e centrais.

**Lema 3.1** ((COSTA; MICENA, 2022)). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um endomorfismo parcialmente hiperbólico, fixe  $x \in M$  e  $E^c(x)$  uma direção central. Se  $F^c(x)$  é qualquer outra direção central, então  $F^c(x) \subset E^c(x) \oplus E^s(x)$ . Em outras palavras o subespaço  $E_f^{cs} = E_f^c \oplus E_f^s$  é unicamente definido para cada  $x \in M$ .*

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $F^c(x) \not\subset E^c(x) \oplus E^s(x)$ , então existem vetores não nulos  $v^u \in E^u$ ,  $v^{cs} \in E^c(x) \oplus E^s(x)$  e  $v^c \in F^c(x)$  tal que  $v^u = v^{cs} + v^c$ , isso implica que  $\|Df_{x_0}^n(v^u)\| \leq \|Df_{x_0}^n(v^{cs})\| + \|Df_{x_0}^n(v^c)\|$ , o que é absurdo.

□

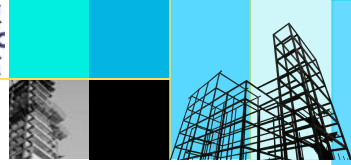
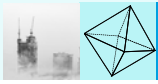
Figura 2 – Esquema das Direções



Fonte: (COSTA; MICENA, 2022).

**Proposição 3.3** ((COSTA; MICENA, 2022)). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um endomorfismo Anosov e  $E_1^c(x)$ ,  $E_2^c(x)$  duas direções centrais no ponto  $x$ , então o ângulo entre os espaços  $Df^n(E_1^c(x))$  e  $Df^n(E_2^c(x))$  converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Uma afirmação análoga vale para  $E^u$ .



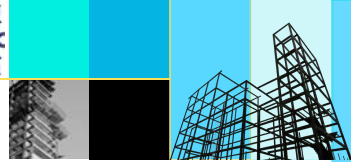
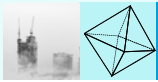
*Demonstração.* Pelo Lema 3.1, para cada  $x \in M$  o espaço  $E_x^{cs} \in T_x M$  está bem definido. Para cada  $n \geq 0$  seja o subespaço  $E_{f^n(x)}^b \subset E_{f^n(x)}^{cs}$  com  $Df(E_{f^n(x)}^b) = E_{f^{n+1}(x)}^b$ , tal que  $E_{f^n(x)}^{cs} = E_{f^n(x)}^s \oplus E_{f^n(x)}^b$  e  $P_n^s : E_{f^n(x)}^s \oplus E_{f^n(x)}^b \rightarrow E_{f^n(x)}^s$  a projeção em  $E_{f^n(x)}^s$ . Dados  $v_1^c \in E_1^c(x)$  e  $v_2^c \in E_2^c(x)$  com  $v_1^c = v_1^b + v_1^c$  e  $v_2^c = v_2^b + v_2^c$ , pela contração uniforme de  $E^s$  temos  $\|Df^n(P_0^s(v_1^c)) - Df^n(P_0^s(v_2^c))\| \leq \|Df^n(P_0^s(v_1^c))\| + \|Df^n(P_0^s(v_2^c))\| = \|Df^n(v_1^s)\| + \|Df^n(v_2^s)\|$  que converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Como a taxa de contração da direção estável  $E^s$  é maior que a de  $E^b$ , então  $Df^n(E_1^c(x))$  e  $Df^n(E_2^c(x))$  convergem para o mesmo subespaço,  $Df^n(E_x^b)$ .  $\square$

Existem algumas propriedades clássicas que são válidas para endomorfismo parcialmente hiperbólico, como por exemplo: Existência de métrica adaptada, unicidade, continuidade e transversalidade das distribuições  $E^s$ ,  $E^c$  e  $E^u$ , veja (COSTA; MICENA, 2022) para os enunciados e demonstrações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AOKI, N.; HIRAIDE, K. Topological theory of dynamical systems: recent advances. Elsevier, 1994.
- COSTA, J. S.; MICENA, F. Some generic properties of partially hyperbolic endomorphisms. **Nonlinearity**, American Mathematical Society, v. 35, p. 5297–5310, 2022.
- HE, B.; SHI, Y.; WANG, X. Dynamical coherence of specially absolutely partially hyperbolic endomorphisms on. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 32, n. 5, p. 1695, 2019.
- MAÑÉ, R.; PUGH, C. Stability of endomorphisms. In: **Dynamical Systems–Warwick 1974**. [S.l.]: Springer, 1975. p. 175–184.
- MILNOR, J. Dynamics: introductory lectures. **Notes, Stony Brook (October 2001)**, 2001.
- PRZYTYCKI, F. Anosov endomorphisms. **Studia mathematica**, v. 3, n. 58, p. 249–285, 1976.
- QIAN, M.; XIE, J.-S.; ZHU, S. **Smooth ergodic theory for endomorphisms**. [S.l.]: Springer, 2009.
- SAKAI, K. Anosov maps on closed topological manifolds. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 39, n. 3, p. 505–519, 1987.
- SHUB, M. Dynamical systems, filtrations and entropy. **Bulletin of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 80, n. 1, p. 27–41, 1974.





## DESACOPLAMENTO DE SISTEMAS MIMO E CONTROLE LQR COM FORMULAÇÃO LMI

Vilemar G. da Silva<sup>1</sup>

João V. da F. Neto<sup>2</sup>

**Resumo:** O problema tratado é o desacoplamento de sistemas MIMO, com o número de entradas igual ao número de saídas, bem como o controle ótimo para essa classe de sistemas, aplicável após o desacoplamento. Na primeira etapa do trabalho, define-se uma estrutura de compensador para sistemas MIMO, que permite tornar cada saída, dependente de uma única entrada de controle. Após a etapa de desacoplamento, propõe-se a aplicação, ao sistema desacoplado, de uma lei de controle baseada em LQR por realimentação de saídas, onde a matriz de ganho de realimentação, a ser determinada, é tal que um índice de desempenho, definido como uma função de custo quadrática, sob uma restrição LMI, é otimizável.

**Palavras-chave:** Desacoplamento MIMO; Controle ótimo LQR-LMI e Realimentação de saída.

**Abstract:** The problem addressed is the decoupling of MIMO systems, with the number of inputs equal to the number of outputs, as well as the optimal control for this class of systems, applicable after decoupling. In the first stage of the work, a compensator structure for MIMO systems is defined, which makes it possible to make each output dependent on a only control input. After the decoupling step, it is proposed to apply, to the decoupled system, a control law based on LQR by output feedback, where the feedback gain matrix, to be determined, is such that a performance index, defined as a quadratic cost function, under an LMI constraint, is optimizable.

**Keywords:** Decoupling MIMO systems; LMI with LQR Optimal control and Output feedback.

### 1 INTRODUÇÃO

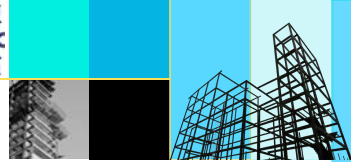
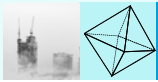
Da literatura técnico-científica, pode-se observar que muitos sistemas de controle são de entrada única e saída única (*Single Input Single Output - SISO Systems*, em inglês) (DORF; BISHOP, 2001), (NISE, 2002), (OGATA, 2010), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013), os quais são aplicáveis em modelos, por exemplo, de controle de: *i*) nível de líquido de um tanque, *ii*) de posição ou velocidade do eixo de um motor e *iii*) da temperatura de uma dada planta em sistemas térmicos.

Para outra subclasse de sistemas de controle, identificam-se duas ou mais entradas e duas ou mais saídas, sendo classificados como sistemas de entradas múltiplas e saídas múltiplas (*Multi Input, Multi Output - MIMO Systems*, em inglês)

<sup>1</sup> DEE-CCET-UFMA, vilemar.gomes@ufma.br

<sup>2</sup> PPGEE-CCET-UFMA, joao.fonseca@ufma.br



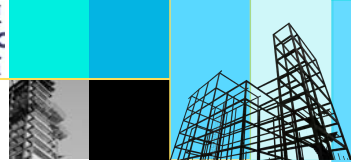
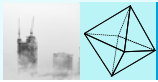


(GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 2001), (ALBERTOS; SALA, 2004). Alguns exemplos de sistemas de controle MIMO são: *i*) chuveiro com válvulas separadas para água fria e água quente, que permitem ao usuário encontrar o fluxo e a temperatura da água, mais confortáveis ao seu corpo, *ii*) sistemas robóticos, onde posições translacionais e rotacionais de articulações são controladas a partir de motores de passo, *iii*) uma aeronave pequena, onde sua velocidade, altura e direção, são controladas, manipulando-se manetes ou alavancas que aumentam ou diminuem a velocidade do motor, enquanto pedais são usados para controlar o leme de direção da aeronave, lateralmente e os flaps, verticalmente.

A presença de acoplamentos é um problema específico de sistemas MIMO, sendo uma das motivações deste trabalho, pelas razões fundamentadas a seguir. Cada uma das entradas de controle afetam simultaneamente as várias saídas, devido a conexões internas entre os subsistemas que compõem uma planta MIMO. As interações entradas-saídas se constituem num inconveniente, pois mudanças em um laço causam mudanças em outro laço, podendo afetar sua estabilidade e dificultar o controle simultâneo de todas as saídas. Uma estratégia de compensação, tal que determinadas entradas não afetem determinadas saídas do sistema MIMO resultante, é denotada por desacoplamento (GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 2001), tratado, por exemplo, em (GARRIDO; VASQUEZ; MORRILA, 2016) e (ZHANG et al., 2018).

Quanto à técnica de controle ótimo com regulador quadrático linear (LQR), trata-se de um resultado bem consolidado da teoria de controle, o qual está fundamentado numa Equação algébrica de Riccati (ARE) e num critério de estabilidade de Lyapunov (OGATA, 1982), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013). Esta técnica consiste basicamente na utilização de uma lei de controle de realimentação de estados (ou de saídas) com vistas à otimização de uma função de custo quadrática. Na prática, isto resulta numa ponderação ótima que combina menor dispêndio de energia de controle, com maior precisão das variáveis controladas. Utilizada, por exemplo, em (BARÃO, 1997), (PAIVA, 2008), (KARTHICK et al., 2016) e (SEN; K.METE, 2016).

Outra ferramenta, também adotada neste trabalho, refere-se à formulação matemática denominada *Desigualdade Matricial Linear* (em inglês, *Linear Matrix Inequality ou LMI*). Este conceito surgiu em 1892, com os critérios de estabilidade de Lyapunov para sistemas dinâmicos (OGATA, 1982). Entretanto, os avanços das pesquisas para resolver LMI por métodos numéricos mais eficientes, renderam resultados de maior impacto há 35 anos, aproximadamente, com o uso dos *algoritmos de pontos interiores*. Tais avanços possibilitaram a resolução de LMI, como um problema de otimização convexa, fortalecendo significativamente as pesquisas em



matéria de controle ótimo e robusto. Com tal abordagem são exemplos (APKARIAN; TUAN; BERNUSOU, 2001), (LEITE et al., 2004), (OLIVEIRA; PERES, 2006), (RIBEIRO et al., 2016) e (REGO; COSTA, 2020).

Neste trabalho apresenta-se uma ideia de projeto de sistema de controle que permite, em duas etapas: *i*) o desacoplamento de uma planta MIMO, com o número de entradas igual ao número de saídas, resultando numa decomposição em subsistemas SISO, e *ii*) o controle ótimo do sistema desacoplado, que consiste na otimização de uma função de custo quadrática, por meio de uma formulação LMI para cada subsistema SISO.

Diferentemente dos trabalhos citados, no presente trabalho a proposta de desacoplamento de uma planta MIMO não requer que sua matriz de transferência seja necessariamente invertível. Outra particularidade importante é que, na etapa de controle ótimo, propõe-se uma formulação, obtida a partir da conversão de uma ARE em uma LMI. Isto produz um impacto importante no valor ótimo da função de custo quadrática pois, na determinação de matriz ótima, sob restrição LMI, existem mais graus de liberdade do que na determinação de matriz ótima, sob restrição LME (Igualdade Matricial Linear).

Este trabalho está organizado como descrito a seguir. Nesta seção faz-se uma contextualização do problema tratado, destacando-se sua importância e citando alguns trabalhos relacionados. Na Seção 2 apresenta-se uma fundamentação do problema, sistematizada em duas etapas, e os resultados principais para enfrentá-lo. Para a primeira etapa, mostra-se uma ideia de desacoplamento para uma planta MIMO, aplicando-se uma estratégia de compensação. Para a segunda etapa, o objetivo é a otimização de um índice de desempenho quadrático baseado em LQR, adaptando-se uma formulação LMI. E na Seção 3 apresentam-se as conclusões.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção apresenta-se a fundamentação matemática do que é o problema de desacoplamento de sistemas MIMO, combinado ao controle ótimo após o desacoplamento. O problema está sistematizado em duas etapas, para cada uma das quais são estabelecidas condições para enfrentá-lo.

### 2.1 DESACOPLAMENTO

Considerando uma planta MIMO de  $m$  entradas e  $m$  saídas, a relação entre a transformada de Laplace do vetor de saídas,  $Y(s)$ , e a transformada de Laplace do

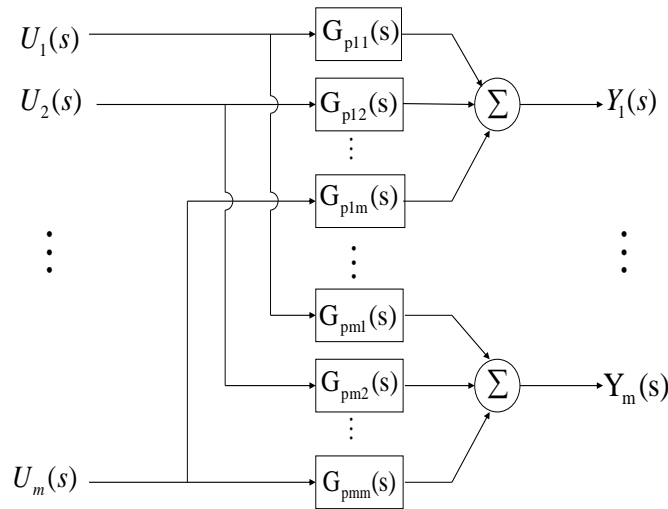


Figura 1 – Estrutura de uma planta MIMO geral com  $m$  entradas e  $m$  saídas.

vetor de entradas,  $U(s)$ , em termo da matriz de transferência,  $G_P(s)$ , é dada por

$$Y(s) = G_P(s)U(s) \quad (1)$$

onde:

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix}, G_P(s) = \begin{bmatrix} G_{p11}(s) & G_{p12}(s) & \cdots & G_{p1m}(s) \\ G_{p21}(s) & G_{p22}(s) & \cdots & G_{p2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{pm1}(s) & G_{pm2}(s) & \cdots & G_{pmm}(s) \end{bmatrix}$$

Do Sistema (1), nota-se que a  $i$ -ésima saída pode ser expressa da seguinte forma:

$$Y_i(s) = G_{pii}(s)U_i(s) + \sum_{j=1}^m G_{pij}(s)U_j(s), \text{ sendo } j \neq i \quad (2)$$

ou seja, cada saída  $Y_i(s)$  depende da entrada  $U_i(s)$  e das demais  $m - 1$  entradas  $U_j(s)$ .

Este sistema está representado pelo diagrama em blocos da Figura 1, onde observam-se interações (acoplamentos) entre os subsistemas, representados por  $G_{pij}(s)$ . Em várias situações práticas, o efeito de entradas indesejadas, em cada saída a ser controlada, representa perturbações. Para fazer frente ao problema de acoplamentos formulado, apresenta-se a ideia formalizada através do teorema seguinte.

**Teorema 1** Para uma planta MIMO com matriz de transferência  $G_P(s) = [G_{pij}(s)]$ ,  $m$  por  $m$ , representada pelo modelo em diagrama de blocos da Figura 1, existe um

compensador a ser conectado de maneira tal que o sistema resultante assume a forma diagonal desejada

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{dm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

se a matriz de transferência do compensador,  $G_C(s) = [G_{cij}(s)]$ ,  $m$  por  $m$ , é uma matriz cujos elementos satisfazem a condição

$$G_{cij}(s) = \begin{cases} G_{di}(s) - G_{pij}(s) & \text{para } i = j \\ -G_{pij}(s) & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

onde as funções de transferência  $G_{di}(s)$  são os elementos da diagonal principal da matriz de transferência desejada para o sistema resultante (3).

*Prova.* Sem perda de generalidade, para uma planta MIMO de 2 entradas e 2 saídas, com matriz de transferência  $G_P(s) = [G_{pij}(s)]$ , considere um compensador de mesma ordem, com matriz de transferência  $G_C(s) = [G_{cij}(s)]$ , cuja entrada é conectada à entrada da planta, e cuja saída é injetada à planta, segundo o esquema feedforward modelado pelo diagrama da Figura 2. Logo, as variáveis de saída do sistema resultante são expressas por

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= [G_{c11}(s) + G_{p11}(s)]U_1(s) + [G_{c12}(s) + G_{p12}(s)]U_2(s) \\ Y_2(s) &= [G_{c21}(s) + G_{p21}(s)]U_1(s) + [G_{c22}(s) + G_{p22}(s)]U_2(s) \end{aligned} \quad (5)$$

Uma vez satisfeita a condição (4), o sistema (5) assume a forma matricial, diagonal

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Por meio de uma dedução análoga a que concluiu no sistema (6), obtém-se o resultado generalizado (3), para uma planta MIMO de ordem  $m$ . A escolha dos polos de  $G_{di}(s)$  pode ser feita livremente, afetando a resposta temporal de cada um dos subsistemas SISO  $Y_i(s) = G_{di}(s)U_i(s)$ . Entretanto, a etapa de controle ótimo modifica o posicionamento de pólos do sistema de malha fechada.

## 2.2 CONTROLE ÓTIMO COM BASE EM LQR

Uma vez garantido o sistema desacoplado (3), pode-se aplicar um controle descentralizado, a cada subsistema  $Y_i(s) = G_{di}(s)U_i(s)$ . Como a técnica de controle ótimo

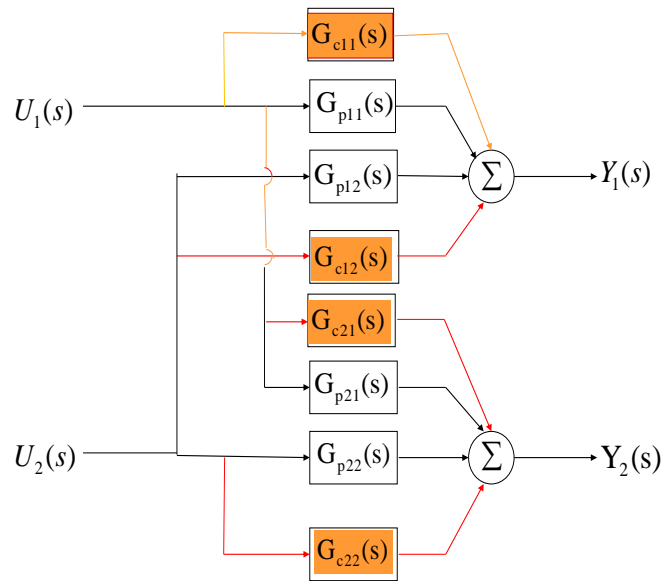


Figura 2 – Planta MIMO desacoplada com 2 entradas e 2 saídas.

com LQR é aplicável a modelos no espaço de estados, cada um dos  $m$  subsistemas deve ser convertido preliminarmente para o seu equivalente sob a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \end{aligned} \quad (7)$$

na qual  $x_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$ ,  $u_i(t) \in \mathfrak{R}$  e  $y_i(t) \in \mathfrak{R}$  representam, nesta ordem, o vetor de variáveis de estado, a entrada de controle e a saída medida.

Considerando uma lei de controle de realimentação de saída  $u_i(t) = -K_i y_i(t)$ , aplicada ao  $i$ -ésimo subsistema (7), obtém-se o subsistema de malha fechada correspondente

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_i - B_i K_i C_i) x_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

no qual o escalar  $K_i$  representa o ganho do controlador.

O problema de controle é determinar um escalar  $K_i$  para cada subsistema (7), tal que cada subsistema de malha fechada (8) seja estável e um índice de desempenho  $J_i$  (função de custo quadrática de  $y_i(t)$  e  $u_i(t)$ ), seja mínimo, sob uma restrição LMI.

Uma idéia para fazer frente ao problema de controle formulado está formalizada por meio do Teorema 2.

**Teorema 2** *Supondo que cada subsistema (7), com  $D_i = 0$ , é de saída controlável, considere uma lei de controle de realimentação de saída do tipo  $u_i(t) = -K_i y_i(t)$ , a*

ser aplicada ao subsistema (7), de modo que o subsistema de malha fechada (8) seja estável. Existe um escalar  $K_i$ , ótimo, tal que a seguinte função de custo quadrática seja mínima

$$J_i = \int_0^{\infty} y_i^T(t) Q_i y_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t) dt \quad (9)$$

se existem matrizes ótimas  $P_i = P_i^T > 0$  e  $R_i = R_i^T$ , tais que a função objetivo  $J_i = x_0^T P_i x_0$ , onde  $x_0$  é um vetor de estados inicial, seja mínima sob a restrição

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i \\ B_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

*Prova.* Substituindo a lei de controle  $u_i(t) = -K_i y_i(t)$  e a saída  $y_i(t) = C_i x_i(t)$ , na expressão (9) obtém-se

$$J_i = \int_0^{\infty} x_i^T(t) [C_i^T Q_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i] x_i(t) dt \quad (11)$$

Segundo (OGATA, 1982) - pag. 880, existe uma relação entre funções de Lyapunov e índice de desempenho quadrático generalizado. Desta referência, define-se a função de Lyapunov

$$x_i^T(t) F_i x_i(t) = -\frac{d}{dt} [x_i^T(t) P_i x_i(t)] \quad (12)$$

onde  $F_i = [C_i^T Q_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i]$ , presente em (11), é uma matriz simétrica e definida (ou semidefinida) positiva. Desenvolvendo a derivada do lado direito de (12) tem-se

$$x_i^T(t) F_i x_i(t) = -\dot{x}_i^T(t) P_i x_i(t) - x_i^T(t) P_i \dot{x}_i(t) \quad (13)$$

Substituindo a equação de estados de (8), e sua transposta, na Equação (13), resulta

$$x_i^T(t) F_i x_i(t) = -x_i^T(t) [(A_i - B_i K_i C_i)^T P_i + P_i (A_i - B_i K_i C_i)] x_i(t)$$

que é equivalente a

$$(A_i^T - C_i^T K_i^T B_i^T) P_i + P_i (A_i - B_i K_i C_i) + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i + C_i^T Q_i C_i = 0$$

Usando o artifício de adicionar a matriz nula  $0_{n_i \times n_i} = P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i B_i R^{-1} B_i^T P_i$  à equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} & A_i^T P_i + P_i A_i + [-C_i^T K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i + P_i B_i R^{-1} B_i^T P_i] \\ & - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + C_i^T Q_i C_i = 0 \end{aligned} \quad (14)$$



A minimização do índice de desempenho  $J_i$ , em função de  $K_i$ , requer que a parte entre colchetes da Equação (14) seja nula, o que resulta na equação conhecida da teoria de controle ótimo como Equação algébrica de Riccati

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + C_i^T Q_i C_i = 0 \quad (15)$$

Visando convertê-la numa desigualdade matricial, esta é reescrita como

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i = -C_i^T Q_i C_i \quad (16)$$

Como  $Q_i > 0$  e  $C_i^T C_i > 0$ , então  $-C_i^T Q_i C_i < 0$ . Assim, a Equação (16) é equivalente a

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i < 0 \quad (17)$$

Aplicando o complemento de Schur a (17), chega-se a (10), como se queria demonstrar.

Integrando (12), nos limites de zero a infinito, e seja o subsistema (8), estável, o que implica em  $x_i(\infty) = 0$ , demonstra-se que a função objetivo é de fato  $J_i = x_0^T P_i x_0$ .

Sabendo que  $K_i$  é um escalar, então as igualdades (14) e (15) são satisfeitas se

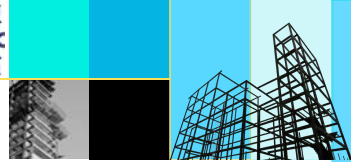
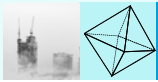
$$R_i^{-1} B_i^T P_i - K_i C_i = R_i K_i C_i - B_i^T P_i = 0 \implies K_i = R_i^{-1} B_i^T P_i C_i^T \quad (18)$$

Portanto, uma vez definida a matriz  $R_i$  e encontrada a matriz  $P_i$  ótima, tais que a função de custo quadrática  $J_i = x_0^T P_i x_0$ , sob a restrição LMI (10), assuma um valor mínimo, então calcula-se a matriz de realimentação  $K_i$  ótima, usando a conclusão da Equação (18).

### 3 CONCLUSÕES

Para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas - MIMO, foram apresentados resultados que permitem o desacoplamento e o controle ótimo via LQR com uma formulação LMI. Neste contexto, a presença de interações entre as entradas e as saídas de uma planta MIMO, e possíveis inconvenientes para o seu controle, decorrentes dessas interações, foram destacados. Através de modelos por diagrama em blocos, os subsistemas que formam a estrutura de um sistema MIMO genérico, foram representados para ilustrar as referidas interações. Os resultados foram divididos em duas etapas, começando pela proposição de uma estrutura de compensador que permite o desacoplamento de sistemas MIMO, com o número de entradas igual ao número de saídas. Em seguida apresentou-se uma proposição de controle ótimo baseada em LQR, com uma formulação LMI.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTOS, P.; SALA, A. **Multivariable Control Systems**. Limited. London: Springer-Verlag, 2004. 357 p.

APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and  $h_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Notre Dame, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.

BARÃO, R. C. **Algoritmos de Controle Ótimo quadrático com restrições**. 81 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) — Escola Politécnica da USP, São Paulo, 1997.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 674 p.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6a. ed. Porto Alegre: Editora Bookman, 2013. 721 p.

GARRIDO, J.; VASQUEZ, F.; MORRILA, F. Multivariable control by decoupling. **International Journal of Systems Science**, 2016.

GOODWIN, G. C.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. E. **Control System Design**. New Jersey 07458: Prentice Hall, Inc., 2001. 822 p.

KARTHICK, S. et al. Apso based weighting matrices selection of lqr applied to tracking control of simo system. In: CONFERENCE ON ADVANCED COMPUTING NETWORKING AND INFORMATICS, SMART INNOVATION, SYSTEMS AND TECHNOLOGIES, 3rd International Conference. . [S.l.], 2016.

LEITE, V. J. et al. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and  $h_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations. **Controle & Automação, Revista da Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas-SP, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 700 p.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: Prentice/Hall do Brasil, 1982. 930 p.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 822 p.

OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. Lmi conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions. **Systems & Control Letters, Elsevier**, Holanda, v. 55, p. 52–61, 2006.



PAIVA, B. M. **Sintonia Automatizada e ganhos de retroação de estados em sistemas de controle com auxílio de redes neurais artificiais**. 73 p. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica) — Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologias da Informação da Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2008.

REGO, R.; COSTA, M. Output feedback robust control with anti-windup applied to the 3ssc boost converter. **IEE Latin America Transactions**, V. 18, n. 5, 2020.

RIBEIRO, J. M. S. et al. Investigação de acionamento de motor de indução trifásico utilizando controladores robustos projetados por lmis. **Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Natal-RN, v. 4, n. 1, p. 7, 2016.

SEN, M. A.; K.METE. Optimal tuning of a lqr controller for na inverted pendulum using the bees algorithm. **Journal of Automation and Control Engineering**, V. 4, 2016.

ZHANG, Y. et al. Virtual unmodeled dynamics modeling for nonlinear multivariable adaptive control with decoupling design. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, V. 3, n. 48, p. 342–353, 2018.

## **Parte II**

---

**Ensino de Matemática.**

**Formação de Professores na Educação Básica**  
(PARFOR, PROFMAT, ENSINAR, PPECEM, etc).

**Mulheres nas áreas STEM**  
(Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática).



## ESTRATÉGIAS PARA MOTIVAR MENINAS NAS ÁREAS DE STEM EM TEMPOS DE PANDEMIA DE COVID-19

Katia Simone Teixeira da Silva de La Salles<sup>1</sup>

Paulo Rogério de Almeida Ribeiro<sup>2</sup>

Luís Enrique Arroyo Meza<sup>3</sup>

Valeska Martins de Souza<sup>4</sup>

Wendell Ferreira de La Salles<sup>5</sup>

Kayla Rocha Braga<sup>6</sup>

Cleber Araújo Cavalcanti<sup>7</sup>

**Resumo:** Estimular o interesse e a participação de meninas e mulheres nas áreas de ciência, tecnologia, engenharia e matemática (Science, Technology, Engineering and Mathematics – STEM), é o primeiro passo para dimensionar e fortalecer o ecossistema necessário para transformar o cenário da baixa presença feminina nas ciências. Na última década, algumas intervenções estão sendo desenvolvidas com a finalidade de estimular a participação de meninas e mulheres neste campo. Neste sentido, o objetivo deste artigo é relatar ações do projeto extensionista Sarminina Cientistas, desenvolvidas durante a pandemia de COVID-19, quando as instituições de ensino tiveram seu fechamento temporário, obrigando-as, em um curto prazo de tempo, a trabalharem com o ensino remoto emergencial. Os resultados foram quantificados pelo por meio de pesquisa de opinião, anônima, que classificou a iniciativa como positiva.

**Palavras-chave:** Sarminina Cientistas, STEM, Pandemia - COVID

**Abstract:** Encouraging the interest and participation of girls and women in science, technology, engineering and mathematics (STEM) is the first step towards scaling and strengthening the ecosystem required to transform the low attendance scenario female in the sciences. In the last decade, some interventions have been developed with the purpose of stimulating the participation of girls and women in this field. In this sense, the objective of this article is to report actions of the extension project Sarminina Cientistas, developed during the COVID-19 pandemic, when educational institutions had their temporary closure, forcing them, in a short period of time, to work with the emergency remote teaching. The results were quantified by means of an anonymous opinion poll, which classified the initiative as positive.

**Keywords:** Sarminina, STEM, Pandemic - COVID.

### 1 INTRODUÇÃO

Incentivar a participação de meninas e mulheres nas áreas de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (Science, Technology, Engineering and Mathematics - STEM)

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Maranhão e-mail [katia.salles@ufma.br](mailto:katia.salles@ufma.br)

<sup>2</sup> Universidade Federal do Maranhão e-mail [ribeiro.paulo@ufma.br](mailto:ribeiro.paulo@ufma.br)

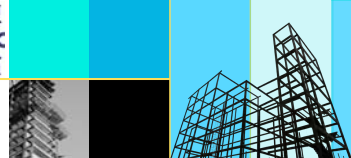
<sup>3</sup> Universidade Federal do Maranhão e-mail [luis.arroyo@ufma.br](mailto:luis.arroyo@ufma.br)

<sup>4</sup> Universidade Federal do Maranhão e-mail [valeska.martins@ufma.br](mailto:valeska.martins@ufma.br)

<sup>5</sup> Universidade Federal do Maranhão email [wendell.salles@ufma.br](mailto:wendell.salles@ufma.br)

<sup>6</sup> Universidade Federal do Maranhão email [kayla.rb@ufma.br](mailto:kayla.rb@ufma.br)

<sup>7</sup> Universidade Federal do Maranhão email [cleber.cavalcanti@ufma.br](mailto:cleber.cavalcanti@ufma.br)



é uma das bases da agenda global 2030, aprovada pela Assembleia Geral das Nações Unidas. Não somente pela busca da igualdade de gênero, mas para garantir que o desenvolvimento científico e tecnológico seja mais inclusivo e representativo da sociedade (UNESCO, 2022, p.8).

Em muitos países, a disparidade de gênero na participação em STEM se torna mais evidente com a idade. Segundo o estudo “Decifrar o código: educação de meninas e mulheres em ciências, tecnologia, engenharia e matemática-STEM”, publicado em 2018 pela UNESCO, as meninas parecem perder o interesse nesta área com maior frequência que os meninos, muito antes de chegarem à universidade.

Nos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), menos de 5% das meninas pensam em seguir carreira nas áreas de engenharia e computação, é o que mostra o relatório “The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence” (OCDE, 2015, p.32). Diversos são os motivos para ocorrência desse fato: desigualdade de gênero, educação sexista, estereótipos de gênero no ambiente escolar, entre outros. Esse comportamento tem repercussões no ensino superior, onde há um desequilíbrio de gênero nos cursos nas áreas de STEM (SIRIMANNE, 2019, p.1).

No Brasil, em 2019, a despeito do número de matrículas, o Censo da Educação superior mostrou que as mulheres correspondiam a apenas 13,3% das matrículas nos cursos presenciais de graduação na área de Computação e Tecnologias da Informação e Comunicação, e 21,6% na área de Engenharia e afins.

Com a sub-representação contínua de mulheres nas áreas de STEM, é necessário explorar maneiras de manter o interesse das meninas em STEM ao longo do ensino fundamental e médio (WIESELMANN; ROEHRIG; KIM, 2020, p.1).

O reconhecimento de um contexto de desigualdade na presença das mulheres nas áreas de STEM vem estimulando, desde o início dos anos 2000, várias iniciativas de governos, empresas e organizações da sociedade civil na promoção da inserção delas nestas áreas (OLIVEIRA *et al.*, 2018, p.4).

A nível de Brasil, algumas iniciativas a exemplo da chamada CNPq/MCTIC nº 31/2018 “Meninas nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação” do CNPq e “Garotas STEM: formando futuras cientistas” do British Council em parceria com o Museu do Amanhã, vem sendo desenvolvidas e possuem um papel fundamental na transformação



social e no estímulo ao reconhecimento de potenciais ainda na educação básica. Ambas as chamadas têm como objetivo apoiar o desenvolvimento científico e tecnológico incentivando o interesse, a participação e a formação de meninas para carreiras em áreas científicas e tecnológicas, onde mulheres ainda se encontram subrepresentadas.

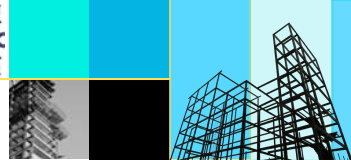
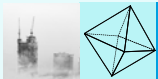
As instituições de ensino desempenham um papel fundamental em determinar o interesse das meninas em disciplinas de STEM, bem como em oferecer oportunidades iguais para acessarem e se beneficiarem de uma educação de qualidade nessas áreas. Diante deste contexto e considerando as restrições impostas devido à pandemia pela COVID-19, doença causada pelo coronavírus (Sars-Cov-2), os autores deste trabalho idealizaram e organizaram, por meio do projeto extensionista Sarminina Cientistas, uma série de ações, no formato virtual, com intuito de estimular a inserção de meninas do ensino médio de escolas públicas da cidade de São Luís/Maranhão às áreas de STEM.

## 2 O PROJETO SARMININA CIENTISTAS

“Desenvolvimento é a parte principal do artigo, que contém a exposição ordenada e pormenorizada do assunto tratado. Divide-se em seções e subseções, conforme ABNT NBR 6024.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2018, p. 5). O projeto Sarminina Cientistas: Estimulando Meninas do Maranhão para as Carreiras de Exatas e Tecnologia é um projeto de extensão da Universidade Federal do Maranhão (UFMA) e foi criado ao final do ano de 2018 por meio da chamada pública CNPq/MCTI n°32/2018 – Meninas nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação e aprovado, em 2021, na Chamada pública Garotas STEM: formando futuras cientistas do British Council, organização internacional do Reino Unido.

O projeto tem como finalidade promover ações que visam, não somente fomentar a igualdade de gênero, mas também que promovam o contato precoce das alunas do ensino básico com as áreas de ciência e tecnologia, esclarecendo o papel e os aspectos positivos dessas carreiras, visando um aumento no ingresso de mulheres em áreas predominantemente masculinas.

Observa-se que é de fundamental importância oportunizar a essas meninas meios para que elas adquiram conhecimentos teóricos e práticos sobre ciência, dando-as condições de entender fenômenos que ocorrem no seu cotidiano, além de contribuir para o engajamento e fixação desses talentos nas áreas de atuação correlatas, tornando-as, no



futuro, agentes no desenvolvimento científico e tecnológico, em especial no Estado do Maranhão, onde as desigualdades são elevadas e os índices de inclusão social estão aquém do que se possa sonhar para o mínimo de uma adequada qualidade de vida.

De caráter interdisciplinar, o projeto atua em duas frentes: a) promover o estímulo à curiosidade das meninas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio nas áreas de STEM, com o intuito de incentivar o ingresso destas jovens nessas áreas, e b) desenvolvimento técnico das alunas de graduação, propondo a complementação de sua formação, além da diminuição da evasão e das taxas de reprovação.

Desta forma, este trabalho, apresenta um relato de experiência, a partir das ações do projeto de extensão universitária Sarminina Cientistas, que teve como objetivo estimular e atrair alunas do ensino básico à área de STEM, favorecendo um ambiente acadêmico mais inclusivo para as meninas, além de contribuir para o maior acesso, permanência e avanço das mulheres nas áreas em que elas são frequentemente subrepresentadas.

### 3 METODOLOGIA

As ações do projeto ocorreram de forma remota, por meio da plataforma *google meet*, durante os meses de julho a outubro do ano de 2021, tendo como público-alvo, alunas do ensino médio de escolas públicas da Cidade de São Luís/MA. Participaram das oficinas 60 meninas.

Diversas atividades foram realizadas, de modo a contemplar as mais diferentes metodologias de sensibilização e formação, tais como:

#### **a) Roda De Diálogos (vídeo meeting): Conhecendo Mulheres em STEM**

A Roda De Diálogos: Conhecendo Mulheres em STEM, teve como objetivo promover o diálogo entre estudantes do ensino médio e profissionais do mercado de trabalho. Por meio de uma conversa descontraída, as convidadas contaram sobre suas trajetórias de vida e elencaram as maiores dificuldades encontradas ao longo de suas jornadas profissionais, desde o ingresso na universidade até o presente momento.

#### **b) Desmistificando o ensino aprendizagem em matemática**

Acompanhando o processo de ensino aprendizagem de Matemática no ensino fundamental e médio, vemos que uma parcela considerável de alunas, considera a



Matemática como “matéria difícil”. Diante deste contexto, propomos três oficinas de Matemática com intuito de proporcionar de certa forma uma Matemática atraente, divertida, motivadora, intensificando o interesse pela disciplina. Essa ação focou nos assuntos de matrizes e sistemas lineares (com auxílio do Scilab<sup>8</sup>), introdução a programação, Excel<sup>9</sup> e Python<sup>10</sup>, como forma alternativa para tornar o ensino da Matemática mais atraente, ampliando assim, a motivação e o interesse das alunas por esta matéria.

#### **c) Elaboração de Podcasts Educativos**

O objetivo desta atividade foi desenvolver material didático para posterior consulta, envolvendo redes sociais, um canal em plataformas digitais e disponibilização de material em áudio, contendo informações com curiosidades, fatos inéditos e explicações sobre temas relacionados à ciência e tecnologia. Para este fim, foi feito um plano de criação de conteúdos digitais com alunos e professores de graduação ou ensino médio voluntários. Foram convidados profissionais de áreas relacionadas à ciência e tecnologia para relatar atividades vivenciadas na indústria e academia.

#### **d) Desenvolvimento de Revistas e Material Informativo**

Nesta atividade foi desenvolvido material didático em formato online para posterior consulta, envolvendo redes sociais. O material visa a apresentar de forma didática e visual informações com curiosidades, fatos inéditos e explicações sobre temas relacionados à ciência e tecnologia. Além disso, revistas em quadrinhos sobre personagens femininos de impacto na área de ciência e tecnologia foram desenvolvidas para chamar a atenção do público infantil e adolescente. Pesquisas sobre mulheres que impactaram as áreas de ciência e tecnologia foram feitas, visando coletar histórias que motivassem as meninas e adolescentes a seguir carreiras nestas áreas.

---

<sup>8</sup> Scilab (Scientific Laboratory) é um software científico, gratuito, para computação numérica que fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas.

<sup>9</sup> Excel ou Microsoft Excel é um aplicativo de criação de planilhas eletrônicas

<sup>10</sup> Python é uma [linguagem de programação de alto nível](#), [interpretada](#) de [script](#), [imperativa](#), [orientada a objetos](#), [funcional](#), de [tipagem](#) dinâmica e forte



### e) Execução de Oficinas Online

Foram ofertados cursos online que abordaram tópicos de pensamento computacional e elaboração de material digital, utilizando tecnologias de informação e comunicação (TICs).

### f) Programação de computadores utilizando a Micro:Bit

Esta oficina contemplou atividades de programação, utilizando a placa Micro:Bit para visualizar as implementações. Apesar dessa placa ser um hardware, pôde-se simular o seu funcionamento, ou seja, as alunas não precisaram ter uma placa em mãos. O minicurso realizado online abordou tópicos de programação, desde um simples algoritmo, fluxograma, introdução a Micro:Bit, introdução a eletrônica, assim como programação da placa com Microsoft MakeCode e/ou Scratch.

No primeiro dia de início das ações do projeto foi realizada a dinâmica de quebra gelo. A ideia dessa atividade foi favorecer a interação entre as participantes, a fim de que a troca de impressões, informações e conhecimento fosse a mais rica possível, *quebrando o gelo* que normalmente limita ou inibe as interações de um grupo de pessoas. O tema escolhido para a dinâmica foi a representação feminina em STEM, com objetivo de que as participantes se reconheçam e se identifiquem com exemplos de outras mulheres que atuaram e ainda trabalham ativamente na área de STEM. A plataforma utilizada para a dinâmica foi o mentimeter<sup>11</sup>.

Nesta dinâmica, foram socializadas e discutidas a história de duas personalidades femininas que marcaram história: Marie Curie, a primeira mulher a ganhar o Prêmio Nobel de Física, e "Katie" Bouman, doutora em engenharia elétrica e ciência da computação pelo Massachusetts Institute of Technology (MIT), que ajudou a desenvolver o algoritmo que os cientistas usaram para criar a primeira imagem do buraco negro.

Após a dinâmica, as estudantes foram convidadas a participar, de forma anônima, de uma pesquisa sobre percepção em relação à área de STEM.

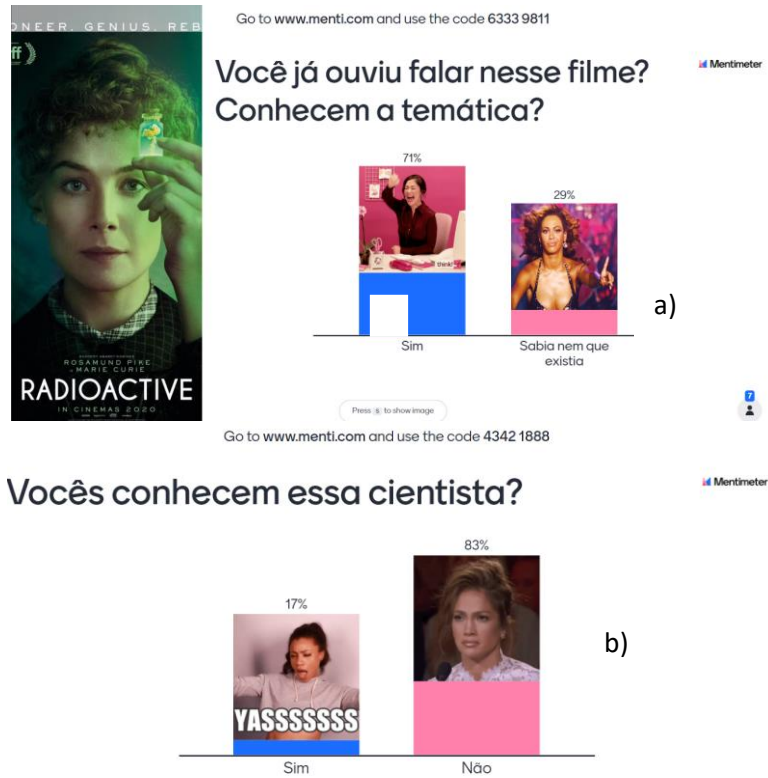
---

<sup>11</sup> <https://www.mentimeter.com/pt-BR>

#### 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO

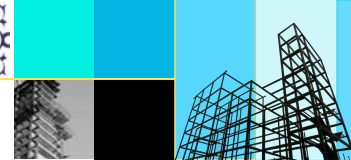
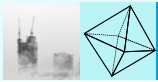
Nesta seção apresentaremos alguns dos resultados obtidos ao tocante à atividade quebra gelo, cuja síntese da interação está representada na Figura 1.

Figura 1: a) Você já ouviu falar sobre esse filme?; b) Vocês conhecem Katie Bouman?



A partir dos dados da Figura 1a observamos que 71% das participantes afirmam que conhecem a temática do filme “Radioactive”, mas quando questionadas se conheciam a Katie Bouman (Figura 01b), 83% do público respondeu que não há conheciam. Esse resultado pode ser indicativo que exemplos de mulheres que fizeram grandes descobertas, como Marie Curie, sejam mais conhecidos e divulgados em sala de aula, e que as demais cientistas e pesquisadoras seguem recebendo baixo destaque nas escolas. O acesso limitado a modelos e mentoras femininas nos livros didáticos pode fazer com que as meninas percebam estas áreas como campo distantes.

Este resultado está de alinhado com estudos realizados por Boffi e Oliveira-Silva (2021), que observaram que as mídias que cerceiam as atividades das crianças não apresentam (ou apresentam pouco) modelos femininos em atividades de ciência e

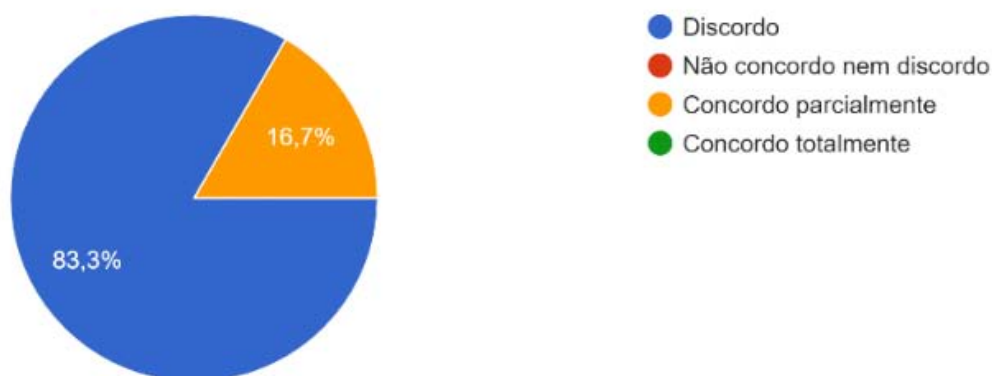


tecnologia, contribuindo para reforçar os estereótipos e a segregação das mulheres nas áreas de STEM.

Ainda segundo Boffi e Oliveira-Silva (2021) é imperativa a apresentação de mulheres importantes e/ou que participaram da construção das áreas de STEM, para que as jovens sintam-se motivadas e encorajadas a permanecer na área.

Com relação ao questionário sobre a percepção em relação à área de STEM, foram realizadas sete perguntas, cujos resultados encontram-se representados nos Gráficos 1, 2, 3 e 4, abaixo indicados:

Gráfico 1: As meninas se dão melhor em ciências humanas ou da saúde do que nas ciências exatas?



Fonte: Autores (2022)

Podemos observar, a partir dos resultados expressos no Gráfico 1, que 83,33%, das participantes da pesquisa, discordam que as meninas se dão melhor em ciências humanas ou da saúde que nas ciências exatas. Neste sentido o papel da família e dos professores na educação das meninas é essencial para que elas se sintam motivadas e confiantes para atuar em qualquer área.

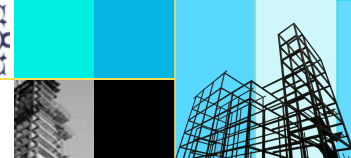
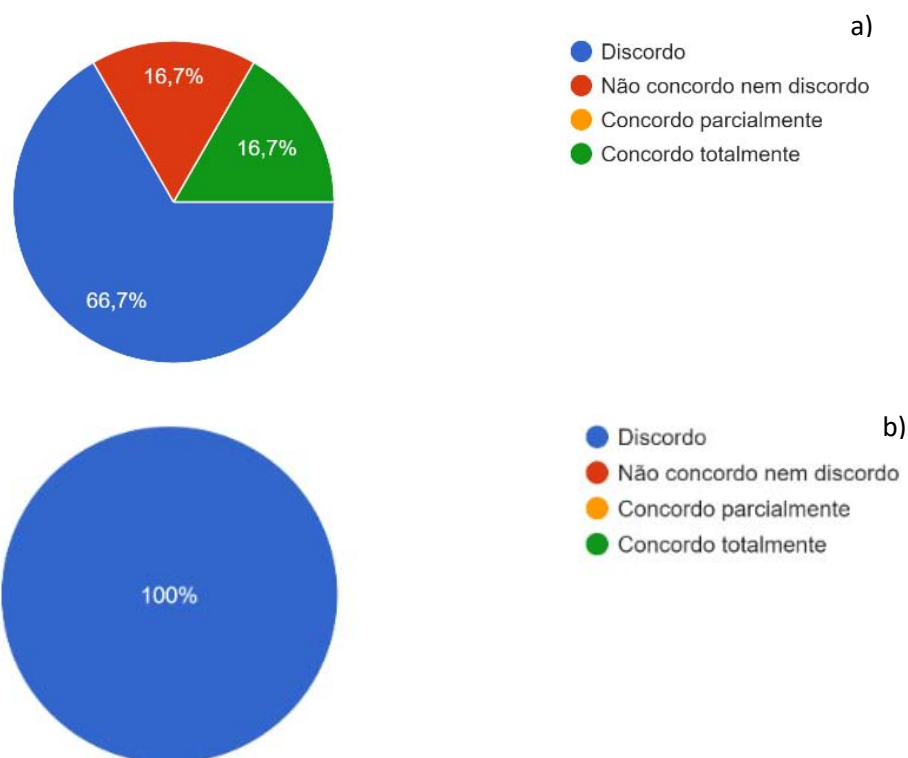


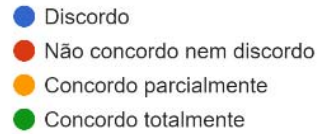
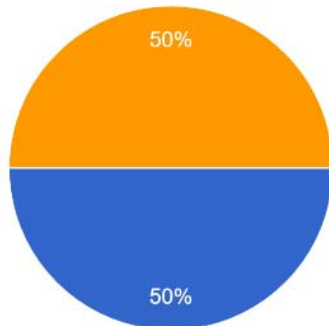
Gráfico 2: a) As carreiras em ciência e engenharia são de domínios masculinos? b) Os homens são melhores em matemática e em ciências do que as mulheres?



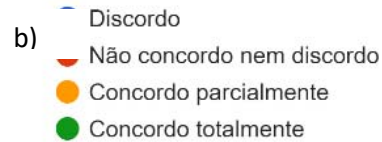
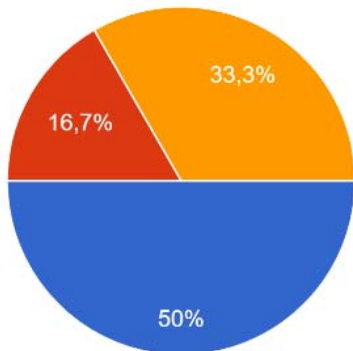
Fonte: Autores (2022)

Os resultados apresentados no Gráfico 2 nos mostra que a maioria das entrevistadas discordam que as carreiras em ciência e engenharia são de domínio masculino (GRÁFICO 2a) e, estas foram unânimes em afirmar que os homens não são melhores em matemática, nem em ciência que as mulheres. Embora o universo de meninas que responderam à pesquisa seja pequeno, este resultado nos leva a crer que mesmo que a participação feminina nas áreas de STEM esteja cercada de estereótipos, nem todas as meninas são criadas em um ambiente que se opõe à igualdade de direitos entre os gêneros, favorecendo o gênero masculino em detrimento ao feminino.

Gráfico 3: a) Quando eu penso em um cientista penso em alguém do gênero masculino? b) Quando eu penso em um profissional de engenharia penso em alguém do gênero masculino?



a)



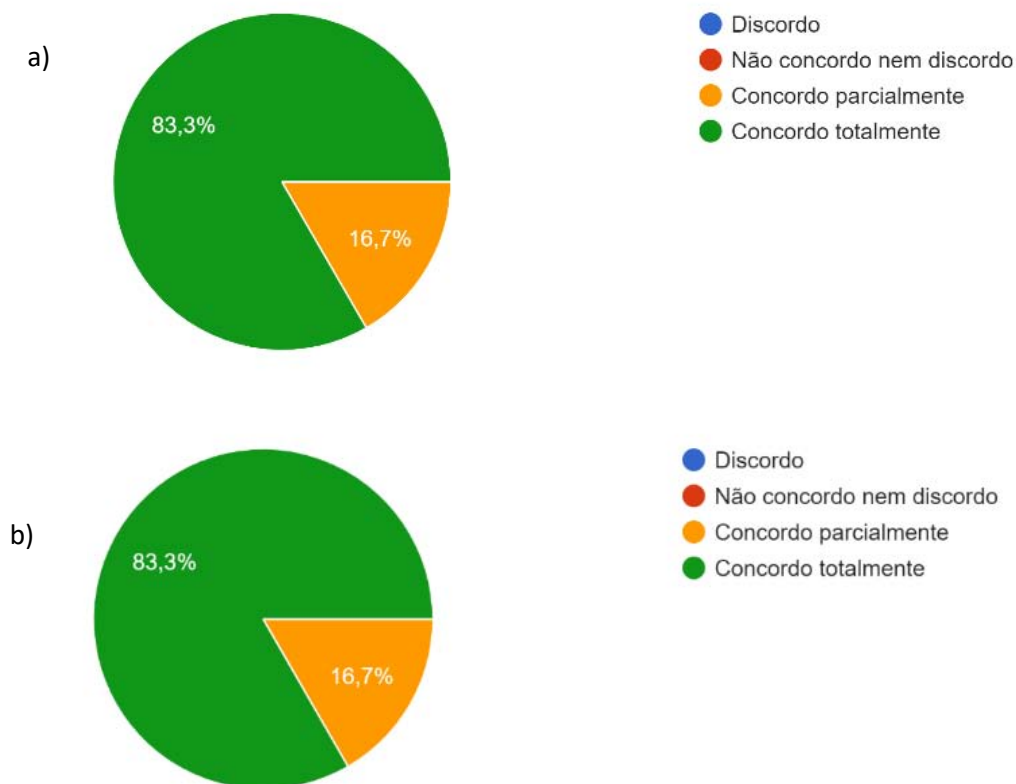
b)

Fonte: Autores (2022)

Com relação ao resultado apresentado no Gráfico 3a, 50% das meninas concordam parcialmente que quando pensam em um cientista pensam em alguém do gênero masculino, enquanto 33% concordam parcialmente que quando pensam em um profissional de engenharia pensam em alguém do gênero masculino (GRÁFICO 3b). Estes resultados podem ser indicativos da ausência de figuras femininas nos livros didáticos, em filmes, ou até mesmo à um contexto histórico que eclipsou os nomes de mulheres na hora de divulgar grandes feitos.



Gráfico 4: a) Participar das atividades do projeto me deixa mais interessada em ciências e tecnologia? b) Participar das atividades do projeto me faz acreditar que posso seguir carreira nas ciências exatas ou engenharia?



Fonte: Autores (2022)

Os resultados expressos no Gráfico 4, confirmam que ações de empoderamento feminino exercessem importante papel na motivação das meninas a se interessarem pela área de STEM. O processo de socialização das meninas fora da sala de aula é fator importantíssimo para que elas possam escolher estudar e trabalhar nas áreas de STEM (HARDWARE LIVRE, 2022). O interesse feminino nesses campos vai se perdendo ao longo do tempo, o que sugere uma necessidade de políticas públicas e ações para que isso não ocorra (UNESCO, 2018).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades desenvolvidas com as alunas das escolas públicas foram de grande importância, pois demonstraram a necessidade de se implantar alternativas de



aprendizagem que estimulem a curiosidade das meninas para as áreas de STEM. Acreditamos que essas ações possam contribuir para desmistificar a imagem de que a área de STEM não é adequada para o público feminino, possibilitando, em breve, um novo olhar que promova o enriquecimento da produtividade científica e tecnológica nestas áreas.

## REFERÊNCIAS

BOFFI, Leticia Carolina; OLIVEIRA-SILVA, Ligia Carolina. Enfrentando as estatísticas: estratégias para permanência de mulheres em STEM. **Gerais, Rev. Interinst. Psicol.**, Belo Horizonte, v. 14, n. spe, p. 1-27, dez. 2021 . Disponível em <[http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-82202021000300003&lng=pt&nrm=iso](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-82202021000300003&lng=pt&nrm=iso)>. Acesso em 20 jan. 2023.

CENSO da educação superior 2019. Brasília, DF: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, 2020. Acessado em 13/03/2022 <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/censo-da-educacao-superior/resultados>.

**Educação de meninas e mulheres em ciências, tecnologia, engenharia e matemática. Hardwarelivre, 2022. Acessado em 16/09/2022. [www.hardwarelivre.com.br/noticias/educacao-de-meninas-mulheres-em-ciencias-tecnologia-engenharia-e-matematica/](http://www.hardwarelivre.com.br/noticias/educacao-de-meninas-mulheres-em-ciencias-tecnologia-engenharia-e-matematica/).**

OCDE (2015), The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence, PISA, OECD Publishing, Paris, Acessado em 28/03/2022. <https://doi.org/10.1787/9789264229945-en>.

OLIVEIRA, Elisabete Regina Baptista de; UNBEHAUM, Sandra; GAVA, Thais. A educação stem e gênero: uma contribuição para o debate brasileiro. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 49, n. 171, p. 130-159, jan./mar. 2019. <https://doi.org/10.1590/198053145644>

SIRIMANNE, S. N. What if our future were designed equally by women? Acessado 01/05/2022. <https://unctad.org/en/pages/newsdetails.aspx?OriginalVersionID=1993>.

UNESCO. Decifrar o código: educação de meninas e mulheres em ciências, tecnologia, engenharia e matemática (STEM). – Brasília: 2018. 84 p., il. ISBN: 978-85-7652-231-7. Acessado 28//2022. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000264691>.

UNESCO. Mapeamento de iniciativas de estímulo de meninas e jovens à área de STEM no Brasil - Brasília: 2022. 45 p., Acessado em 30/03/2022. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380903>.



WIESELMANN, J. R.; ROEHRIG, G. H.; KIM, J. N. Who succeeds in STEM? Elementary girls' attitudes and beliefs about self and STEM. **School Science and Mathematics**, v.120, p. 297-308, 2020.

## AGRADECIMENTOS

A equipe envolvida neste trabalho agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (processo CNPq nº 442951/2018-3) e a Organização Internacional do Reino Unido, British Council, pelo financiamento do projeto.

## DIFICULDADES RELACIONADAS AO APRENDIZADO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL NO ENSINO FUNDAMENTAL

Pamela Marreiros Araujo Rocha<sup>1</sup>  
Raabe Rodrigues Rosa<sup>2</sup>  
Valdiane Sales Araújo<sup>3</sup>

**RESUMO:** Este artigo trata da problemática do ensino e aprendizado do sistema de numeração decimal nos anos iniciais do ensino fundamental. Ainda hoje, professores de matemática sentem dificuldade em ensinar o sistema numeração decimal para crianças de pouca idade. A não assimilação deste conteúdo gera muitos problemas no aprendizado de outros conteúdos matemáticos, inclusive nas séries futuras, como por exemplo, a criança sente dificuldade para efetuar as quatro operações. A metodologia usada neste trabalho foi a pesquisa bibliográfica com base em livros, artigos e material manipulativo, neste caso, o material dourado. O objetivo principal deste estudo é evidenciar algumas das dificuldades que os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental enfrentam ao se depararem com o sistema de numeração decimal nas séries iniciais.

**Palavras- Chaves:** sistema de numeração; material dourado; ensino de matemática

**ABSTRACT:** This article deals with the problem of teaching and learning the decimal numbering system in elementary school. Even today, math teachers find it difficult to teach the decimal number system to young children. Failure to assimilate this content generates many problems in learning other mathematical content, including in future series, such as solving the four operations. The methodology used was bibliographic research based on books, articles and manipulative material, in this case, the golden material. The main objective of this study is to highlight some of the difficulties that lower elementary school students face when faced with the decimal numbering system in the initial grades.

**Keywords:** numbering system; golden material; math teaching

### 1 INTRODUÇÃO

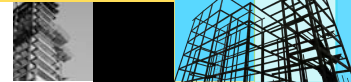
Esse artigo é baseado em uma pesquisa bibliográfica, onde as autoras investigam as dificuldades de compreensão, dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, relacionadas ao ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal.

Em pesquisa realizada com crianças do ensino fundamental, nos anos iniciais, (PARRA E SAIZ, 2001), uma das principais dificuldades que as autoras encontraram foi a compreensão dos conceitos que estão por trás desse sistema e a relação deles com a escrita. Elas perceberam também que certos procedimentos didáticos que nós, como professores, costumamos usar, como por exemplo, o “vai um” e o “pede emprestado”, quando ensinamos a criança a efetuar as quatro operações matemáticas, não têm nenhum vínculo com as bases do

1 Discente da Universidade Federal do Maranhão pamela.rocha@discente.ufma.br

2 Discente da Universidade Federal do Maranhão raabe.rodrigues@discente.ufma.br

3 Professora da Universidade Federal do Maranhão valdiane.sa@ufma.br



sistema de numeração decimal. Essa forma de ensinar não conceitua o que, de fato, é uma dezena, uma centena e unidade e não revelam conhecimentos corretos sobre quantidades nem mesmo a representação que tem aquele número, em uma dada posição.

[...]ao entrevistar crianças com as quais não trabalhávamos didaticamente, constatamos uma ou outra vez que os famosos “vai um” e “peço emprestado”- ritual inerente das contas escolares- não tinham vínculo nenhum com as “unidades, dezenas e centenas” estudadas previamente. PARRA e SAIZ, 1996, p. 80.

Ao longo da história, vários povos distintos criaram seus próprios sistemas de numeração. Atualmente o mais utilizado no mundo é a representação decimal posicional. Esse sistema foi desenvolvido na China e na Índia, e utiliza dez algarismos para formar as quantidades, é um sistema de base 10, por isso é chamado de Sistema de Numeração Decimal (SND). Neste sistema, cada algarismo de um número ocupa uma posição chamada ordem, contada da direita para a esquerda e o valor do algarismo em cada número varia com a sua posição, por isso este sistema é chamado sistema posicional.

Quando o aluno não compreende a formação dos números através do SND e principalmente as conversões que ocorrem nessas construções, apresentará dificuldade para compreender e realizar as quatro operações, entre outras. Para mostrar isso, NUNES, T e col. (2009) realizaram uma pesquisa com crianças na faixa etária de 4 a 7 anos com atividades que envolviam a compreensão da composição aditiva. A partir dessas experiências os pesquisadores obtiveram resultados que sustentavam a tese de que uma má formação no sistema de numeração decimal prejudica o entendimento de outros conteúdos matemáticos. Sendo assim, o professor deve pensar em estratégias didáticas que visem a aprendizagem correta do sistema de numeração decimal de forma que o aluno compreenda e possa aplicar os conceitos corretamente.

## 2 MATERIAL DOURADO

O material dourado (Figura 1) é um exemplo de material manipulativo muito utilizado para o ensino do SND. Este material foi idealizado pela médica italiana Maria Montessori (1870-1952), e auxilia o aluno na compreensão do agrupamento, na formação de ordens e de classes quando estuda-se o sistema de numeração decimal. Além disso, ajuda a criança a perceber com mais facilidade os erros cometidos a utilizar o SND. Esse objeto ativa o raciocínio lógico das crianças por ser muito atrativo, causando interesse e disposição para resolver os problemas. Ademais, o professor usará esse envolvimento por partes dos estudantes para trabalhar os conceitos matemáticos, isso pode ser feito a partir da

demonstração do professor com o objeto, manipulando o material, explorando juntamente com os alunos, estimulando-os a fazerem o mesmo e, também, incentivando-os a expor suas opiniões e dúvidas. Essa troca de ideias é extremamente relevante, já que, assim, o professor poderá avaliar o aluno, observar o processo do desenvolvimento e compreensão do conteúdo matemático em estudo. Seguindo esse procedimento, aos poucos, as crianças entenderão e guardarão as noções básicas ensinadas com mais facilidade. Mas, para promover um melhor aprendizado, com o material concreto em sala de aula, o docente deve apresentar atividades para serem realizadas pelos os alunos registrando as soluções em seus cadernos, pois apenas a manipulação dos objetos pode não ser suficiente para fixação dos conteúdos.

É importante destacar que esse material no início era conhecido como “material das contas douradas”, isso porque as peças feitas eram douradas sendo utilizadas para a contagem. O atual material dourado baseia-se nas regras do nosso sistema de numeração e é constituído por cubinhos, placas e cubo grande, que representam:

- o cubo: 1 milhar, 10 centenas, 100 dezenas ou 1000 unidades;
- a placa: 1 centena ou 10 dezenas ou 100 unidades;
- a barra: 1 dezena ou 10 unidades;
- o cubinho: 1 unidade.

Figura-1 Material Dourado



Fonte: Aatoria Própria (2022)

## A POSIÇÃO DOS ALGARISMOS COMO CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

Os estudantes das séries iniciais, entrevistados em pesquisa realizada por educadores, apresentaram dificuldade na comparação entre números utilizando a linguagem escrita (PARRA e SAIZ,1996). Apesar disso, ao comparar números de iguais quantidades de algarismos, as crianças exibem argumentos através dos quais evidencia-se que elas já

descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante no SND.

Segundo Parra e Saiz (1996), na comparação de números com dois e três algarismos, as crianças apresentaram dificuldade de diferenciar qual é o maior, por exemplo, comparando 121 e 72, primeiro afirmam que 121 é maior, por ter mais números, em seguida, mudam de opinião dizendo que 72 é maior porque  $7+2=9$ . O critério que a criança usou foi a soma de valores absolutos dos algarismos. Percebe-se que há uma desorganização de entendimento que precisa ser considerada e avaliada para que sejam tomadas medidas para o ensino correto.

Quanto a posição, a criança apresenta bons argumentos quando os números possuem quantidades iguais de algarismos. A pesquisa mostrou que o aluno entende que, quando comparados dois números, o primeiro algarismo irá definir qual será o maior, entendendo a magnitude do número.

#### O papel da numeração falada

Segundo Parra e Saiz (1996), as crianças elaboram conceitualizações a respeito da escrita dos números baseando-se nas informações que extraem da numeração falada e em seu conhecimento da escrita convencional das dezenas, centenas e unidades.

Quando a professora pede para o aluno escrever um algarismo qualquer, por exemplo, 630 e ele escreve 600, e depois 30, isso mostra que ele está preso à escrita. Isso ocorre porque o estudante não entende que esse número é um número único, pois ele ainda não se apropriou dos conceitos de agrupamento presente do sistema de numeração decimal. Por que isso acontece? Porque a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada que conduz as crianças a lidarem com situações que envolvem notações não convencionais.

A Hipótese segundo a qual a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com numeração falada, conduz as crianças a resolver notações não convencionais. Por que isto ocorre? Porque a diferença da numeração escrita e da numeração falada está em que esta última não é posicional. Assim se a organização da numeração falada fosse posicional a denominação oral correspondente a 4705, por exemplo, seria “quatro, sete, zero e cinco”, no entanto, a denominação realmente utilizada para este número explícita, além dos algarismo quatro, sete, zero e cinco, as potências de dez correspondente a tais algarismos (quatro mil setecentos e cinco). (PARRA E SAIZ, 1996, p.94).

Existe uma ruptura entre a numeração falada e o sistema de numeração escrito. Isso ocorre porque a escrita tem um sistema posicional, as escritas produzidas pelas crianças da pesquisa são agrupamentos.

Quadro: Pesquisa SND

PESQUISADOR	CHRISTIA N
Como você escreveria mil e cem?	Não, cem mil.
Cem mil é um número . Mil e cem é outro número?	Não, é igual. Ao inverso.



Porém é o mesmo número? Por exemplo, se eu disser que eu tenho cem mil australes, é a mesma coisa?	Não, porque está ao contrário
E quando tenho mais? Quando tenho cem mil ou quando tenho mil e cem australes?	Quando tenho mil e cem.
E como é que você sabe se mil e cem é mais?	Porque em mil e cem mil está primeiro e o mil é maior que o cem.

fonte: Parra e Saiz, 1996, p.103

Conforme a pesquisa, foram constatados dois pontos :

- Numeração escrita é vinculada a numeração falada
- A quantidade de algarismos do sistema de numeração está relacionado à magnitude do número representado.

Segundo afirmaram as crianças, um número é maior que o outro “porque tem mais algarismos” ou “porque o primeiro é que manda”. A posicionalidade é responsável pela relação quantidade de algarismos-valor do número, dela depende também a validade do “o primeiro é quem manda” (PARRA E SAIZ;p.109).

Vejamos um exemplo de como o número escrito ocupa a mesma posição do número falado. Ele é responsável pela quantidade de algarismos e o valor que ocupa cada posição, e nesse caso é o que vai ser discutido sobre o primeiro que manda, um exemplo é o número 22, é formado pelo mesmo algarismo somente a posição é que muda, o que difere é o valor de cada um. O que difere da numeração escrita e da falada? É a posicionalidade . Assim, se a organização da numeração falada fosse posicional, a denominação oral correspondente a 4705 por exemplo, seria 40007005. No entanto existem as potências de 10 que são utilizadas para compor o número na representação escrita. Conforme a pesquisa, a numeração escrita dos alunos é vinculada a numeração falada, a quantidade de algarismos do sistema de numeração está relacionado a magnitude do número representado.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando o aluno não compreende a formação dos números através do sistema de numeração decimal, e principalmente as conversões que ocorrem nessas construções, apresentará dificuldade para compreender outros conteúdos relacionados ao SND. Além disso, o impacto negativo que isso causa no seu processo cognitivo, construções mentais importantes para o amadurecimento intelectual da criança, ficam prejudicadas. Por exemplo, a criança tende a ter dificuldade para realizar as quatro operações, entre outras.



Por isso a relevância em usar ferramentas que possibilitem o melhor entendimento de como é feito o agrupamento e o desagrupamento para a formação dos números e representação das quantidades é de extrema importância para ensinar crianças de pouca idade. Esses recursos didáticos, utilizados para ensinar as noções básicas da matemática, além de contribuir para um ensino riquíssimo, facilita o processo de aprendizagem proporcionando assim o gosto pela matemática.

Ademais, o educador precisa encontrar formas adequadas de ensinar, usando os termos matemáticos sem omitir informações importantes. Na tentativa de “facilitar” a compreensão do aluno, muitas vezes, o professor negligencia ideias que são fundamentais para o entendimento do conteúdo, prejudicando assim o aprendizado. Isso é um grande problema que acontece nas escolas brasileiras, principalmente em escolas públicas.

#### **REFERÊNCIAS:**

- PARRA, C. SAIZ. **Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. Educação **Matemática Números e Operações Numéricas**. São Paulo: Cortez Editora, 2009
- HEFEZ, A. Programa **de Iniciação Científica da OBMEP**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2005
- SANTANA, J; SANTOS, J; **O Sistema de Numeração decimal Posicional e as Operações Fundamentais; Explorando os Algoritmos com a Manipulação do Material Dourado**. Rio Grande do Sul : ULBRA, 2013



## ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA MODALIDADE REMOTA NO 9º ANO DO FUNDAMENTAL: Possibilidades e adversidades.

José Carlos Cecopierre Roldan Júnior<sup>1</sup>

Nilvan Ferreira Alves<sup>2</sup>

Jocilândia Nunes da Rocha<sup>3</sup>

Cainã da Silva Brito<sup>4</sup>

Daniela dos Reis Mota<sup>5</sup>

Lourimara Farias Barros Alves<sup>6</sup>

**Resumo:** O presente trabalho trata sobre a reflexão do ensino e aprendizagem da matemática na modalidade remota no 9º ano do ensino fundamental, cujo objetivo principal é entender as possibilidades e adversidades criadas pela modalidade de ensino atual. E para contribuir com nossa pesquisa, determinamos três ações: Analisar se os recursos utilizados no modelo remoto são suficientes para a aprendizagem; identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, pais e professores na nova modalidade; refletir sobre a introdução do ensino remoto, como estratégia para as aulas no período de pandemia. Para a coleta de dados foi elaborado e aplicado um questionário com 8 perguntas fechadas, feita pelos integrantes do grupo, para discentes, pais e docentes do ensino fundamental. Para segurança de todos os integrantes e voluntários, tendo em vista a situação em que passamos devido o Covid 19, os questionários foram realizados remotamente. Dessa maneira conseguimos desenvolver nosso projeto, sem colocar ninguém em perigo, assim, podemos refletir sobre a temática trabalhada escolhida.

**Palavras-chaves:** Modalidade remota; possibilidades e adversidades; ensino e aprendizagem na pandemia.

**Abstract:** The present project deals with the reflection on teaching and learning of mathematics in the remote modality in the 9th year of elementary school, in order to understand the possibilities and adversities created by the current teaching modality. And to contribute to our research, we determined three actions: Analyze whether the resources used in the remote model are sufficient for learning; identify the difficulties faced by students, parents and teachers in the new modality; reflect on the introduction of remote teaching, as a strategy for classes in the pandemic period. For data collection, a questionnaire with 8 closed questions was prepared and applied, made by the members of the group, for students, parents and teachers of elementary school. For the safety of all members and volunteers, in view of the situation we are in due to Covid 19, the questionnaires were carried out remotely. In this way, we were able to develop our project, without putting anyone in danger, so we can reflect on the chosen theme.

**Keywords:** Remote mode; possibilities and adversities; teaching and learning in the pandemic.

### INTRODUÇÃO

Atualmente, constata-se que o termo aula remota tem sido bem comum no cotidiano, isso ocorreu em decorrência do vírus Covid-19 que passou a ser enfrentado no ano de 2020, se tornando uma pandemia que se alastrou pelo mundo inteiro. Uma situação muito crítica e delicada fazendo parte da vida de todas as pessoas, e noticiada e acompanhadas diariamente, inclusive nas mídias virtuais, como por exemplo, no *Google* notícia (2020), que dizia: “é mais de 36 milhões de casos já confirmado no mundo”.

Assim, por questões de segurança, todas as aulas na modalidade presencial foram suspensas e com o objetivo de amenizar os malefícios acarretados pela pandemia, foi autorizada a substituição das

<sup>1</sup> Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão; joseroldan695@gmail.com

<sup>2</sup> Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão; nilvan2017@gmail.com.

<sup>3</sup> Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão; jocilandiarocha04@gmail.com

<sup>4</sup> Graduando do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão; cainan247@gmail.com

<sup>5</sup> Graduando do Curso de Pedagogia da Universidade Estadual do Maranhão; reisd1342@gmail.com

<sup>6</sup> Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, lourimaraalves@professor.uema.br

aulas presenciais pela modalidade remota, introduzindo a tecnologia e sistemas de comunicações e multimídias no ensino. Pelo fato de inserir o uso da tecnologia no ensino, fazendo o uso de aulas *on-line*, há uma má interpretação e acabam confundindo a modalidade remota com o Ensino a Distância (EAD).

Embora ambas trabalhem com uso de sistemas de ensino parecidos como, por exemplo, a utilização da internet como ferramenta principal, elas se diferenciam nos seus objetivos. Enquanto a aula remota vem com o intuito de solucionar provisoriamente a situação da suspensão das aulas presenciais, o EAD é uma modalidade que possui sistema próprio de ensino para realização de atividades e aulas, contando com um ambiente já preparado para a aprendizagem.

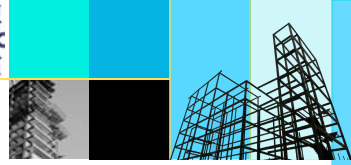
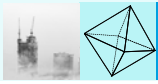
A modalidade remota também é conhecida pela sigla ERE - Ensino Remoto Emergencial, em que, pelo próprio nome podemos entender que a mesma é utilizada em situações extremas, como diz Oliveira (2020, p. 11) “[...] este modelo é utilizado em situações emergenciais, nas quais as atividades educativas presenciais precisam ser suspensas, como ocorreu no cenário mundial, em função da pandemia de Covid-19”. Porém, esse modelo não era muito conhecido e utilizado antes dos acontecimentos do ano de 2020. Fato este que gerou diversos questionamentos como:

- Será que os docentes, os discentes e as famílias iriam se adaptar a essa nova modalidade?
- Teriam condições para se adequar as aulas virtuais, pois existem algumas exigências, principalmente a necessidade de ter uma internet de qualidade?
- Disporiam de um aparelho eletrônico para acompanhar as aulas, como: celular, computador, *notebook*?
- Teriam um espaço adequado para acompanhar a aula, sem interferência externa, para melhor aproveitamento?
- Os docentes teriam conhecimentos tecnológicos suficientes para manusear os aplicativos podendo assim lecionar as aulas sem maiores dificuldades.

Na busca de poder entender melhor essa nova modalidade introduzida no ensino, e saber como foi encarada pelos envolvidos nesse processo, objetivou-se compreender as possibilidades e adversidades criadas pelo ensino remoto, assim seria possível analisar as falhas e acertos da modalidade. Foram especificadas três ações: Analisar se os recursos utilizados no modelo remoto são suficientes para a aprendizagem; compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos, pais e professores na nova modalidade; discutir sobre as vantagens e desvantagens das aulas remotas como estratégia para as aulas no período de pandemia.

## **METODOLOGIA**

Na metodologia, foi escolhida a pesquisa quanti-qualitativa, considerando que o trabalho não queria apenas recolher dados, mas analisar toda a situação que os discentes, pais e docentes estavam passando. Para Fiel (2017, p. 01) “é a pesquisa que envolve métodos quantitativos e qualitativos para a obtenção de uma análise mais profunda do assunto da pesquisa”. E para



compreender melhor a temática, foi elaborado e aplicado um questionário *online*, com oito perguntas, feita pelos pesquisadores, em duas escolas de Balsas.

Para que fosse possível entender a vivência não só dos alunos com relação às aulas remotas, mas também, entender qual a concepção dos pais e dos professores, esse questionário foi aplicado para as três categorias: alunos, pais e professores. Com o intuito de analisar opiniões e ambientes diferentes, uma escola foi da zona urbana, possuindo 61 alunos distribuídos em duas turmas, e a outra da zona rural, possuindo uma turma com doze alunos e um professor de Matemática. As instituições foram escolhidas também pelo fato da acessibilidade.

Foi necessário que os gestores e professores tivessem uma explicação com mais detalhes sobre o projeto de pesquisa e a necessidade da participação de alguns membros da comunidade escolar, o acolhimento foi agradável, mesmo que virtualmente. Logo em seguida foi possível ter acesso aos números de telefone dos professores de Matemática do 9º ano que além de responderem ao questionário repassaram o link para alunos e os pais para responderem o mesmo. Como o questionário foi aplicado virtualmente pela plataforma *Google forms*, não se obteve um número determinado de participantes, pois dependeu da acessibilidade.

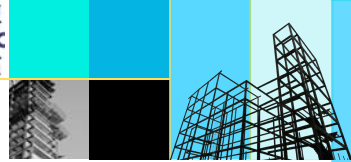
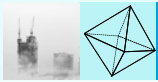
Durante a conversa com as diretoras foi comunicado a existência de adversidades que poderiam ser encontrada como, por exemplo, muitos não possuíam acesso à internet, principalmente no interior de Balsas, dessa forma não se teve a possibilidade de enviar o questionário a todos. E os professores enviaram àqueles que estavam participando ativamente das aulas, mesmo que remotas.

Após a coleta dos dados buscou-se analisar o ensino e aprendizagem da matemática na modalidade remota, procurando entender se a nova modalidade foi benéfica ou criou alguma adversidade no ensino e aprendizagem do aluno, na aula do professor e se gerou algum desacordo familiar. Assim o trabalho foi desenvolvido com os alunos do ensino fundamental, os pais e seus professores, com intuito de discutir e satisfazer todos os objetivos propostos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a realização das pesquisas para obter respostas com relação ao ensino aprendizagem e suas adversidades, procurou-se entender também na prática, como estava sendo lidar com aquela nova realidade. Através da acessibilidade a duas diretoras de instituições distintas, uma na zona rural e outra na zona urbana, ambas da cidade de Balsas- MA, tivemos como proposta a realização de um questionário *on-line*, com perguntas abertas e fechadas, e as mesmas se disponibilizaram a ajudar, dessa forma, ela informou o número de *whatsapp* dos professores de Matemática do 9º ano, que também se voluntariaram a ajudar com a pesquisa juntamente com alguns alunos e pais de cada instituição.

Para que fosse possível fazer de forma remota, se fez necessário enviar pelo *whatsapp* o link com o questionário criado pela plataforma *google forms*. Este link foi direcionado para os



entrevistados do interior e para os da zona urbana. Como primeiro passo teve a parte da identificação. No interior nove pessoas participaram do questionário, sendo dessas 55% pais dos alunos, 33% discentes e 12% docentes. Já na zona urbana doze pessoas participaram, sendo 58% pais dos alunos, 25% discentes e 17% docente.

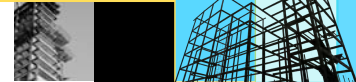
Para iniciar as perguntas, foi questionado se estavam gostando da modalidade remota e o ponto de vista de cada grupo. No interior apenas 33,3% estavam gostando da modalidade, contudo 66,7% clicaram na opção não. Enquanto no grupo da cidade, 50% disseram que sim e os outros 50% clicaram na opção de não. Percebeu-se que enquanto no interior os dados apontam que as maiores partes dos voluntários não estavam gostando do novo sistema de ensino, na zona urbana notou-se que há uma imparcialidade, pois metade afirmou gostar e a outra metade não aprovou o novo sistema.

Como a segunda pergunta, buscou-se entender se sentiram dificuldade em se adaptar com o novo modelo de aula, e caso a resposta fosse sim, pedia que explicassem quais seriam essas dificuldades. No link direcionado ao público do interior, obtiveram-se os seguintes resultados, 78% sentiram dificuldade e 22% não sentiu. Ao todo cinco pessoas justificaram sua resposta, sendo eles um professor, dois alunos e dois pais. O professor de Matemática disse que “pela falta de compromisso de alguns alunos” (PROF 01). Um aluno respondeu “principalmente nas horas de tirar dúvida” (ALUNO 01), já outro respondeu que “o meio de fazer as atividades” (ALUNO 02). Já na visão dos pais tivemos, “primeiro eu trabalho no horário da aula do meu filho, fico preocupada em deixá-lo só e principalmente por causa do uso do celular, por que só tem o meu na casa” (PAIS 01) e “a dificuldade da minha foi não poder conversar com o professor, quando não consegue resolver uma questão” (PAIS 02).

Já os resultados da escola da cidade sobre a segunda questão, 75% responderam sim e 25% que não, todavia, apenas quatro pessoas, justificaram suas escolhas. O professor de Matemática deu a seguinte resposta, “sim, o uso das ferramentas” (PROF 01). Um dos pais justificou, “sim, dificuldades ao acesso à internet” (PAIS 01), outro disse “sim, falta de preparação do aluno, falta de boas práticas para a tutoria online” (PAIS 02) e “sim em primeiro lugar essa maneira do ensino online que não me agrada nem um pouco” (PAIS 03).

De acordo com as porcentagens mostradas nos parágrafos acima, a maioria dos participantes, tanto da zona rural como na zona urbana, sentiram sim dificuldades ao se adaptar com as aulas no modo remoto. Destacou-se uma das respostas que aborda sobre tirar suas dúvidas, que como diz Rothen (2020, p. 08) “muitas vezes, uma dúvida pequena, que poderia ser sanada facilmente com a consulta a uma pessoa, torna-se um problema que parece intransponível”. Nessa questão já é possível perceber que a realidade de ambas as partes é próxima.

Para aprofundar um pouco mais, levando em consideração as aulas presenciais, ao se comparar com a modalidade remota, foi perguntado o nível de diferença na qualidade do ensino e aprendizagem de Matemática. Enquanto no interior 11,1% consideram alto o grau de diferença,



55,6% médio e 33,3% disse ser baixo. Já na cidade um total de 33,3% consideram médio o nível dessa diferença, 66,7% consideram baixo e ninguém considerou o nível de ensino alto.

De acordo com os dados mostrados acima, tanto na zona rural quanto na cidade avaliam a qualidade de aprendizado da Matemática como média e baixa no sistema de ensino remoto. Destacando que na zona urbana ninguém avalia como alto a qualidade do mesmo. Um grande desafio para os professores nessa modalidade é manter a mesma qualidade de ensino do presencial, com adversidades como a falta de recursos, de um espaço físico preparado para lecionar, manter contato com seus alunos entre outras situações.

A pandemia Covid-19 foi uma surpresa para o mundo, sendo necessária a utilização do ensino remoto, se tornando uma novidade para todos. Com isso fez-se a quarta indagação, pois era preciso constatar se os recursos que os mesmos tinham foram suficientes para suprir as necessidades do ensino e aprendizagem na Matemática, e ainda ficou em aberto um espaço para eles escreverem caso a resposta fosse negativa.

No interior 56,5% responderam que sim e 44,4% disseram que não. Apenas quatro voluntários escreveram, sendo esses um aluno e três pais. O aluno justificou, “pois não estou entendendo nada” (ALUNO 01). A resposta do primeiro pai foi, “pois, os alunos não estão aprendendo o bastante” (PAIS 01). Já o segundo pai disse “acredito que não, senti que a compreensão do meu filho não tem sido a mesma, por mais que eu insista, eu não tenho como ensiná-lo, pela questão do nível do ensino” (PAIS 02). O terceiro pai respondeu, “a minha necessidade é só a internet muito ruim, então por isso minha filha teve que ir para a cidade” (PAIS 03).

Já com as respostas colhidas na cidade, 8,3 % votaram em sim e 91,7% votaram em não. Quatro entrevistados justificaram suas respostas, um professor, um aluno e dois pais. O professor respondeu “não, internet ruim, celular e também outras ferramentas, nem todas eram compatíveis com o celular” (PROF 01). Já na visão do aluno “não, por que a matemática é uma matéria que exige muita explicação” (ALUNO 01). O primeiro pai justificou, “não por eu não ter ensino suficiente para acompanhar essa nova forma de ensino online” (PAIS 01), e o segundo pai disse, “não, pois tenho 2 filhos com idades e anos diferentes, e não tem celular e internet para acompanhar para forma remota” (PAIS 02).

Aqui foi encontrada uma realidade diferente, onde percebeu-se que um pouco mais da metade considera que sim, que os recursos estão suprindo a necessidade, todavia, na zona urbana o cenário se mostrou ser diferente, pois se tratavam de onze pessoas, num total de doze, que relataram que os recursos não satisfaziam as necessidades. Ressaltando que apenas quatro pessoas relataram suas maiores dificuldades, dentre elas uma citada é a internet. E pela situação do número de pessoas que marcaram que não possuíam recursos que satisfaziam todas as necessidades para a aula, numa nova modalidade têm como mais marcantes sua dependência em muitas situações dos recursos tecnológicos



para o seu desenvolvimento, fica o questionamento, como fica o aprendizado do aluno nessa situação?

Logo em seguida se fez necessário entender se existia alguma necessidade em melhorar o ensino da Matemática durante o período remoto, e caso a resposta fosse sim, tinha uma área para que o voluntário pudesse opinar. No interior 55,6% responderam que sim e 44,4% disseram que não, e dessas, quatro pessoas expressaram suas respostas com um professor, um aluno e dois pais. O professor disse que “mais formações continuadas voltadas para o professor de Matemática” (PROF 01). Já o aluno teve como resposta “as explicações” (ALUNO 01). O primeiro pai “precisou avançar mais” (PAIS 01), e o segundo pai opinou dizendo “na minha visão tudo foi muito inesperado, ninguém estava preparado, não sei se existe algo a ser mudado que potencializa o aprendizado. O ideal é que volte tudo ao normal” (PAIS 02).

Já nos dados da cidade 58,3% responderam que sim, 41,7% que não. Nessa seis voluntários, um professor, dois alunos e três pais opinaram. O docente respondeu que “uma aula diferenciada, com contribuições para uma aprendizagem de qualidade, como aulas pelo *ZOOM*, vídeos aulas, vídeos que não sejam muito longos, *links* e pelo *WhatsApp*” (PROF 01). Já o primeiro aluno falou que, “voltar as aulas normais” (ALUNO 01), e o segundo disse que “mais explicação” (ALUNO 02). O primeiro pai expressou que, “algo mais interativo e lúdico, principalmente para as crianças” (PAIS 01), já o segundo pai respondeu “os professores poderiam procurar novo métodos para facilitar o aprendizado dos alunos com maior dificuldade” (PAIS 02), e o terceiro pai opinou dizendo, “mais professores qualificados em Matemática” (PAIS 03).

Ambas as partes sentiram que havia uma necessidade na melhoria de ensino voltado para a Matemática. Dentro de alguns aspectos listados em todos os questionários a didática foi o mais citado entre eles como melhoria para o ensino. Nessa nova etapa o docente precisaria se reinventar para conseguir lecionar para seus alunos que se encontravam numa situação nova sem saber como agir, precisando de um guia para saber como trabalhar, nisso entraria o trabalho do professor. E como mostrando na questão anterior, onde a maior parte dos voluntários tanto da zona rural e cidade opinaram sobre a qualidade do ensino da Matemática que estava média e baixa, fica visível a necessidade da melhoria da aprendizagem nesse sistema.

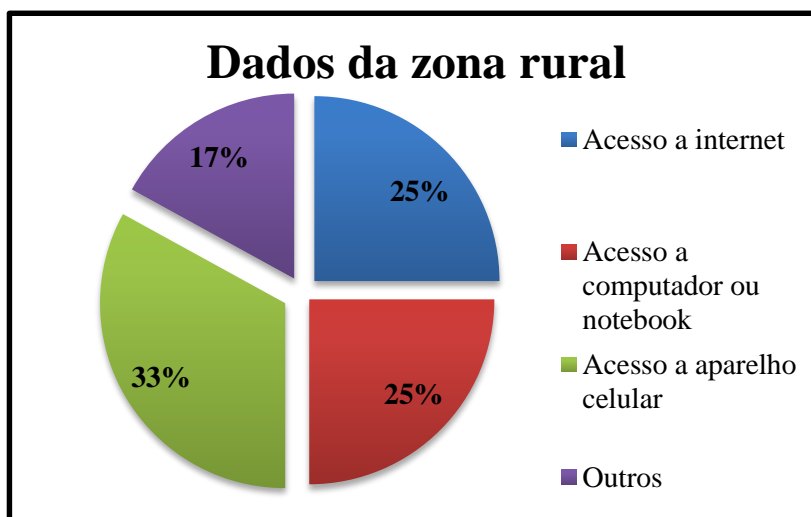
Na sexta questão se procurou entender se todos os participantes já tinham conhecimento sobre o sistema remoto antes da pandemia. Com os participantes do interior 11,1% responderam que sim e 88,9% que não. Já na zona urbana 33,3% opinaram que sim e 67,7% que não.

Nessa pergunta, como foi uma situação repentina, já se esperava um maior número de entrevistados respondessem não conhecer esse sistema de ensino, pegou todos de surpresa por causa da pandemia, e com a mudança para um novo sistema de ensino, como forma de prevenção, onde muitos desconheciam a modalidade, o que era? Como funcionava? Como seriam as aulas, atividades, provas? Entre outros questionamentos, de pais, alunos e professores.



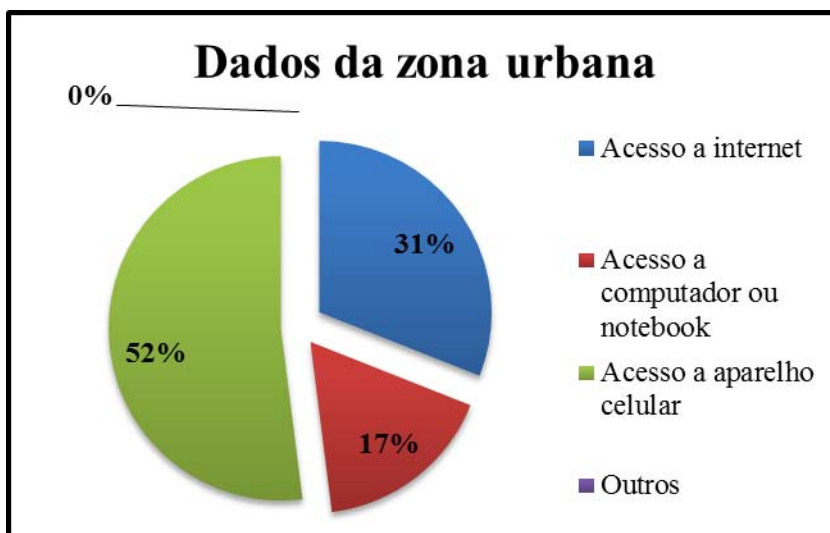
Já na sétima pergunta, os voluntários iriam encontrar uma questão diferente. Essa foi a única de múltipla escolha, podendo marcar mais de uma opção. Nela buscaram-se entender quais estavam sendo as maiores adversidades enfrentadas por eles, enquanto os recursos tecnológicos, que estavam sendo utilizados no ensino remoto. Para o interior e zona urbana se teve os seguintes dados:

**Gráfico 1** – Dados recolhidas da 7ª questão da zona rural



Fonte: Elaborados pelos autores

**Gráfico 2** – Dados recolhidas da 7ª questão da zona urbana



Fonte: Elaborados pelos autores

Uma das maiores dificuldades constatadas em ambas as realidades predominaram os aparelhos celulares e acesso a internet de qualidade, que são os principais recursos utilizados por todos nessa metodologia de ensino, que em uma realidade onde o discente se depara com uma dessas adversidades, trará a mercê todos os seus estudos numa modalidade *on-line*, que depende muito dos recursos tecnológicos para seu andamento.



Pra finalizar o questionário se teve como indagação se o ambiente de estudos e ensino domiciliar poderia interferir na qualidade do aprendizado. No interior 77,8% responderam que sim e 22,2% que não. Na zona urbana 91,7% que sim e 8,3% que não.

Em ambas as situações foram constatadas uma predominância onde uma grande maioria relata que o ambiente de estudo faz a diferença na hora da aprendizagem, destacando a zona urbana que 91,7% disseram que sim. Nisso foi possível perceber que muitos discentes e docentes não têm uma estrutura física adequada para a resolução de uma atividade, para o planejamento de uma aula, correção de provas, e para outros devidos fins.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A princípio foi imaginada a existência de uma adversidade bem maior do que a enfrentada, com um índice de não aprovação total, identificou-se que de acordo com os dados houve uma parcela considerável de aceitação. No entanto, se percebeu que assim como houve aprovação de alguns, também é possível encontrar boa parte das respostas que mostram um déficit no aprendizado e na adaptação à nova realidade, como esperado alguns por falta de internet, aparelho eletrônico que facilite a conexão com aula. Alguns alunos se queixaram da falta de acesso aos professores para tirar dúvidas.

Nas questões elaboradas se teve a intenção de saber da existência das adversidades e possibilidades, embora não tenha respostas descrevendo quais são as possibilidades, mas que dentro das questões, por exemplo, na parte em que é questionado se estão gostando da nova modalidade, e metade dos voluntários marcaram a opção sim, conseqüentemente estavam conseguindo se adaptar à nova realidade. Então, mesmo com todas as adversidades concluiu-se que uma pequena parte ainda assim conseguiu se adaptar ou até mesmo evoluir à modalidade remota.

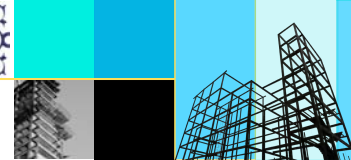
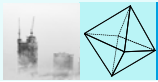
### REFERENCIAS

Google notícias. **Coronavírus (COVID-19)**. GitHub. Baltimore (EUA). 2020. Disponível em: <https://news.google.com/covid19/map?hl=ptBR&mid=%2Fm%2F01hd3y&gl=BR&ceid=BR%3Apt-419>. Acessado em: 10 Nov. 2020.

FIEL, Carolina. **O que é Pesquisa Quali-Quantitativa?** 2017. Disponível em: <https://pt.lifeder.com/pesquisa-quali-quantitativa/>. Acessado em: 15 set. 2019.

ROTHEN, José Carlos *et al.* AULAS REMOTAS EM TEMPO EMERGENTE: relato de experiência com a turma **∴avaliação institucional da educação∴** na ufscar. **Cadernos da Pedagogia**, [s. l], v. 14, n. 29, p. 97-107, out. 2020.

OLIVEIRA, Maria do Socorro de Lima, et al. **Diálogos com docentes sobre ensino remoto e planejamento didático**. Universidade Federal Rural de Pernambuco (EDUFRPE), Recife, 2020.



## EVOLUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: DO TRIÂNGULO RETÂNGULO AO TRIEDRO TRI-RETANGULAR.

Marlos Luis Rocha Martins<sup>1</sup>  
Ivanildo Silva Abreu<sup>2</sup>  
Elder Abreu Junior<sup>3</sup>  
Celina Amélia da Silva<sup>4</sup>

**Resumo:** O presente artigo tem como objetivo apresentar a demonstração da generalização do Teorema de Pitágoras. Na dedução, algumas relações da Geometria Plana e semelhança de triângulos são utilizadas. Em seguida, considera-se um prisma, um paralelepípedo retângulo, aplica-se duplamente o Teorema de Pitágoras clássico em suas arestas. E finalmente, tomou-se para demonstração um tetraedro com um triedro tri-retangular, sendo utilizadas o cálculo das superfícies das faces laterais. O teorema de Pitágoras é uma relação matemática muito aplicada na Geometria Euclidiana relacionando a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras; Generalização; Triedro tri-retângulo.

**Abstract:** This article aims to present the demonstration of the generalization of the Pythagorean Theorem. In the deduction, some relationships of Plane Geometry and similarity of triangles are used. Next, consider a prism, a rectangular parallelepiped, doubly apply the classical Pythagorean Theorem on its edges. Finally, a tetrahedron with a tri-rectangular trihedron was used for demonstration, using the calculation of the surfaces of the lateral faces. The Pythagorean theorem is a mathematical relationship widely applied in Euclidean Geometry relating the hypotenuse and the legs of a right triangle.

**Keywords:** Pythagoras Theorem; Generalization; Tri-rectangle trihedron.

### 1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras é um dos mais conhecidos na educação básica, sendo aplicado com muita frequência em questões que envolvem triângulos retângulos. No entanto, em relação às questões de geometria em geral, por costume, são tendencioso a limitar-se somente sua aplicação em figuras planas.

Dessa forma, analisando a história da generalização do Teorema de Pitágoras, o presente artigo visa apresentar a demonstração da generalização desse teorema, utilizando de sua demonstração algébrica como suporte. Contudo, a demonstração da generalização será algébrica, mas será utilizado de sólidos geométricos como base para se obter a relação métrica de uma terceira dimensão.

Ressaltamos que o termo “generalizar” refere-se à ideia de utilizar relações métricas imediatas para se relacionar e calcular outra(s) medida(s) em sólidos geométricos, com a mesma naturalidade que se é feita em figuras planas. Mas, geralmente, em sólidos, podem-se considerar figuras planas geradas por secções de

---

<sup>1</sup> Mestrando do programa PROFMAT/UEMA. solramluis@hotmail.com

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, CESBA/PROFMAT/UEMA. ivanildoabreu@yahoo.com.br

<sup>3</sup> CE Anjo da Guarda e Colégio Militar 2 de Julho. ednaiseabreu@gmail.com

<sup>4</sup> Departamento de Matemática e Física, CESC/PROFMAT/UEMA celina\_amelia@yahoo.com.br

planos em sólidos, podendo, assim, utilizar o teorema em sua forma mais popularmente conhecida.

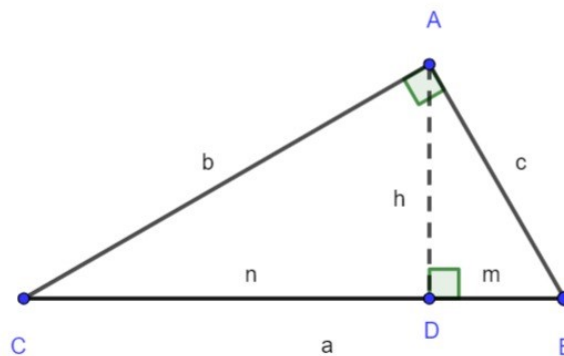
## 2 EVOLUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS ATÉ O TRIEDRO TRI-RETANGULAR

De acordo com um estudo feito por Teixeira (2003), ao longo da história, o Teorema de Pitágoras começou como uma relação numérica especial, que posteriormente, evoluiu para um sentido geométrico sendo tratado de forma algébrica. Este, por sua vez, possui inúmeras maneiras de se demonstrar, e frequentemente confunde-se a demonstração algébrica com a geométrica, pois uma completa a outra.

Considerando que em inúmeras variações da demonstração do Teorema de Pitágoras, a álgebra complementa a geometria, estuda-se a evolução do Teorema de Pitágoras partindo da demonstração algébrica, isto é, utiliza-se relações métricas no triângulo retângulo. E com base no sentido geométrico, este será generalizado.

São conhecidas da Geometria Plana, algumas importantes relações entre os elementos métricos de um triângulo retângulo. Para isso, considere um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa um segmento  $BC$  e os catetos  $AC$  e  $AB$  que têm medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente (Figura 1).

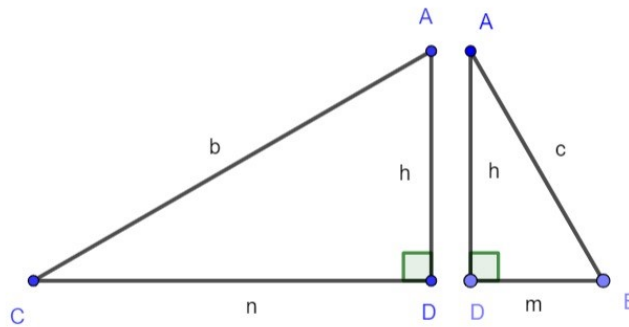
Figura 1 - Triângulo Retângulo



Fonte: Autoria própria

A altura relativa à hipotenusa,  $AD$  tem medida  $h$  e determina os segmentos  $BD$  e  $DC$ , de medidas  $n$  e  $m$ , que são as projeções ortogonais dos catetos  $AC$  e  $AB$  sobre a hipotenusa. Note que  $n + m = a$ . Os triângulos  $ABC$ ,  $DCA$  e  $DAB$  são semelhantes conforme mostra a figura 2,

Figura 2 - Triângulos retângulos



Fonte: Autoria própria

e  $h$  é média geométrica entre  $n$  e  $m$ . Decompõe-se o triângulo retângulo  $ABC$  em dois (02) triângulos retângulos  $DCA$  e  $DAB$  para que sejam escritas as seguintes proporcionalidades entre os lados homólogos:

O triângulo  $ABD$  é semelhante ao triângulo  $CBA$ :

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \quad (1)$$

O triângulo  $ACD$  é semelhante ao triângulo  $BCA$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \quad (2)$$

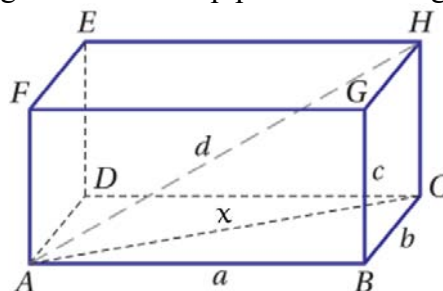
As relações (1) e (2) são enunciadas numa única proposição: “cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção na hipotenusa”. (DOLCE e POMPEO, 2013, p.2017).

$$(1) + (2) \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \quad (3)$$

A relação (3) é chamada de “Teorema de Pitágoras”.

Para dar continuidade ao nosso propósito, considere agora um prisma, em particular, um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a, b$  e  $c$ . Para estender de forma natural a três dimensões, o espaço  $R^3$ , calcula-se a diagonal deste paralelepípedo retângulo. Para isso, utiliza-se duplamente o Teorema de Pitágoras dado pela relação (3), conforme a Figura (3) a seguir. Para isso, assumo-se que  $AC = x$  no primeiro triângulo retângulo  $ABC$ .

Figura 3 - Paralelepípedo reto-retângulo



Fonte: (QUERGINALDO, 2012, p.22)

Na Figura acima, tem-se o segmento  $AC$  que corresponde à diagonal da face  $ABCD$  ou  $(EFGH)$ . Aplicando-se pela primeira vez o Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$a^2 + b^2 = x^2$$

Agora considere o segundo triângulo retângulo  $ACH$  de hipotenusa  $d$ , e catetos  $x$  e  $c$ . Mais uma vez, aplica-se a relação (3) que é o Teorema de Pitágoras e obtém-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \quad (4)$$

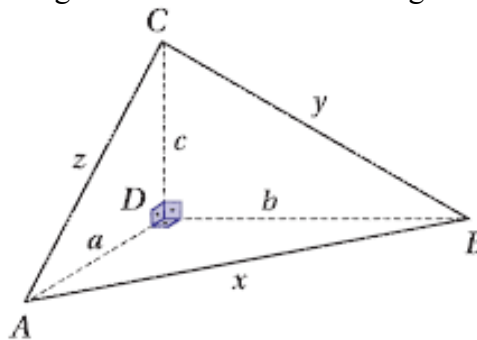
Observe que para a obtenção do Teorema de Pitágoras no espaço, fez-se uso apenas de suas arestas. E, finalmente, para concluir este trabalho, faz-se uma outra generalização do Teorema de Pitágoras, desta vez usando uma pirâmide triangular que possui um ângulo triédrico triretângulo. A Figura (4) faz referência a este Triedro Tri-Retangular:

### 2.1 Uma Generalização do Teorema de Pitágoras

“Num Triedro Tri-Retângulo, o quadrado da área do triângulo  $ABC$  é igual à soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos”. (LIMA et al, 2006, p.81).

Para essa generalização, considere a Figura (4) que é um tetraedro com um triedro tri-retangular.

Figura 4 - Tetraedro Tri-retângulo



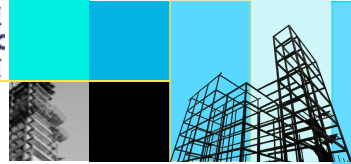
Fonte: (QUERGINALDO,2012, p.23)

Uma generalização do Teorema de Pitágoras no Espaço, que advém de maneira semelhante ao Teorema de Pitágoras clássico é apresentada por esse tetraedro.

Demonstração:

Nesta prova assume-se que  $X$  seja a área da face frontal do triângulo  $ABC$ , ou seja, deve-se provar que:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = X^2 \quad (5)$$



Sejam  $S_1, S_2$  e  $S_3$  as áreas dos triângulos retângulos  $BCD, ACD$  e  $ABD$  dadas por:

$$S_1 = \frac{bc}{2} \Rightarrow 2S_1 = bc \Rightarrow (bc)^2 = (2S_1)^2 \Rightarrow b^2c^2 = 4S_1^2 \quad (6)$$

$$S_2 = \frac{ac}{2} \Rightarrow 2S_2 = ac \Rightarrow (ac)^2 = (2S_2)^2 \Rightarrow a^2c^2 = 4S_2^2 \quad (7)$$

$$S_3 = \frac{ab}{2} \Rightarrow 2S_3 = ab \Rightarrow (ab)^2 = (2S_3)^2 \Rightarrow a^2b^2 = 4S_3^2 \quad (8)$$

Somando as Equações (6), (7) e (8), obtém:

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = 4S_1^2 + 4S_2^2 + 4S_3^2 = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \Rightarrow$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \quad (9)$$

Daí, segue que para completar a demonstração, deve-se mostrar que

$$X^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \quad (10)$$

A fórmula de Heron será utilizada, visto que todos os três triângulos  $BCD, ACD$  e  $ABD$  são retângulos. A área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados é expressa por:

$$X = \sqrt{p(p-x) \cdot (p-y)(p-z)} \quad (11)$$

Sendo

$$p = \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow X^2 = p(p-x) \cdot (p-y)(p-z) =$$

$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - z\right) =$$

$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y+z-2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y+z-2y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y+z-2z}{2}\right) =$$



$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{-x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{x-y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y-z}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{16}(x+y+z) \cdot (-x+y+z) \cdot (x-y+z) \cdot (x+y-z) =$$

$$\frac{1}{16}(y^2 + z^2 + 2yz - x^2) \cdot (x^2 + xy - xz - xy - y^2 + yz + xz + yz - z^2) \Rightarrow$$

$$X^2 = \frac{1}{16}(y^2 + z^2 + 2yz - x^2) \cdot [2yz - (y^2 + z^2 - x^2)] \quad (12)$$

Aplicando-se o teorema de Pitágoras clássico (Equação 3), nos três triângulos retângulos  $BCD$ ,  $ACD$  e  $ABD$ , obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} (I): y^2 = b^2 + c^2 \\ (II): z^2 = a^2 + c^2 \\ (III): x^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (13)$$

Somando membro a membro a Eq. (13), tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad (14)$$

Substituindo as Eqs. (13 - I, 13 - II, 13 - III) na Eq. (14), temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 + c^2) = 2x^2 + 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = -x^2 + y^2 + z^2 \quad (15)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(z^2 + b^2) = 2z^2 + 2b^2 \Rightarrow 2b^2 = x^2 + y^2 - z^2 \quad (16)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(y^2 + a^2) = 2y^2 + 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = x^2 - y^2 + z^2 \quad (17)$$

A substituição da Eq. (15) na Eq. (12) resulta em,

$$X^2 = \frac{1}{16}(2c^2 + 2yz)(2yz - 2c^2) = \frac{4}{16}(yz + c^2)(yz - c^2)$$

$$X^2 = \frac{1}{4}(y^2z^2 - c^4) \Rightarrow 4X^2 = y^2z^2 - c^4 \quad (18)$$

Agora, utiliza-se a Eq. (13) na Eq. (18) e tem-se

$$4X^2 = (b^2 + c^2)(a^2 + c^2) - c^4$$

$$4X^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + c^4 - c^4$$

$$4X^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$$

$$4X^2 = (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$$

$$\Rightarrow X^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$$

Finalmente conclui-se a demonstração generalizada do Teorema de Pitágoras.

Exemplo:

Um terreno retangular será dividido ao meio pela sua diagonal, formando dois (02) triângulos retângulos. A metade desse terreno será cercada com quatro (04) fios de arame farpado. Sabendo que as dimensões desse terreno são de 20 metros de largura e 21 metros de comprimento, qual será a metragem mínima gasta de arame?

Solução:

Uma vez que esse terreno é retangular, encontra-se a diagonal desse retângulo aplicando-se o Teorema de Pitágoras clássico que é dado pela expressão  $b^2 + c^2 = a^2$ , sendo  $a$  hipotenusa e  $b, c$  os catetos. Daí segue que  $20^2 + 21^2 = a^2 \Rightarrow a = 29$ . Sabendo que as dimensões do triângulo obtido são 21 m e 29 m, calcula-se seu perímetro  $P = 29 + 20 + 21 = 70$  m. Uma vez que existe quatro (04) fios de arame farpado, o perímetro deve ser multiplicado por 4. Daí, encontra-se a metragem de arame farpado necessária que é:  $70 \cdot 4 = 280$  m.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste artigo, foi possível estudar algumas relações importantes da Geometria Plana, tais como: semelhança de triângulos e algumas relações métricas no triângulo retângulo para que pudéssemos fazer uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras. Em seguida, tomou-se um prisma, em particular um paralelepípedo retângulo e com uso de suas arestas aplicou-se o Teorema de Pitágoras para calcularmos a sua diagonal (Teorema de Pitágoras no espaço) e, por último, conclui-se este trabalho, fazendo-se uma generalização do Teorema de Pitágoras usando o Triedro Tri-Retangular.



## REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, v.9, **Geometria plana**. São Paulo: Editora Atual, 9 ed, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, v.10, **Geometria espacial**. São Paulo: Editora Atual, 7.ed, 2013.

LIMA, Elon Lages; PINTO, Paulo Cezar. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas Elementares**, 12 ed - Rio de Janeiro, SBM, 2006.

TEIXEIRA, Adriana Machado Barrim et al. **Um estudo didático do pitágoras teorema de em classe de 8ª série**. 2003.

QUERGINALDO, José Bezerra. Teorema de Pitágoras no Espaço. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.79, p. 22-24, 2012.



## METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA EM TEMPOS DE PANDEMIA POR COVID-19: o ENEM e o SIPEM em questão

Yasmin Kellen Louzeiro Ferreira<sup>1</sup>  
Antonio José da Silva<sup>2</sup>

**Resumo:** Este artigo investiga o impacto e a eficácia das metodologias ativas no ensino de matemática durante a pandemia de COVID-19. Utilizando uma abordagem qualitativa, o estudo examina várias estratégias pedagógicas implementadas em ambientes de aprendizagem remota e híbrida. Dentre as metodologias ativas exploradas, a aprendizagem baseada em problemas (ABP), gamificação, sala de aula invertida e ensino híbrido são destacadas como práticas inovadoras que promovem o engajamento e a participação ativa dos alunos. A análise dos dados coletados revela que, apesar dos desafios iniciais na adaptação a essas metodologias, houve um aumento significativo na motivação e no desempenho dos alunos. O artigo também discute a necessidade de formação contínua dos educadores para a efetiva implementação dessas abordagens pedagógicas. Os resultados sugerem que as metodologias ativas são ferramentas valiosas para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, especialmente em tempos de crise educacional.

**Palavras-chave:** Metodologias Ativas, Ensino de Matemática, Educação Durante a Pandemia, Aprendizagem Baseada em Problemas, Ensino Híbrido.

**Abstract:** This article investigates the impact and effectiveness of active learning methodologies in mathematics education during the COVID-19 pandemic. Employing a qualitative approach, the study examines various pedagogical strategies implemented in remote and hybrid learning environments. Among the active methodologies explored, problem-based learning (PBL), gamification, flipped classroom, and blended learning are highlighted as innovative practices that promote student engagement and active participation. Data analysis reveals that despite initial challenges in adapting to these methodologies, there was a significant increase in student motivation and performance. The article also discusses the need for continuous training of educators for the effective implementation of these pedagogical approaches. The findings suggest that active learning methodologies are valuable tools to enrich the teaching and learning process, especially in times of educational crisis.

**Keywords:** Active Learning Methodologies, Mathematics Education, Education During the Pandemic, Problem-Based Learning, Blended Learning.

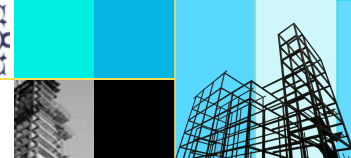
### 1 INTRODUÇÃO

Por muito tempo, notava-se no ambiente escolar que as aplicações dentro da sala de aula eram abordagens tradicionais, onde o professor é visto como autoridade e os alunos, meros espectadores passivos (BACICH; MORAN, 2018). Além disso, sempre foi perceptível a dificuldade da maioria dos alunos quando se trata de matemática (BERBEL, 2012). Dessa forma, nada melhor do que a abordagem das metodologias ativas.

---

<sup>1</sup> Licenciada em Matemática (UFMA). yasmin.louzeiro@discente.ufma.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Matemática (UFMA). antonio.silva@ufma.br



Segundo Oliveira et al. (2020), atualmente, buscam-se diversas maneiras para que haja o engajamento dos alunos com a matemática, dentre elas, as aplicações das metodologias ativas dentro da sala de aula, buscando um maior envolvimento do aluno e seu protagonismo. Nesse contexto, o professor atua como guia, proporcionando um processo de ensino-aprendizagem para ambos.

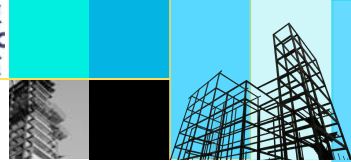
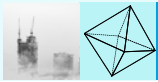
As metodologias ativas proporcionam vastas experiências, segundo pesquisas, gerando vários impactos positivos tanto para os alunos quanto para os docentes. Tendo isso em vista, propusemo-nos a elaborar a presente pesquisa, pois acreditamos na melhoria do ensino de matemática com um maior engajamento dos discentes e na quebra de qualquer paradigma de que a matemática é detestável e até mesmo complicada (PEREIRA; PEREIRA, 2022; ALMEIDA, 2020).

Dessa forma, a nossa percepção do papel das metodologias ativas no ensino de matemática é incentivar a criação e o desenvolvimento de métodos lúdicos e interativos com o objetivo de agir em prol da aprendizagem, por fim, sair da monotonia, afinal, o ‘como ensinar’ sempre foi um desafio para os educadores da área.

Nesta pesquisa, foram analisados os textos sobre as principais metodologias ativas no ensino de matemática, obtidos a partir de dois eventos acadêmicos: o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) em sua décima terceira edição e o Simpósio Internacional de Educação Matemática (SIPEM) nas edições VII e VIII. Estes foram eventos nacionais e internacionais organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em um período anterior à pandemia de COVID-19 e durante a pandemia.

Tomando as percepções citadas até aqui, este trabalho justifica-se na compreensão da necessidade que as metodologias ativas possuem na evolução pessoal de todos os envolvidos e o que mudou na aplicação antes e depois da pandemia segundo as pesquisas. Além disso, sabemos que parte das metodologias ativas está ligada ao uso da tecnologia, e sabemos que a realidade de muitos alunos da rede pública é limitada. Desse modo, o presente trabalho caminha em direção à pesquisa bibliográfica de dois eventos que acontecem a cada três anos: o ENEM e o SIPEM.

Cabe a nós investigar os efeitos e as dificuldades de aplicar as metodologias ativas nas ações de ensino no período anterior e durante a pandemia, tanto para os docentes quanto os discentes. Dessa forma, a finalidade central deste trabalho é a investigação da

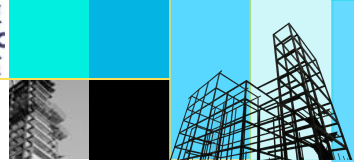
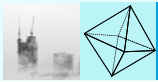


aplicação dessas metodologias, por meio da investigação dos trabalhos apresentados nos eventos ENEM e SIPEM. Deseja-se conhecer quais as metodologias mais evocadas nas pesquisas? Como essas pesquisas se distribuem entre o período anterior à pandemia e durante a pandemia? Quais as principais dificuldades de aplicar as metodologias ativas para alunos no ensino híbrido nesse período de pandemia? Dessa forma, a partir de tais questões, os objetivos são apresentados a seguir.

Esta pesquisa se propõe a analisar criticamente e de forma descritiva os trabalhos apresentados nos respectivos eventos SIPEM 2018, ENEM 2019 e SIPEM - 2021. Busca-se conhecer como ocorre a aplicação e planejamento das principais metodologias ativas para o ensino de matemática antes e durante a pandemia por COVID-19. Especificamente propõe-se: conhecer as principais metodologias ativas aplicadas para o ensino de matemática; descobrir as principais dificuldades de aplicar metodologias ativas no ensino híbrido no período de pandemia; descobrir as principais mudanças e dificuldades das metodologias antes e depois da pandemia; analisar os resultados através de pesquisa e o envolvimento dos alunos após aplicação das atividades e seus desempenhos

## 2 AS METODOLOGIAS ATIVAS E ENSINO DE MATEMÁTICA

Embora o termo "metodologias ativas" tenha se popularizado mais recentemente, suas origens remontam à década de 1980. Essa abordagem pedagógica é centrada na ideia de transformar os alunos de meros receptores passivos de conhecimento para agentes ativos de sua própria aprendizagem dentro da sala de aula. O uso do plural em "metodologias ativas" é intencional, indicando que ela não se limita a uma única ferramenta ou técnica, mas abrange uma variedade de práticas. O principal objetivo dessas metodologias é fomentar uma aprendizagem significativa, que vai além das interações tradicionais entre professor e aluno, envolvendo também a relação entre os próprios alunos e com os recursos e materiais disponíveis. Atualmente, um dos maiores desafios enfrentados no cenário educacional é a busca contínua por metodologias inovadoras. Estas visam superar as limitações do ensino tradicional e teórico, buscando formar indivíduos não apenas capacitados academicamente, mas também éticos, críticos, reflexivos, transformadores e humanizados (BACICH; MORAN, 2015).



Segundo Bacich e Moran (2018), as metodologias categorizadas como ativas e de maior destaque são: Aprendizagem Baseada em Problemas e Projetos, Gamificação, Sala de Aula Invertida e Ensino Híbrido. Nesse contexto, torna-se necessário conhecê-las e analisá-las.

As metodologias ativas visam uma forma de engajamento integral para o aluno. É uma forma de perpetuar a autonomia do aluno. Berbel (2012, p. 29) acrescenta que essa característica de autonomia é fundamental:

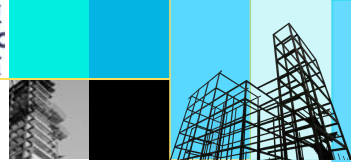
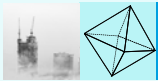
O engajamento do aluno em relação a novas aprendizagens, pela compreensão, pela escolha e pelo interesse, é condição essencial para ampliar suas possibilidades de exercitar a liberdade e a autonomia na tomada de decisões em diferentes momentos do processo que vivencia, preparando-se para o exercício profissional futuro. (BERBEL, 2012, p.29).

A Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) é uma metodologia que transforma situações cotidianas em conhecimento, incentivando os alunos a aplicarem a teoria na prática, conforme explicado por Débora Noemi. Esta abordagem surgiu na *Case Western Reserve University Medical School* nos EUA, com forte presença na Escola de Medicina da Universidade de *McMaster* no Canadá por volta de 1960. A ABP engaja os alunos no ensino, especialmente em matemática, uma disciplina frequentemente vista como desafiadora. Ela promove a curiosidade e a pesquisa ampla, alinhando-se com a aprendizagem por descoberta. Meirieu (1998) e Pozo (1998) destacam a importância de aprender a propor e questionar problemas, não apenas resolvê-los.

A abordagem tradicional em matemática foca na transmissão de conhecimento, enquanto a Aprendizagem Baseada em Problemas coloca a responsabilidade de aprender nas mãos dos alunos, com o professor como mediador. Esta metodologia encoraja os alunos a abordarem problemas matemáticos reais e relevantes, diferenciando problemas de exercícios rotineiros. Segundo Pozo (1998), um problema matemático requer um processo de pensamento mais profundo e não é imediatamente solucionável. Polya (1995) e Dante (1991) ressaltam a importância da resolução de problemas no desenvolvimento de habilidades como iniciativa e raciocínio lógico.

A gamificação, popularizada na década de 2010, usa elementos de jogos para melhorar a experiência de aprendizado, conforme descreve Flora Alves. Esta abordagem não apenas torna o aprendizado mais atraente, mas também estimula o engajamento e a motivação dos alunos. A gamificação pode ser particularmente eficaz na matemática, oferecendo uma alternativa lúdica e interativa às metodologias tradicionais. Lutz e Leivas





(2019) destacam o potencial dos jogos para melhorar a compreensão matemática e o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A Sala de Aula Invertida, conceito desenvolvido por Aaron Sams em 2007, inverte a abordagem tradicional de ensino. Neste modelo, os alunos estudam o conteúdo previamente e a sala de aula se torna um espaço para discussão e aplicação do conhecimento. Segundo Bergmann e Sams (2016), essa metodologia permite um uso mais eficiente do tempo de aula. Ela é apoiada por plataformas digitais, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas. Freire (1996) enfatiza a importância do professor como um mediador que estimula o pensamento crítico e a participação ativa dos alunos.

O Ensino Híbrido, uma mistura de ensino presencial e online, ganhou destaque nos anos 90. Lilian Bacich descreve-o como uma metodologia que integra diversas práticas de ensino e aprendizagem. Seymour Papert foi um dos pioneiros nesta abordagem, vendo a tecnologia como uma ferramenta educacional essencial. Durante a pandemia, o ensino híbrido se tornou ainda mais relevante, combinando o aprendizado online e presencial. Como afirma José Armando Valente, essa metodologia requer um planejamento cuidadoso e conhecimento das tecnologias digitais para ser efetiva na educação matemática.

### 3 METODOLOGIA

Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa ao problema que trata. Quanto à natureza, é aplicada. Quanto aos objetivos, é descritiva. Quanto aos procedimentos técnicos, é bibliográfica (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Esta foi uma pesquisa bibliográfica que analisou as publicações dos eventos ENEM de 2019 e SIPEM dos anos de 2018 e 2021, ambos cancelados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Foram identificados e analisados os textos que versam sobre as metodologias ativas no ensino da matemática e seus desafios.

O local de pesquisa foram os sites do SIPEM e do ENEM, ambos direcionados a partir do site da SBEM (<http://www.sbemrasil.org.br/>), onde se encontram os trabalhos selecionados e publicados. Os eventos analisados foram o VII SIPEM, que aconteceu em Foz do Iguaçu - PR entre os dias de 4 a 8 de novembro de 2018, o XIII ENEM, que ocorreu entre os dias de 14 a 17 de julho de 2019 em Cuiabá - MT, e o VIII SIPEM, que

ocorreu durante a pandemia de forma totalmente on-line entre os dias de 22 a 27 de novembro de 2021 em Uberlândia - MG.

Para efetivar a pesquisa, foram desenvolvidas etapas após a definição do problema e objetivos:

I. Etapa 1 – Foi feito um estudo bibliográfico sobre as Metodologias Ativas, e nesse sentido, o estudo foi orientado por livros sobre o tema publicados em língua portuguesa.

II. Etapa 2 – Foi elaborada uma revisão da literatura sobre as publicações que relacionam as Metodologias Ativas e o período de pandemia por COVID-19. Foi feita a consulta na base do Google Acadêmico e selecionadas as publicações entre os anos de 2020 e 2022. Foram selecionados 9 trabalhos, resultado da análise dos mais relevantes até estabelecer reincidências de temas e resultados.

III. Etapa 3 – Foram consultados os Anais dos eventos ENEM e SIPEM, objetos desta investigação. Foram observados todos os títulos e resumos, e ao final foram destacadas 21 (vinte e uma) produções científicas que versavam sobre as metodologias ativas.

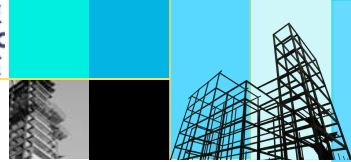
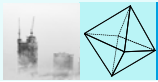
IV. Etapa 4 – A análise e síntese foram conduzidas para identificar as metodologias utilizadas, os problemas abordados e os principais resultados e dificuldades encontradas.

Esta pesquisa visa entender os cenários das publicações acadêmicas nos eventos de destaque da SBEM e identificar a relevância da utilização de metodologias ativas no período de pandemia, observando também o período anterior a esse grave momento das nossas vidas.

As correções realizadas incluem ajustes de pontuação, concordância verbal e acentuação, mantendo a coerência e a fidelidade ao conteúdo original do texto.

#### **4 METODOLOGIAS ATIVAS EM TEMPOS DE PANDEMIA**

Neste estudo, exploramos diversas publicações focadas em Metodologias Ativas no contexto educacional fora do âmbito do SIPEM e ENEM, particularmente entre 2020 e 2022. A pesquisa foi realizada através do Google Acadêmico, visando compreender o estado atual da arte neste campo.



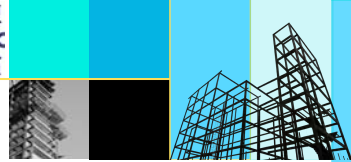
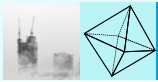
Oliveira e Oliveira (2022) ressaltam que durante a pandemia, muitos professores enfrentaram dificuldades para adaptar-se a novas ferramentas e metodologias ativas no ensino remoto. Eles destacam a necessidade de desenvolver estratégias para capacitar docentes no uso eficiente dessas tecnologias. Complementando, Oliveira et al. (2020) abordam como a pandemia desafiou os educadores a reinventar suas práticas pedagógicas, enfatizando que o ensino remoto acelerou o processo de modernização da educação. Eles afirmam que as metodologias ativas, juntamente com as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), são fundamentais para manter a qualidade pedagógica no ensino a distância.

Interessantemente, Oliveira et al. (2020) também identificam várias metodologias ativas particularmente adequadas para o período pandêmico, como a Sala de Aula Invertida, a Gamificação, a Aprendizagem Baseada em Investigação e a Aprendizagem entre Pares. Essas abordagens enfatizam o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem, uma tendência que deve continuar pós-pandemia.

Almeida (2020) discute práticas pedagógicas mediadas por tecnologias digitais durante a pandemia, relatando experiências em educação em espaços não escolares. A pesquisa revela que, apesar do entusiasmo inicial dos alunos, a transição para o ensino remoto foi desafiadora, mas eficaz, com a utilização de plataformas como *Google G Suite for Education*. O estudo enfatiza a importância da interação e do engajamento dos alunos, mesmo em um ambiente virtual.

Por sua vez, Palmeira et al. (2020) se concentram nas dificuldades de implementar o ensino a distância no ensino superior, particularmente durante a pandemia. Eles apontam as disparidades no acesso à Internet e a necessidade de adaptação às novas realidades educacionais, destacando que a implementação eficaz do EaD no Brasil é um desafio significativo.

Ventura (2021) investiga indicadores de metodologias ativas no ensino remoto emergencial, destacando a importância do papel ativo dos professores no processo de aprendizagem. A pesquisa revela que um equilíbrio entre atividades individuais e coletivas, juntamente com o envolvimento constante do professor, estimula significativamente a participação dos alunos.



Silva e Oliveira (2022) exploram a metodologia *WebQuest* em aulas de matemática durante a pandemia. Eles descobrem que, apesar de os alunos estarem familiarizados com a pesquisa na Internet, muitos não utilizavam essas ferramentas de maneira eficaz. O estudo revela que a *WebQuest* promoveu a aprendizagem cooperativa, embora o acesso limitado à Internet fosse um obstáculo.

Lima e Lima (2021) conduzem um estudo de caso em uma escola estadual, investigando a eficácia das metodologias ativas no ensino remoto. Eles sugerem várias estratégias adaptáveis para o ensino remoto e observam um aumento no uso de *Video Based Learning* e da Sala de Aula Invertida.

Por fim, Pereira e Pereira (2022) examinam o uso da Tertúlia Dialógica Pedagógica no ensino da matemática, destacando que esta metodologia aumenta o engajamento dos futuros pedagogos e contribui significativamente para a aprendizagem matemática nos anos iniciais. Eles enfatizam que as experiências positivas com novas metodologias podem alterar a percepção dos alunos sobre a matemática, superando as abordagens tradicionais.

Esses estudos coletivamente destacam a relevância crescente das metodologias ativas e a necessidade de adaptação e capacitação contínua dos educadores no uso de tecnologias digitais, especialmente em contextos de ensino remoto.

## 5 METODOLOGIAS ATIVAS NO CONTEXTO DO SIPEM E ENEM

A história do Encontro Nacional de Educação Matemática confunde-se com a história da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, demarcando inclusive sua origem. O ENEM ocorre a cada três anos. O décimo terceiro ENEM desenvolveu o tema “Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: Interfaces entre pesquisas e salas de aula”. Foi realizado na cidade de Cuiabá – MT entre os dias de 14 a 17 de julho de 2019.

O SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Matemática) surge quando a comunidade de educadores que ensinam e pesquisam matemática percebe que os ENEM já não comportam a atividade produtiva e espaços de discussão sobre a educação matemática. Nesse contexto, o SIPEM é criado com a expectativa de divulgar e intercambiar com a comunidade internacional.

A primeira edição aconteceu há 22 anos, em novembro de 2000 em São Paulo. O seminário tinha como temática a “Investigação em educação matemática no Brasil”, com o objetivo de causar reflexões a respeito do desenvolvimento da área. O SIPEM acontece de três em três anos. Sendo assim, os principais objetivos deste evento são promover a interação de diversos grupos que se dedicam às pesquisas para melhorar a educação matemática, divulgar pesquisas no âmbito da educação matemática, promover encontros de pesquisadores da área e possibilitar o avanço das pesquisas na educação matemática.

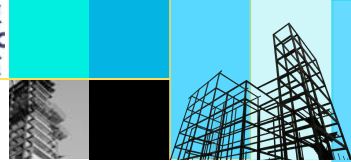
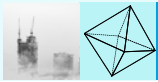
O sétimo SIPEM ocorreu em Foz do Iguaçu no Paraná no ano de 2018. O oitavo SIPEM precisou alterar todo seu planejamento devido à situação pandêmica (covid-19) vivenciada oficialmente a partir de março de 2020. O VIII SIPEM aconteceu totalmente de forma on-line mesmo diante das dificuldades, trabalhando com a seguinte temática: “Educação Matemática, pandemia, pós-pandemia e a atualidade: implicações na pesquisa e nas práticas de ensinar e aprender”.

Antes da instauração do período de pandemia, foram realizados dois eventos, o VII SIPEM e o XIII ENEM, que aqui identificaremos por SIPEM 2018 e ENEM 2019, respectivamente. Durante a pandemia, foi realizado o VIII SIPEM em 2021, que aqui identificaremos por SIPEM 2021, mas com previsão de ocorrência do XIV ENEM, que não será objeto desta investigação. Ao analisar os títulos e resumos dos Anais desses eventos, foi possível identificar 21 publicações científicas sobre as metodologias ativas no ensino de matemática, sendo 13 (treze) publicações entre os anos de 2018 e 2019, anteriores à pandemia, e 8 (oito) publicações no ano de 2021, dentre as 226 (duzentas e vinte e seis), durante a pandemia.

Quadro 1: Distribuição do uso de metodologias ativas por evento

Metodologias Ativas Observadas	SIPEM 2018	ENEM 2019	SIPEM 2021	Total
Aprendizagem Baseada em Problemas	4	0	2	6
Gamificação	1	4	0	5
Resolução de Problemas	0	1	0	1
Sala de Aula Invertida	1	0	0	1
Ensino Híbrido	1	0	0	1
Ensino Remoto	0	0	2	2
Metodologias Ativas Diversas	0	0	2	2
Ensino Híbrido e Sala de Aula Invertida.	0	0	1	1
Gamificação e Resolução de Problemas	0	1	1	2
Totais	7	6	8	21

Fonte: Autoria própria



No período de 2018 a 2019, as metodologias com mais frequência foram a Aprendizagem Baseada em Problemas, com 4 (quatro) publicações no SIPEM 2018 e Gamificação, com 5 (cinco) publicações. Já em 2021, a Aprendizagem Baseada em Problemas se manteve em destaque com 2 (duas) publicações, o mesmo número para Ensino Remoto e Metodologias Ativas Diversas; esta última recebe essa denominação por abordar as diversas metodologias ativas em uma investigação de formação continuada e outra por se tratar de um mapeamento bibliográfico. Nota-se que o Ensino Híbrido surge como objeto de investigação em período anterior à pandemia, porém, é importante lembrar que essa foi uma alternativa metodológica adotada nos períodos em que o ensino parcialmente presencial foi liberado, no entanto, resultou em uma única publicação no SIPEM 2021 associada à sala de aula invertida, esta que foi objeto de investigação também no ENEM 2018.

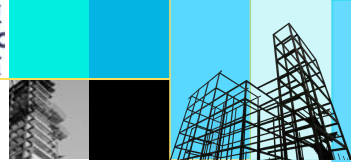
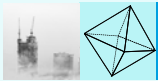
Observa-se que o número de publicações por eventos está na média de 7 produções (considerando o desvio de 1 nos dois últimos eventos). Com grande frequência associa-se as metodologias ativas às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) para operacionalizar e subsidiar as ações (BACICH; MORAN, 2018; OLIVEIRA et al., 2020). As ações educativas foram sustentadas e subsidiadas pelas TDIC por todo o período de isolamento físico e nos períodos de flexibilização das medidas sanitárias, mas o que teria ocorrido nessas práticas? Não foram investigadas? As aplicações práticas diferem muito da visão teórica, impossibilitando um relato ou pesquisa? Essas são questões que não nos propomos a responder, no entanto, é importante conhecer. Algo que se nota também é que cada vez mais a junção de metodologias ativas tem interessado aos pesquisadores.

### 5.1 APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Aprendizagem Baseada em Problemas apresentou uma ocorrência de 6 (seis) publicações científicas, notadamente apenas no SIPEM de 2018 e 2021, e uma com Resolução de Problemas no ENEM 2019.

Segundo Groenwald (2018, p. 11-12), os alunos apresentaram dificuldades nas tarefas de leitura crítica, afetando a interpretação e a resolução dos problemas. Outro ponto importante para se destacar foi a dificuldade nas resoluções que necessitavam de





“base algébrica apurada”. Os estudantes apresentaram um desempenho muito satisfatório nas interpretações que envolvem operações algébricas mais simples. Relatam que “[...] mesmo errando algumas questões, eles utilizavam artifícios algébricos para a resolução dos problemas”. Conseguiram realizar a compreensão e estabelecer planos de resolução dos problemas.

Müller e Dullius (2018, p. 9) evidenciaram que a utilização de textos focando a leitura e a escrita trouxe grande êxito nos processos de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática. Destacam ainda que na formulação de problemas evidenciaram certa dificuldade em articular a interpretação, a linguagem e o raciocínio lógico para organizar as ideias, o que foi parcialmente sanado após reanálise das situações em sala.

Andreatta e Allevato (2018, p. 10) encontraram uma divergência entre a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) naquilo que diz respeito à Resolução de Problemas (RP):

A maior divergência é que há uma concepção muito forte de RP na BNCC relacionada à execução e operacionalização das habilidades matemáticas com a Resolução de Problemas, em que primeiro o aluno aprende matemática para aplicar o conhecimento em resolver problemas, ou seja, o aluno não aprende a resolver problemas e nem aprende matemática resolvendo problemas, como proposto nos PCNs.

Segundo os autores, essa divergência demarca um retrocesso e uma concepção mais conservadora de currículo na BNCC sobre a Resolução de Problemas no ensino da matemática. A BNCC tem foco nas habilidades e não nas competências das áreas curriculares, não sendo possível identificar abordagens com a resolução de problemas na unidade temática de Geometria.

Onuchic e Allevato (2018) alertam para uma necessária formação inicial de professores com atenção às conexões (resultado da apreensão de significados de objetos matemáticos e como se relacionam com as demais áreas de conhecimento e o próprio cotidiano do aluno). Segundo os autores, as conexões “[...] não devem ser vistas meramente como interessantes fatos matemáticos, mas como componentes essenciais para o sucesso na resolução de problemas”, assim como a resolução de problemas é essencial para construção de conhecimento matemático por meio das conexões.

Barbosa et al. (2021) realizaram um estudo de caso no qual a construção de conceitos multiplicativos se deu mediante representações e mobilização de esquemas envolvendo as quatro operações e o conceito de número nas comparações multiplicativas.



As dificuldades percebidas pelos alunos se deram quando os problemas envolviam o referente desconhecido e a relação desconhecida, mas quando os problemas estavam no contexto do referente desconhecido, o êxito foi maior.

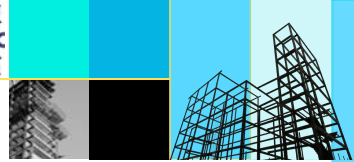
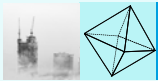
Flôres e Bisognin (2021, p. 770) investigaram as conexões realizadas pelos discentes ao resolver um problema que envolve conceitos estudados na disciplina fundamentos de análise matemática. As duplas apresentaram conexões diversas, sendo identificadas: relação parte-todo e implicação, com menos frequência, já implicação, procedimento e conceitos matemáticos foram mais frequentes. Assim como Onuchic e Allevato (2018) reforçam a importância de ter essa perspectiva com foco nas conexões na formação inicial de professores que ensinam matemática.

Gadelha e Borba (2019, p. 13) analisaram as contribuições de fichas (material concreto manipulável) e do software Pixton© (material virtual manipulável) na representação de soluções combinatórias. Como resultado, os autores identificaram dificuldade na utilização dos dois tipos de materiais quando deveriam considerar o invariante de ordenação e também não atenderam ao invariante do esgotamento. As pesquisadoras interviram no processo para que os alunos percebessem a relevância da ordenação dos elementos para determinadas situações e também para compreender a necessidade de encontrar mais possibilidades, afirmando que os materiais manipuláveis não são autossuficientes para a promoção do ensino. No geral, os recursos não foram autossuficientes na promoção do ensino e da aprendizagem da Combinatória, mas os recursos visuais contribuíram para que os estudantes percebessem melhor invariantes combinatórios.

A ABP mostrou-se como ponto de interesse no período analisado, ressalta-se o interesse pelas conexões matemáticas antes e durante a pandemia, além de reflexões sobre a formação inicial de professores que ensinam matemática.

## 5.2 GAMIFICAÇÃO E JOGOS

A metodologia Gamificação, em associação com a Resolução de Problemas, apresentou ocorrência de 7 (sete) publicações, sendo que apenas 1 foi no SIPEM 2021. Essas publicações foram organizadas também pela perspectiva de Jogos na Educação.

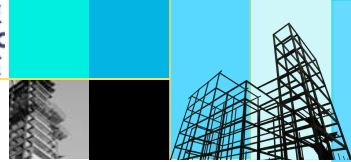
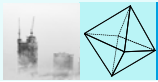


Souza e Fonseca (2018) investigaram a percepção dos estudantes sobre o processo de elaboração de um jogo com conteúdo matemático. Identificaram que os estudantes perceberam que deveriam ter foco no conteúdo, no objetivo e no público-alvo para se adequar à temática do ensino médio, além da administração do tempo para cumprir o planejamento.

Santos (2019) apresentou pesquisa sobre o uso de jogos para a avaliação da aprendizagem de conjuntos numéricos. A metodologia proposta buscou refletir sobre o processo avaliativo como objeto diagnóstico e formativo. Concluem que o envolvimento e iniciativa do docente são fundamentais para a proposta. Os alunos mostraram-se dedicados e sensíveis a identificar erros cometidos e a colaborar com os outros alunos.

Seguindo a linha de avaliação, Pereira e Barros (2019, p. 9) trataram da avaliação por meio de jogos. Foram realizadas quatro avaliações em formato de jogos e uma autoavaliação, além da prova escrita multidisciplinar que faz parte do projeto pedagógico da unidade escolar na qual desempenham suas atividades docentes. Relatam que “[...] os estudantes se mostraram menos ansiosos em relação às notas e mesmo em relação à prova bimestral”. Na autoavaliação, vários alunos relataram um maior envolvimento com as avaliações propostas do que costumam ter com provas e testes escritos.

Silva et al. (2019, p. 10) buscaram conhecer, a partir da entrevista da regente de sala no âmbito do PIBID, as dificuldades e aprendizagens. Os resultados indicam avanços significativos nas ações dos alunos ao responderem às atividades. A pesquisa tratou a gamificação e a resolução de problemas na busca de alternativa às atividades de ensino. Da mesma forma, Silva e Conti (2021, p. 121-122) abordaram a resolução de problemas na gamificação, fazendo uma discussão teórica sobre a utilização do jogo na perspectiva da resolução de problema, especificamente como o jogo de cartas auxilia no desenvolvimento de habilidades matemáticas referentes à unidade temática Números, com o 1º Ano do Ensino Fundamental. A intervenção docente nos jogos, como a batalha composta por subtração, demonstrou ser muito importante para auxiliar as crianças nas habilidades esperadas. “Percebe-se que o uso do jogo, aliado à prática da resolução de situações-problema e às intervenções orais da pesquisadora, fazem com que as crianças avancem e tenham a possibilidade de desenvolver as habilidades matemáticas esperadas”. Algumas habilidades manifestadas foram cálculo mental, compreensão das ideias que



envolvem a subtração, quantificação de elementos, reconhecimento de números e a resolução de problemas.

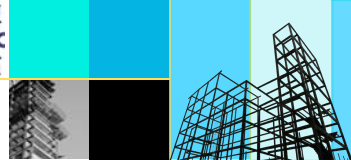
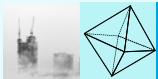
Lutz e Leivas (2019, p. 11) apresentaram uma pesquisa originada a partir da disciplina de Matemática para os anos iniciais: fundamentos e estratégias, a qual faz parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, utilizando o jogo da velha, observando se os jogos nos anos iniciais facilitam na rotina de estudos. Para os pesquisadores, a intervenção de forma lúdica produz a melhoria do processo de aprendizagem das operações básicas, em especial adição e multiplicação, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessa perspectiva, segundo a pesquisa, “o aluno se torna mais crítico e confiante, expressa o que pensa e tira suas próprias conclusões sem a necessidade de conjecturas do professor”.

Dias e Santos (2019, p. 9) quiseram saber se é vantajoso utilizar o jogo “Poliminós” como recurso para o ensino de áreas de figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo e paralelogramo). Desenvolveram com os alunos o conceito de área dessas figuras planas. O jogo foi proposto para que os alunos trabalhassem em grupos, podendo compartilhar ideias com colegas. Concluem que o uso de jogos nas aulas de matemática é um recurso pedagógico que auxilia no ensino, além de poder proporcionar uma aprendizagem de forma lúdica e prazerosa aos alunos. Destacaram que os alunos demonstraram estar mais interessados. O trabalho em grupo mostrou-se um meio dos discentes se relacionarem, compartilharem ideias e discutirem possibilidades e jogadas, o que responde afirmativamente ao problema da pesquisa.

Considerando a temática da Gamificação e dois trabalhos associados com a Resolução de Problemas, foram 7 (sete) trabalhos identificados, sendo que apenas 1 foi durante a pandemia. O que se observa é que essa temática da Gamificação não foi tão explorada nos trabalhos publicados no período da pandemia por COVID-19. Destaca-se a perspectiva de uso da Gamificação/Jogos para o processo da avaliação na aprendizagem.

### 5.3 ENSINO HÍBRIDO E SALA DE AULA INVERTIDA

O Ensino Híbrido e a Sala de Aula Invertida apresentaram uma única ocorrência de comunicação no SIPEM 2018, e uma única comunicação científica da mescla de Ensino Híbrido e Sala de Aula Invertida no SIPEM 2021.

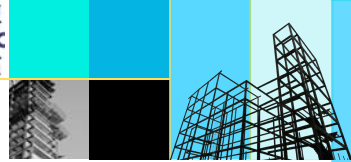
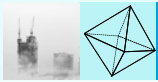


Pereira e Silva (2018, p. 7) analisaram situações de aprendizagem de alunos com TDA. Eram três alunos de três turmas diferentes; em apenas uma turma (Aluno A) os resultados foram satisfatórios com relação à “nota de aprovação da instituição”. Esse aluno se manifestava ativo nas perguntas com demonstrações de interesse pela proposta. Já os outros dois alunos apresentaram resultados abaixo da nota de aprovação. Em relação ao aluno B, a docente relata que “[...] sentia que muitas vezes ele estava disperso, [...] mas sempre chamava a professora em sua carteira para esclarecer dúvidas, ou então ia até sua mesa e sempre estava junto dos colegas para a realização das atividades”. Já o aluno C “[...] não conseguia realizar as atividades, fossem individuais ou em grupo [...] Ele sempre fugia da explicação, disfarçava afirmando que estava entendendo e apenas copiava as respostas dos colegas ou da professora”.

Santos e Abar (2018, p. 10) aplicaram uma avaliação de forma híbrida no sentido de identificar dificuldades de aprendizagem e ofertar a recuperação paralela de matemática. O resultado apontou que a maioria se localizava abaixo da média. A aplicação da avaliação diagnóstica de forma híbrida permitiu à instituição estabelecer ações específicas sobre os conteúdos deficitários e quais alunos necessitariam de uma orientação educacional específica.

Luna e Ferreira (2021, p. 57) analisaram os textos produzidos em uma formação pedagógica no formato híbrido, tematizando Early Álgebra com professores da educação infantil e dos anos iniciais do ensino fundamental. Segundo os autores, o modelo híbrido de formação continuada mostrou-se muito efetivo, pois “[...] ampliou os conhecimentos matemáticos sobre Early Álgebra das professoras por meio de experiências colaborativas em ambientes presenciais e em ambientes virtuais”, constatado pelas atividades desenvolvidas em grupo mediante a socialização e análises de registros em fóruns virtuais.

As metodologias do Ensino Híbrido e da Sala de Aula Invertida foram utilizadas com o propósito da avaliação. No período de pandemia, a atividade de pesquisa desenvolvida com sala de aula invertida foi relativa à avaliação das produções em uma formação de professores, se valendo também do ensino híbrido para essa finalidade. De igual forma, o interesse de pesquisa sobre a sala de aula invertida no período anterior à pesquisa foi uma aplicação sobre desempenho de avaliação da aprendizagem, enquanto



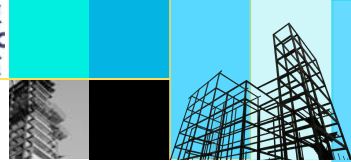
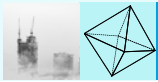
que a pesquisa sobre ensino híbrido, nesse mesmo período, serviu ao propósito da avaliação diagnóstica.

#### 5.4 ENSINO REMOTO E METODOLOGIAS ATIVAS EM GERAL

Ao todo, são 4 (quatro) produções sobre estudos de metodologias ativas em geral e Ensino Remoto, todas durante o período da pandemia no SIPEM 2021.

Teixeira et al. (2021, p.306) investigaram o que representa/significa o ensino remoto para os professores que ensinam matemática no Distrito Federal. As desigualdades em relação ao modo de agir ficaram evidentes: desigualdades digitais, de acesso e de conhecimento de uso das tecnologias. O estudo mostra que quase metade dos docentes participantes da pesquisa se empenharam com esforço no processo do ensino remoto, embora haja limitações tecnológicas e de conhecimento. Esses professores indicam que no ensino remoto as dificuldades próprias da disciplina ficam mais acentuadas. No entanto, existe a outra metade que reconhece as potencialidades do ensino remoto para a aprendizagem dos estudantes, essa outra metade apresenta menos dificuldade no trato das TDIC no ensino, o que evidencia a necessidade de formações específicas e uso recorrente dessa prática de ensino para efetivo uso e diminuir as chances de insucesso.

Lopes e Reis (2021, p. 813-814) buscaram refletir sobre o contexto (pós)pandêmico para os caminhos da pesquisa vigente em Educação Matemática. Analisaram uma atividade de pesquisa sobre as Equações Diferenciais, primando por ressaltar a importância das aplicações para a ressignificação dos conceitos relacionados às EDO de 1ª e 2ª ordem. Os resultados dão conta dos “[...] desafios que se apresentaram para os alunos tanto no contexto acadêmico, a partir da imposição institucional do ensino remoto, como no contexto social, a partir das condições impostas pela pandemia que revelaram as enormes diferenças socioeconômicas dos alunos”. Embora se perceba que no início das atividades houve descontentamento, dificuldade de adaptação e ansiedade pelo retorno, chegando a considerar o encontro presencial fundamental, à medida que o tempo passou e as atividades foram desenvolvidas nas plataformas, os comentários de satisfação ficaram mais recorrentes, mostrando ser possível desenvolver uma disciplina de Equações Diferenciais no formato remoto.



Rodrigues e Kaiber (2021, p. 336 - 337) investigaram a estruturação e desenvolvimento de uma formação continuada junto a um grupo de professores de Matemática do Município de Canoas/RS. Embora os docentes declarassem não ter conhecimento sobre as metodologias ativas, foram identificados vários elementos dessas metodologias na prática pedagógica.

[...] foi possível perceber que os professores não apresentaram dificuldades em se inteirar e participar das propostas desenvolvidas ao longo dos encontros. E, principalmente, foi possível identificar uma forte tendência dos professores em considerar a utilização dessas metodologias em suas práticas.

A pesquisa foi produzida no ensino remoto, em função da pandemia, cogitam ser possível que as “demandas e necessidades advindas do tipo de trabalho que estavam desenvolvendo podem ter influenciado suas posições”. Os professores consideraram potencialmente aplicáveis a Gamificação e a Aprendizagem Baseada em Problemas, além do uso da TDIC pela perspectiva curricular.

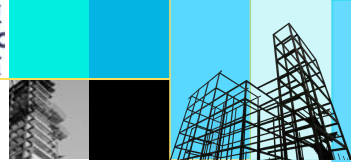
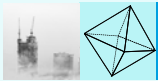
Modelski e Mello (2021), por meio de uma pesquisa bibliográfica, se propuseram a mapear em pesquisas acadêmicas se o uso de Metodologias Ativas está relacionado ao uso de tecnologias digitais. Identificaram um aumento das discussões sobre as metodologias ativas entre os anos de 2018 e 2020, com práticas voltadas para a educação básica. Foi encontrado o relato de uma formação continuada para desenvolvimento de habilidades para uso das Metodologias Ativas. As principais metodologias identificadas foram Ensino Híbrido, Gamificação e Resolução de Problemas. A Aprendizagem Criativa e a *Peer Instruction* também foram identificadas. O estudo relata o sucesso das práticas desenvolvidas com metodologias ativas.

As pesquisas desta seção refletem as práticas de pesquisas desenvolvidas no período da pandemia ou para apoio no período pandêmico, com destaque para o Ensino Remoto (Emergencial), que, embora não seja uma metodologia ativa, obteve suporte nas práticas metodológicas do grupo das metodologias ativas para sua efetiva aplicação.

## 5.5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE AS METODOLOGIAS ATIVAS EM TEMPOS DE PANDEMIA

Durante a pesquisa, foi possível identificar que os docentes enfrentaram dificuldades significativas para se adaptar às novas ferramentas tecnológicas e metodologias ativas durante a pandemia. Isso sugere a necessidade de estratégias de





capacitação direcionadas para os professores, a fim de facilitar a transição para o ensino remoto e as metodologias ativas.

A utilização de metodologias ativas, como a sala de aula invertida, gamificação, aprendizagem baseada em investigação e aprendizagem entre pares, mostrou-se viável e eficaz durante a pandemia. Estas metodologias foram reconhecidas por aumentar o engajamento dos alunos e manter a qualidade da prática pedagógica, mesmo em um cenário de ensino remoto. No entanto, uma questão crítica destacada é a desigualdade no acesso à tecnologia e à Internet, que se apresenta como um grande desafio para a implementação eficaz do ensino remoto e das metodologias ativas. Isso aponta para a necessidade de abordar essas desigualdades para garantir que todos os alunos tenham oportunidades iguais de aprendizagem.

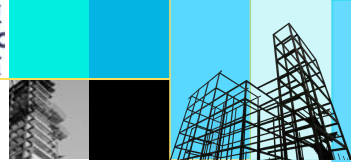
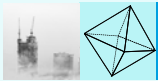
As pesquisas analisadas também enfatizam a importância do papel ativo dos professores no uso de metodologias ativas. Indicadores específicos, como o envolvimento dos professores e o equilíbrio entre atividades individuais e coletivas, foram fundamentais para estimular a participação e o engajamento dos alunos. Foi observado que a implementação de metodologias ativas, especialmente em disciplinas como matemática, pode aumentar a motivação e o envolvimento dos alunos, melhorando assim a aprendizagem. Isso é particularmente relevante para abordagens inovadoras como a Tertúlia Dialógica Pedagógica.

Finalmente, destaca-se o potencial transformador das metodologias ativas durante a pandemia, apesar dos desafios inerentes. Estas metodologias não só ajudaram a manter a continuidade da educação durante os períodos de isolamento, mas também proporcionaram oportunidades para inovação pedagógica e maior engajamento dos alunos. Contudo, a eficácia destas abordagens depende fortemente da capacidade dos professores em adaptar-se às novas tecnologias e da superação de desigualdades no acesso à tecnologia.

## **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

F Foram identificadas 21 publicações sobre as metodologias ativas no ensino de matemática, 13 (treze) publicações entre os anos de 2018 e 2019 e 8 (oito) publicações no ano de 2021.





Foram identificadas as seguintes metodologias: Aprendizagem Baseada em Problemas e Resolução de Problemas, Gamificação, Sala de Aula Invertida, Ensino Híbrido, além de Metodologias Ativas Diversas e combinações entre metodologias, bem como o Ensino Remoto.

No período anterior à pandemia, as metodologias com mais frequência foram a Aprendizagem Baseada em Problemas e associações, com 6 (seis) publicações, e Gamificação e associações, com 6 (seis) publicações. No período da pandemia, as metodologias com maior frequência foram a Aprendizagem Baseada em Problemas, estudos sobre as metodologias ativas e ações no Ensino Remoto, com duas produções cada.

O Ensino Híbrido surge como objeto de investigação em período anterior à pandemia, mas durante a pandemia foi identificada uma única produção científica associada à sala de aula invertida, mesmo com o ambiente propício à sua aplicação. Observa-se que o número de publicações por eventos está na média de 7 produções. Verificou-se que, com grande frequência, associam-se as metodologias ativas às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação para operacionalizar e subsidiar as ações de ensino e aprendizagem. No entanto, considerando que o ensino no período de isolamento social ocorreu por meio das TDIC, o número de publicações que envolvem essa temática associada às metodologias ativas parece ser menor do que se esperava. Em relação ao uso das TDIC no período de pandemia, foi perceptível as desigualdades digitais, de acesso e de conhecimento de uso das tecnologias. Os professores indicaram que no ensino remoto as dificuldades próprias da disciplina ficam mais acentuadas, no entanto, outra metade reconhece a potencialidade do ensino remoto.

A ABP mostrou-se como ponto de interesse pelo olhar da formação inicial de professores que ensinam matemática. A Gamificação não foi tão explorada nos trabalhos publicados no período da pandemia por COVID-19. Destaca-se a perspectiva de uso da Gamificação/Jogos para o processo da avaliação para a aprendizagem, assim como as metodologias do Ensino Híbrido e da Sala de Aula Invertida para a avaliação diagnóstica.

Observa-se que a maior dificuldade da aplicação das metodologias no ensino híbrido foram as limitações tecnológicas e de conhecimento, tanto da parte dos discentes quanto dos docentes. Porém, ainda assim, houve resultados satisfatórios. Contudo, ainda



há um longo caminho a ser percorrido no que diz respeito ao ensino por intermédio das metodologias ativas para a aprendizagem da matemática.

As pesquisas sobre o ensino remoto refletem as práticas de pesquisas desenvolvidas no período da pandemia ou para apoio no período pandêmico, que, embora não seja uma metodologia ativa, suportou as práticas metodológicas do grupo das metodologias ativas para sua efetiva aplicação. Suas investigações foram sobre revisões de literatura, concepções metodológicas e formação continuada de professores.

Algo que se nota é cada vez mais a junção de metodologias ativas em atividades de pesquisa. Essa prática tem sido objeto de interesse da comunidade científica/docentes para estudos sobre o ensino, aprendizagem e formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria Claudice Rocha. **PRÁTICAS PEDAGÓGICAS MEDIADAS POR TECNOLOGIAS DIGITAIS EM PERÍODO DE PANDEMIA**. 2020. 10 v. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Faculdade Dom Pedro II de Sergipe, Belo Horizonte, 2020.

ANDREATTA, Cidimar; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NOS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR OFICIAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA BRASILE. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-12. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII\\_SIPEM/schedConf/presentations](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations). Acesso em: 13 jun. 2022.

BACICH, Lilian. MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018

BACICH, Lilian; MORAN, José. Aprender e ensinar com foco na educação híbrida. **Revista Pátio**, v. 17, n. 25, p. 45-47, 2015. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2015/07/hibrida.pdf>. Acesso em 13 jun. 2022.

BARBOSA, Gabriela dos Santos; GOMES, Elohá Sheyla Vaz; ARAÚJO, Jerlan Manaia de. Experiência prática e resolução de problemas de comparação multiplicativa por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 253-264. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, [S. l.], v. 32, n. 1, p. 25–40, 2012. DOI: 10.5433/1679-0383.2011v32n1p25. Disponível em: <https://ojs.uel.br/revistas/uel/index.php/seminasoc/article/view/10326>. Acesso em: 18 jun. 2022.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. . Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem. (Tradução Afonso Celso da Cunha Serra). 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 104 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1991.

DIAS, Caroline Martins Araujo Teles; SANTOS, Angela Cristina dos. O TRABALHO COM ÁREA DE FIGURAS PLANAS POR MEIO DO JOGO POLIMINÓS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. Cuiabá: Sbem, 2019. p. 01-10. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

FLÔRES, Marcia Viaro; BISOGNIN, Vanilde. Conexões Matemáticas e Resolução de Problemas: um estudo envolvendo estudantes de um curso de licenciatura em matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 759-770. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

FREIRE, Paulo. **PEDAGOGIA DA AUTONOMIA: Saberes Necessários à Prática Educativa**. S.i: Coletivo Sabotagem, 1996. 96 p.

GADELHA, Dacymere; BORBA, Rute. CONTRIBUIÇÕES DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS – CONCRETO E VIRTUAL – NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. Cuiabá: Sbem, 2019. p. 01-15. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. A COMPETÊNCIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO: um experimento no 9º ano do ensino fundamental 1 In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-13. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII> SIPEM/schedConf/presentations. Acesso em: 13 jun. 2022.

LIMA, Maria Laurindo Gonçalves; LIMA, Diva. A **UTILIZAÇÃO DE METODOLOGIAS ATIVAS DURANTE O ENSINO REMOTO: ACHADOS DE UM ESTUDO DE CASO NA EEM MARIA JOSÉ COUTINHO**. 2021. 5 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade Vale do Acaraú (Uva), Ceará, 2021.



LOPES, Aldo Peres Campos e; REIS, Frederico da Silva. Ensino Remoto de Equações Diferenciais para Engenharia: reflexões para a Educação Matemática em tempos de (pós)pandemia. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 802-815. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

LUNA, Ana Virginia de Almeida; FERREIRA, Ângela Ateone Batista do Carmo. A Formação Híbrida em Early Algebra: uma análise de recortes de narrativas e dos fóruns de discussões. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 49-57. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

LUTZ, Mauricio Ramos; LEIVAS, José Carlos Pinto. O ENSINO DE MATEMÁTICA E O USO DE JOGOS NA SALA DE AULA. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. Cuiabá: Sbem, 2019. p. 01-13. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

MEIRIEU, Philippe. **Aprender... sim, mas como?** 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998. 193 p. Tradução: Vanise Pereira Dresch.

MODELSKI, Wellington de Lima; MELLO, Kelen Berra de. Um olhar das Metodologias Ativas por meio da prática docente. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 1334-1347. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

MÜLLER, Ana Paula Krein; DULLIUS, Maria Madalena. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: diferentes abordagens no ensino de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-11. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII/SIPEM/schedConf/presentations>. Acesso em: 13 jun. 2022.

OLIVEIRA, Jussara de Fátima Alves Campos et al. **Educação no contexto da pandemia da Covid-19: adversidades e possibilidades**. 2020. 16 v. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade, Goiania, 2020.

OLIVEIRA, Stéfany Marinho de; OLIVEIRA, Luciane Bianca Nascimento de. DESAFIOS ASSOCIADOS À ADEQUAÇÃO DAS METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO REMOTO DURANTE A PANDEMIA DO COVID-19. In: PRAXEDES, Marcus Fernando da Silva *et al.* **Políticas e práticas em saúde e enfermagem 5**. Ponta Grossa: Atena, 2022. p. 149-152. Disponível em: <https://sistema.atenaeditora.com.br/index.php/admin/api/artigoPDF/58696>. Acesso em: 13 jun. 2022.



ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. O TRABALHO COM CONEXÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-13. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII\\_SIPEM/schedConf/presentations](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations). Acesso em: 13 jun. 2022.

PALMEIRA, R. L.; DA SILVA, A. A. R.; RIBEIRO, W. L. As metodologias ativas de ensino e aprendizagem em tempos de pandemia: a utilização dos recursos tecnológicos na Educação Superior. **HOLOS**, [S. l.], v. 5, p. 1–13, 2020. DOI: 10.15628/holos.2020.10810. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/10810>. Acesso em: 17 jun. 2022.

PEREIRA, Carlos Luis; PEREIRA, Marcia Regina Santana. **Metodologias ativas: tendências atuais em educação matemática e seu ensino em curso de Pedagogia**. 2022. 15 f. TCC (Graduação) - Curso de Pedagogia, Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2022.

PEREIRA, Luis Fernando Pacheco; SILVA, Elizabete Leopoldina da. AULA INVERTIDA COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE CÁLCULO PARA ALUNOS COM TRANSTORNO DE DÉFICIT DE ATENÇÃO (TDA). In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-08. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII\\_SIPEM/schedConf/presentations](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations). Acesso em: 13 jun. 2022.

PEREIRA, Marcus Vinícius; BARROS, Dayse do Prado. MINDSET E AS POSSIBILIDADES DE AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA POR MEIO DE JOGOS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. Cuiabá: Sbem, 2019. p. 01-10. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

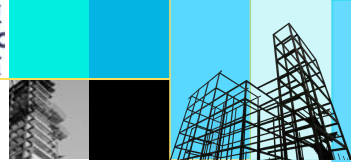
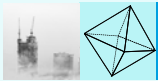
POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas: Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I. **A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para Aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. DE. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: [http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book Metodologia do Trabalho Cientifico.pdf](http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf). Acesso em 06 de mar de 2017.

RODRIGUES, Danielle dos Santos; KAIBER, Carmen Teresa. O uso de Metodologias Ativas e Tecnologias Digitais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM





EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 324-337. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SANTOS, Cicero Inacio. O USO DE JOGO COMO FORMA DE AVALIAÇÃO APRENDIZAGEM DE CONJUNTOS NÚMERICOS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. 2019: Sbem, 2019. p. 01-09. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SANTOS, Eliana Calixto; ABAR, Celina A. A. P.. RESULTADOS DE UMA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA EM UMA PROPOSTA DE REVISÃO DE MATEMÁTICA NA MODALIDADE DE ENSINO HÍBRIDO. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-11. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII\\_SIPEM/schedConf/presentations](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations). Acesso em: 13 jun. 2022.

SILVA, Carla Mariana Rocha Brittes da; CONTI, Keli Cristina. Batalha Composta da Subtração: uma possibilidade com jogo de cartas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021, Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 108-122. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SILVA, Regina Barreto Santos et al. RELATO DE EXPERIÊNCIA DO PROJETO PIBID/FAFIRE: JOGOS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO RECURSOS UTILIZADOS PARA SUPERAR DIFICULDADES COM CONTEÚDOS MATEMÁTICOS. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2019, Cuiabá. **ENEM**. Cuiabá: Sbem, 2019. p. 01-11. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>. Acesso em: 13 jun. 2022.

SILVA, Vítor Marinho; OLIVEIRA, Carloney Alves de. **Metodologia WebQuest nas aulas de Matemática em contexto de pandemia da Covid-19**. 2022. 16 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas (Ufal), Alagoas, 2022.

SOUZA, Juliana Campos Sabino de; FONSECA, Mateus Gianni. O JOGO ALÉM DO JOGAR: o potencial do desenvolvimento de um jogo para o processo de aprendizado em matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL PESQUISA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **SIPEM**. Foz do Iguaçu: Isbn, 2018. p. 01-11. Disponível em: [http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII\\_SIPEM/schedConf/presentations](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations). Acesso em: 13 jun. 2022.

TEIXEIRA, Cristina de Jesus; FRAZ, Joanne Neves; FERREIRA, Weberson Campos. O ensino remoto sob o olhar dos professores que ensinam matemática no Distrito Federal: dificuldades, limitações e possibilidades. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021,





Uberlândia. **SIPEM**. Uberlândia: Sbem, 2021. p. 296-306. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2022.

VENTURA, P. P. B. Indicadores de metodologias ativas no ensino remoto emergencial. **Revista Interdisciplinar em Educação e Territorialidade – RIET**, [S. l.], v. 2, n. 2, p. 167–183, 2021. DOI: 10.30612/riet.v2i2.14521. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/riet/article/view/14521>. Acesso em: 17 jun. 2022.



## MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Paulo Batista Franca<sup>1</sup>  
Lélia de Oliveira Cruz<sup>2</sup>  
Celina Amélia da Silva<sup>3</sup>

**Resumo:** A presente pesquisa aborda uma temática relevante assimilando a modelagem matemática como forma de ensino da geometria espacial e suas vertentes, aplicando os métodos modernizados de ensino que contribuam com a estimulação dos alunos, diante a necessidade de aprimorar o processo de aprendizagem e construção de conhecimentos. O método aplicado para a realização desta pesquisa é uma revisão de literatura em que o autor por meio de leituras de artigos e demais periódicos retirados das bases de dados CAPES e Scielo. Os resultados coincidiram com as propostas de modelagem matemática como metodologia de ensino da geometria espacial, uma possibilidade para despertar o interesse e o desejo dos alunos irem em busca do conhecimento.

**Palavras-chave:** Ensino aprendizagem da Matemática. Modelagem Matemática. Geometria Espacial.

**Abstract:** This research addresses a topic of great relevance, assimilating mathematical modeling as a way of teaching spatial geometry and its aspects, applying modernized teaching methods that contribute to the stimulation of students, given the need to improve the learning process and construction of knowledge. The method applied to carry out this research is a literature review in which the author, through readings of articles and other journals taken from CAPES and Scielo databases. The results coincided with the proposals of mathematical modeling with the teaching of spatial geometry arouse the interest and the will to go in search of knowledge.

**Keywords:** Teaching Mathematics. Mathematical Modeling. Spatial Geometry.

### Introdução

A matemática é uma matéria relevante e acompanha os alunos durante todo o período escolar, representando a realidade por meio dos conhecimentos e dos instrumentos que possibilitam a interpretação, a resolução de problemas e estimulando positivamente o raciocínio lógico aplicado em diversos segmentos da vida, dentro e fora das escolas. Suas diversas formas de relacionamento com a sociedade acentua o processo de construção do conhecimento, mas, ainda, é uma matéria considerada complexa que precisa de novas metodologias que impulsionem, de forma mais precisa, o processo de ensino aprendizagem (FERREIRA, 2020).

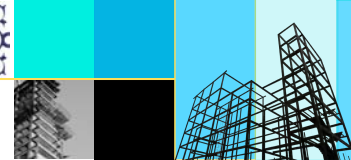
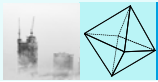
A importância da matemática parte da contextualização, que remete para a ressignificação de conceitos e ideias, garantindo que os ensinamentos ~~que~~ sejam realmente efetivados. Pressupostos que exigem metodologias inovadoras que aprimorem as estratégias, foco de interesse na intenção de dar sentido, provocando modificações positivas na prática de

---

<sup>1</sup> Mestrando do programa PROFMAT/UEMA – paulofranka@gmail.com

<sup>2</sup> Departamento de Matemática e Física – CESC/PROFMAT/UEMA – leliacruz@cesc.uema.br

<sup>3</sup> Departamento de Matemática e Física – CESC/PROFMAT/UEMA – celinasilva@professor.uema.br



ensino, adaptando conteúdos a realidade e experiências, vencendo os obstáculos na construção do conhecimento (MENDONÇA, 2020).

Dessa forma, a modelagem matemática é uma tendência da educação matemática e, como base nesse estudo, possibilita a intervenção em problemas da realidade, assim como, a geometria que é unidade integrante dos currículos escolares com aplicações, na prática do dia a dia, gerando a perspectiva em levar o educando a desenvolver sua capacidade cognitiva.

Entende-se, que outros caminhos devem ser apontados como estratégia para viabilizar o ensino e a aprendizagem da matemática. De acordo com (FERREIRA, 2020) a modelagem matemática deve ser vista:

[...] como Metodologia ou estratégia de ensino, focada mais no processo de ensino e sempre buscando despertar o senso reflexivo dos alunos e educadores tanto no contexto social quanto no ambiente matemático, tratando a matemática não apenas como uma disciplina a ser compreendida, mas como uma ferramenta capaz de desenvolver a autonomia dos educandos e os tornando seres participativos dentro da sua sociedade. (FERREIRA, 2020, p.76).

Corroborando com a autora, a modelagem matemática deve favorecer e dar significado ao processo de construção do conhecimento e não propriamente ao modelo matemático a ser referenciado. Com base no exposto investiga-se, como a modelagem matemática aplicada no ensino da geometria espacial pode potencializar a aprendizagem dos alunos? O objetivo deste estudo é caracterizar a modelagem matemática como metodologia para oportunizar o processo de ensino aprendizagem da geometria espacial, assimilando a matéria com as novas tecnologias de ensino.

O método aplicado para a realização dessa pesquisa, até o momento, é uma revisão de literatura, em que o autor utilizou artigos e periódicos disponíveis nas bases de dados Scielo e CAPES, com a aplicação de descritores como modelagem matemática, ensino da matemática, matemática, tecnologia de ensino e geometria espacial. De modo que, todos os descritores aplicados satisfazem a temática: “Modelagem matemática no ensino da Geometria Espacial”, tendo como referência os textos dos pesquisadores dessa metodologia (BASSANEZI, FERREIRA, MENDONÇA, SOARES & ALVES, entre outros).

### **Aprendizagem da geometria espacial**

A geometria faz parte da grade curricular da matemática e se faz presente, não apenas em sala de aula, mas em diversas situações rotineiras da vida cotidiana. Enquanto na área de conhecimento, ela deve ser reconhecida como um conjunto de conhecimentos construídos ao

longo da história, necessária para a compreensão espacial, contribuindo para o crescimento cultural. Frente a sua importância é preciso verificar a sua aplicabilidade em diferentes segmentos.

De acordo com Mendonça (2020) a geometria espacial é compreendida como o ensino de matemática associada aos sólidos geométricos, as figuras geométricas e suas caracterizações tridimensionais relacionadas com medidas e propriedades, fazendo uma assimilação com a presença desses elementos no cotidiano, por meio de formas planas, espaciais que ensejam no processo de ensino aprendizagem.

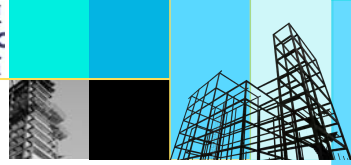
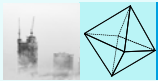
A ideia de ter a geometria espacial como objeto desse estudo é devido a sua forma qualificada de representar à realidade, bem como, a apresentação dos elementos geométricos importantes na formação cognitiva e intelectual do educando, fortalecendo sua capacidade de realizar projeções e aprimorando o raciocínio lógico, sendo esse, indispensável para instigar o pensamento independente, desenvolver a criatividade, desenvolver a capacidade de gerenciar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas. Pelo exposto, observa-se a conexão com as diversas áreas da matemática, os problemas práticos e as situações que podem ser aprimoradas com o uso de tecnologias no ensino (FERREIRA, 2020).

Segundo Silva e Angelim (2017) o ensino da matemática vem se defasando ao longo dos anos, ou seja, o método tradicional de ensino, além de complexo, não atrai o interesse dos alunos, contribuindo para o baixo desempenho, porém, pesquisadores e estudiosos, acreditam que a inserção de novas metodologias e tecnologias de ensino contribuem com o engajamento e novas perspectivas que promova melhorias, e conseqüentemente, aprimoram o processo de ensino aprendizagem, acentuando a geometria e sua significatividade.

Macedo (2013) em seus estudos realça sobre a colocação contextual dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que a geometria espacial desempenha um papel primordial no currículo, possibilitando ao aluno desenvolver, compreender, descrever e representar de forma organizada a realidade vivenciada. Percebe-se que é uma tarefa complexa, mas possível, com a aplicação de novas vertentes que possam favorecer o desenvolvimento da capacidade de argumentar e a tomada de decisões. Conforme proposto para o trabalhar a geometria com o suporte da modelagem matemática.

### **Ensino da geometria através da modelagem matemática**

A modelagem matemática é uma metodologia de ensino que possui elementos inovadores e nessa pesquisa, voltada para as perspectivas da tecnologia, ou seja, as etapas



transformadoras que desempenham importante papel  $\pi$  na construção do conhecimento e no processo de ensino aprendizagem que corroboram com conceitos e efetividades da aprendizagem significativa (MENDONÇA, 2020).

É importante ressaltar sobre os processos educacionais, e como eles, podem influenciar e transformar a vida das pessoas, da sociedade, suas qualificações e o esclarecimento frente aos processos de aprendizagem, estando cada vez mais relacionadas com as práticas pedagógicas, como instrumento de transformação social. A educação e os métodos de ensino, precisam de atualizações constantes, conforme a necessidade da sociedade, uma via de compartilhamento de saberes e de aprendizagens (SOARES; ALVES, 2021).

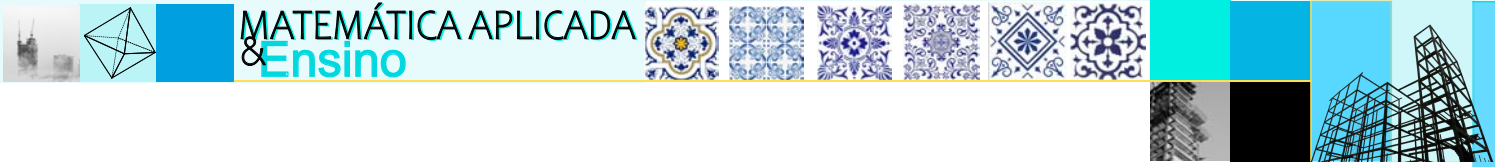
Nesse viés, as tendências metodológicas frente a modelagem matemática visam acentuar situações do cotidiano, valorizando a contextualização social dos educandos, abrindo um leque de possibilidades para os alunos levantarem questionamentos, explorarem e investigarem diversos assuntos sobre situações do dia a dia.

A modelagem é como uma série de segmentos, aplicada em situações que culminam com a solução efetiva do problema real e não apenas com preceitos superficiais, constituindo de um conjunto de algoritmos visando construir normas e procedimentos que expliquem a matemática e os seus fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, auxiliando em previsões e na tomada de decisões (FERREIRA, 2020).

De acordo com Bassanezi (2015) a matemática precisa de uma inserção de tecnologias para incentivar a formação de alunos aptos, que tenham realmente aprendido e levado esse entendimento para o seu cotidiano, inclusive na tomada de decisões, sendo um meio de intervir nas práticas educacionais do ensino tradicional, além de relacionar e motivar os modelos que conduzem ao aprofundamento, a análise em um senso crítico e reflexivo de situações problemas.

Para Soares e Alves (2021), a inserção de métodos tecnológicos no ensino da matemática aprimora e propaga as possibilidades das informações nas práticas educativas, facilitando o cotidiano na escola, e conseqüentemente, fora dela, pois a tecnologia é revelada como uma ferramenta importante na promoção da educação de qualidade, uma potência na construção do conhecimento e cidadania no campo educacional.

Cabe mencionar que a ideia de abordar sobre a modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem não condiz apenas com a propagação do conhecimento, mas a estruturação na forma de pensar e de agir, compreendendo uma metodologia que possibilita a dinamização dos conteúdos matemáticos, diferenciando em diversas situações, promovendo atividades que sejam mais atrativas e estimulantes (FERREIRA, 2020).



Percebem-se as potencialidades da modelagem matemática como uma possibilidade que está sendo cada vez mais discutida, propiciando o ensino mais dinâmico, interessante e significativo, buscando o conhecimento em novas visões e para poder ser aplicada é necessário se ater as etapas, em ressalva, que na pesquisa engloba a geometria espacial, dessa forma, a escolha do tema, o levantamento da pesquisa exploratória, o apontamento dos problemas e, resoluções, a análise crítica da solução. Sendo, então, uma estratégia desafiadora que rompe as barreiras do método tradicional do ensino e com a construção de novos conceitos e conhecimentos (SOARES; ALVES, 2021).

Com o apresentado até então, afunilando a temática, a modelagem matemática é uma estratégia, um recurso de ensino modernizado, podendo, inclusive, mencionar os parâmetros tecnológicos, constituindo um meio de ampliar o interesse dos alunos pelo estudo, amenizar a complexidade da matéria e o ensino defasado com base apenas em contextualização, sendo necessário aplicar na prática do cotidiano, desenvolver métodos que tornem a geometria espacial mais interessante ser aprofundada, requerendo o comportamento ativo (SILVA; ANGELIM, 2017).

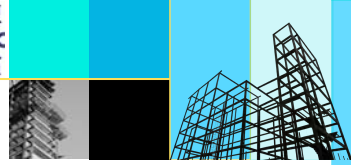
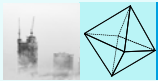
Quando atividades interessantes são executadas, como o uso de embalagens sendo modelos de formas geométricas, logo existe a estimulação dos alunos em constituírem e ampliam o conhecimento matemático, explorando situações de aprendizagem que proporcionem a eles a construção das noções de medidas, as grandezas, a representação de métodos para a efetuação de cálculos, dentre outros fatores.

Nessa vertente, o uso dos materiais concretos de geometria proporciona a melhor compreensão de objetos geométricos, contribuindo no processo de ensino aprendizagem, o que não tem o mesmo efeito com a teoria, por não proporcionar aos alunos o efeito de objetos, imagens estáticas, movimentos, dentre outros, que acentuam as ações pensadas, planejadas e inseridas nos ensinamentos que serão repassados aos alunos (SOARES; ALVES, 2021).

Relacionando mais uma vez com as tecnologias no processo de ensino aprendizagem, destaca-se outro ponto relevante, o preparo dos professores e o manuseio adequado das tecnologias, sendo necessário capacitá-los, para que se tornem aptos tecnologicamente, e evitem as aulas tradicionais que geram desinteresse dos alunos e dos próprios docentes. Assim, as tecnologias se modernizadas e atualizadas serão propulsoras de uma educação de qualidade, conforme afirmam Moram, Masetto e Behrens (2020, p. 152).

Por novas tecnologias em educação, estamos entendendo o uso da informática, do computador, da internet, do CD-ROM, da hipermídia, da multimídia, de ferramentas para educação a distância – como chats, grupos ou listas de discussão, correio





eletrônico etc. – e de outros recursos de linguagens digitais de que atualmente dispomos e que podem colaborar significativamente para tornar o processo de educação mais eficiente e mais eficaz.

Nesse segmento, o uso da tecnologia no campo educacional requer novos meios de ensinar, aprender e desenvolver um currículo adequado, aplicando os ensinamentos da geometria espacial com as demandas tecnológicas, tendo como característica, a integração da diversidade de linguagens e os tipos de representações, entendendo o potencial de diversas modalidades

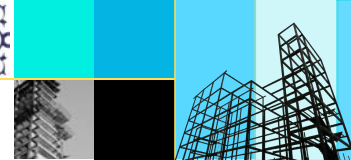
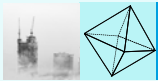
De acordo com Chaves (2013) a geometria espacial é um assunto que pode ser aprimorado quanto a forma de ensino, com a modelagem matemática e possibilita a aprendizagem de números e medidas que acarretam a capacidade de observação e compreensão das variedades de formas e suas diferenças, suas similaridades em comparar, medir e construir as formas geométricas, fazendo parte do cotidiano do aluno, a aplicação de conceituações e até mesmo em outras áreas de conhecimento, como desenhos, artes, aplicadas na engenharia, na medicina, dentre outros setores.

Portanto, considera-se que a modelagem matemática propicia a melhoria da qualidade do ensino da matemática em sala de aula, como uma alternativa de englobar a tecnologia e sair do ensino tradicional com a aplicação de atividades estimulantes e de interesse, envolvendo o aluno na construção do conhecimento, além de se relacionar socialmente, tornando-se um cidadão que possa tomar suas próprias decisões em detrimento a educação.

## **Conclusão**

Perante o apresentado no estudo, o objetivo foi alcançado, através da contextualização desenvolvida, canalizando os esforços para as melhorias no campo educacional, inserindo novas propostas como a tecnologia e a matemática, uma matéria considerada difícil, porém, a modelagem matemática é um instrumento que auxilia na educação de qualidade, uma alternativa eficaz a ser aplicada no processo de ensino aprendizagem.

Por fim, a modelagem matemática como metodologia aplicada no ensino da geometria espacial que faz parte do cotidiano e da vida das pessoas, além de abranger diversas áreas mencionadas no estudo, sua relação com grandezas e medidas, mostrando uma forma de motivação na relação dos alunos com o conteúdo, incentivando-os na elaboração, planejamento e compartilhamento de saberes.



## Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2015.

CHAVES, Juliana de Oliveira. **Geometria espacial no ensino fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas**. VII. 78f. Viçosa, 2013.

FERREIRA, Alex dos Santos. **A modelagem matemática aplicada ao estudo da geometria plana e espacial: área, perímetro e volume**. Universidade Federal do Amazonas. Instituto de Ciências Exatas. CAPES. Programa Profissionalizante em Matemática. Manaus, 2020.

MACEDO, Jussara Canazza de; **A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de geometria**. UFGD. Universidade Federal da Grande Dourados. FACET. Dourados, 2013.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T., BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 21 ed. Campinas. Papirus, 2020.

MENDONÇA, Edgle Chagas. **A modelagem matemática como proposta pedagógica para o ensino aprendizagem da geometria espacial**. Instituto Virtual. UFC. Matemática. Fortaleza, 2020.

SILVA, Luciana Verêda da; ANGELIM, Clenilson Panta. **O lúdico como ferramenta no ensino da matemática**. id on line revista multidisciplinar e de psicologia. 11(38):897–909, 2017.

SOARES, Sória Pereira Lima; ALVES, Aldo Agostinho. **Modelagem matemática como ensino da geometria espacial**. 1.ed. Curitiba-PR: Editora Bagai, Marabá, 2021.

## Agradecimentos

Agradeço, acima de tudo, a Deus, eterna fonte de sabedoria. Aos meus pais, familiares e esposa, que compartilharam comigo pacientemente esta caminhada. A Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, pela oportunidade de estar cursando o PROFMAT e conseqüentemente, desenvolver este trabalho. A todos os professores envolvidos na minha formação, em especial, a minha orientadora; Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Lélia de Oliveira Cruz, e co-orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Celina Amélia da Silva, o meu sincero agradecimento pelas diversas contribuições na elaboração desta pesquisa. Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte da conclusão deste trabalho.



## O CONCEITO DE FUNÇÃO: uma análise de videoaulas do YouTube

Gabriela Oliveira da Silva<sup>1</sup>  
Valdiane Sales Araújo<sup>2</sup>

**RESUMO:** Este estudo tem como objetivo apontar vantagens e desvantagens em aprender matemática através de videoaulas disponíveis na internet. Para tanto, utilizou-se o canal de maior visualização do YouTube voltado para o Ensino médio. A metodologia aplicada neste trabalho tem caráter qualitativo e utilizou-se a Revisão por Pares para analisar a qualidade da matemática empregada para o ensino de funções. Como resultado da pesquisa é possível verificar que, se por um lado a internet e os canais do YouTube têm facilitado o acesso a conteúdos matemáticos, por outro, a má qualidade da informação que é repassada através desses canais pode gerar desinformação e dificuldade de aprendizagem.

**Palavras-chaves:** Funções; YouTube; Matemática.

**ABSTRACT:** This study aims to point out advantages and disadvantages in learning mathematics through video lessons available on the internet. For this, we chose the most viewed channel on YouTube aimed at high school. The methodology applied in this work is qualitative and Peer Review was used to analyze the quality of mathematics used for teaching functions. As a result of the research, it is possible to verify that, if on the one hand the internet and YouTube channels have facilitated access to mathematical content, on the other hand, the poor quality of the information that is passed on through these channels can lead to misinformation and learning difficulties.

**Keywords:** Functions; YouTube; Math

### 1 INTRODUÇÃO

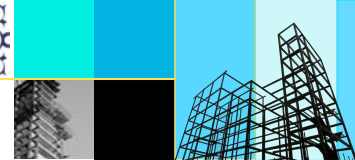
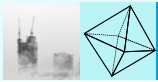
A Revisão por Pares pode ser considerada uma metodologia eficaz para a análise de conteúdo por especialistas na área para avaliar sua qualidade, precisão e confiabilidade. No contexto da internet, a Revisão por Pares pode ser usada para avaliar o conteúdo de sites e plataformas de mídia social para garantir que sejam precisos, confiáveis e de qualidade. Além disso, este tipo de análise pode ser usada para identificar erros ou incongruências no conteúdo, melhorar a clareza e a consistência, e ajudar a garantir que o conteúdo seja útil e acessível para o público alvo.

A internet é uma fonte rica de informações e recursos que podem ser acessados a qualquer hora e lugar, tornando-a uma escolha atraente para os estudantes que buscam informações com acesso rápido. Além disso, a popularização de dispositivos móveis e o aumento da capacidade de acesso à internet em todo o mundo, a tendência de busca de informações e aprendizagem através da internet provavelmente continuará a crescer, segundo os estudiosos do assunto esse processo não tem volta.

Não há mais como dissociar ensino e aprendizagem do uso das tecnologias digitais, seja em sala de aula ou fora dela. Os jovens utilizam cada vez mais a internet para realizar pesquisas relacionadas às atividades e conteúdos estudados em sala de aula. A nova

<sup>1</sup> Universidade Federal do Maranhão. Gabriela.silva@discente.ufma.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Maranhão. valdiane.sa@ufma.br



geração não querer “perder tempo” pesquisando em livros ou outras fontes de informações que não seja rápida e direta como a internet, preferem buscar novos conhecimentos e esclarecer suas dúvidas através da rede.

Com o aprimoramento dos recursos tecnológicos, a internet também tem proporcionado aos professores e alunos acesso a vários recursos que podem envolver os alunos em ricas experiências dentro das aulas de matemática. Há um grande número de recursos educacionais, disponíveis na internet para alunos e professores, que podem ser utilizados em sala de aula para apoiar e melhorar as aulas de matemática dando mais dinamismo e tornando as aulas mais atrativas para os estudantes do ensino básico. Mas, para que isso aconteça, é necessário que o professor passe por um processo de aperfeiçoamento no que diz respeito às metodologias empregadas em sala de aula.

A partir desse cenário, surge uma preocupação com relação a eficácia desse método para a aquisição do conhecimento de matemática, já que não há órgãos reguladores e muito menos uma avaliação ou fiscalização do conteúdo que é apresentado nesses canais e plataformas. Na internet, os alunos podem ser motivados pelo som, pelas cores e pela linguagem fácil, apresentados nos vídeos. Por outro lado, o conteúdo exposto pode não contribuir para o aprendizado significativo visto que, muitas vezes, não há uma conexão clara entre o que foi visto no vídeo e o conceito matemático formal. Muitas vezes, para dar um ar de simplicidade ou facilitar o entendimento de quem assiste os vídeos, os expositores omitem informações que são essenciais para o entendimento do conteúdo. Assim, a internet pode ser usada para fornecer motivação falsa e temporária para os alunos, sem resultados reais para a aprendizagem.

Com essa motivação, analisamos o conteúdo de matemática oferecido por uma sequência de vídeos disponíveis em um canal do YouTube. A análise foi feita utilizando o canal, em língua portuguesa, com maior número de visualizações, voltado para os estudantes do ensino básico. Para uma melhor análise, focamos na abordagem do conceito de funções, haja vista ser fundamental para o ensino-aprendizagem de matemática, além de ser um conteúdo para o qual os alunos apresentam grande dificuldade de entendimento.

## 2 AS NOVAS FORMAS DE DAR AULA DE MATEMÁTICA

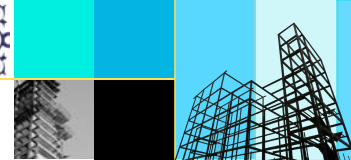
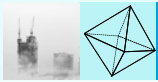
O ensino de matemática deve acompanhar a evolução da humanidade e uma estratégia a ser seguida é associar seus conceitos, regras e relações com as novas tecnologias da Educação Matemática. D’ Ambrósio (2012, p.74) afirma que “[...] o grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Pôr em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber/fazer ao longo de tempos passados, ao presente”.

O professor de matemática deve estar preparado para enfrentar os obstáculos provenientes desta difícil passagem dos modelos abstratos da matemática, desenvolvidos em sala de aula, para uma representação concreta, desses modelos, no mundo real. “Acredita-se que este processo de ensino e aprendizagem de matemática através da passagem da teoria abstrata para o entendimento da prática concreta possa contribuir efetivamente para a construção de novos conhecimentos e a compreensão de modelos reais” (PONTES, 2016, p.30).

Essa nova forma de olhar o ensino de matemática se faz necessária para que se possa adequar os avanços tecnológicos do mundo moderno à criança da era tecnológica.

As ações dos sujeitos, professor e aluno, no contexto escolar ultrapassam os limites de sala de aula e para que essa relação esteja em perfeita sintonia é necessário realizar uma aprendizagem matemática mais eficaz, de forma a proporcionar ao aluno um conhecimento que esteja vinculado à sua realidade (PAULA, 2016).

Neste contexto, cabe ao professor de matemática a criação de encaminhamentos pedagógicos que proporcionem a mediação entre os conhecimentos desta disciplina e os



recursos da informática educativa adequados existentes, oferecendo ao aluno a apropriação do conhecimento mediante diferentes formas como exploração, interação, pesquisa, comunicação por diferentes meios, troca de experiências, colaboração e reorganização das informações.

### 3 A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A origem da noção de função, segundo Ponte(1990), confunde-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal e já aparecia nos textos de Newton no Século XVII. Foi Leibniz quem primeiro usou o termo “função” em seus trabalhos relativos a curvas geométricas, foi ele também quem introduziu os termos “constante” e “variável” em seus estudos. Outros matemáticos, entre eles Euler, Bernoulli, Dirichlet e Fourier também deram contribuições para a reformulação do conceito de função.

A noção de função não apareceu por acaso na matemática, ela surgiu [...] como um instrumento indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais iniciado por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). Seu desenvolvimento apoiou-se nas possibilidades expressivas proporcionadas pela moderna notação algébrica por Viète (1540-1603) e, muito em especial, da Geometria Analítica, por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) (PONTE, 1990)

Durante os séculos XVIII e XIX a noção de função estava associada a expressão analítica. Percebeu-se desde cedo que esta noção era inadequada pois uma mesma função pode ser representada por várias expressões analíticas diferentes. Foi Dirichlet quem separou o conceito de função da representação analítica formulando-o em termos de correspondência entre conjuntos numéricos. A partir do desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função passou a ser estendida para qualquer correspondência arbitrária entre conjuntos, numéricos ou não. Da noção de correspondência o conceito evoluiu para a noção de relação, esta evolução continua até hoje.

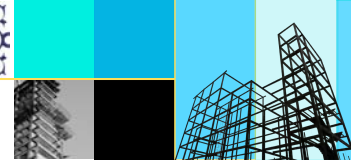
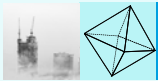
Com o desenvolvimento do conceito de função, e da própria matemática, passou-se a considerar funções que não correspondem a qualquer representação analítica, que não são suscetíveis de representação geométrica simples, que não tem qualquer relação com problemas concretos do mundo físico.

A aplicação da matemática às diversas áreas de conhecimento é feita através de modelos matemáticos, que são representações das situações através de objetos, relações e estruturas em que se procura descrever os elementos considerados fundamentais de cada situação. Um modelo matemático é constituído, entre outras coisas, por variáveis, relações entre estas variáveis e as respectivas taxas de variação. A noção de função tem papel fundamental na constituição e no estudo de modelos matemáticos estabelecendo assim sua importância na matemática atual.

A definição de função como é concebida hoje é estabelecida por três elementos básicos: domínio, contradomínio e lei de associação. Dessa forma função pode ser definida da seguinte forma:

*“Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos quaisquer. Uma função é uma relação  $f: X \rightarrow Y$ , que a cada elemento de  $X$  associa um único elemento de  $Y$ ”.*





## 4 A MATEMÁTICA EM CANAIS DO YOUTUBE

A proposta deste trabalho foi realizar um levantamento junto à plataforma YouTube com o intuito de identificar as interações recorrentes no ensino de conteúdos relacionados com as funções. Como critério para a escolha do canal, utilizamos o número de visualizações. Desse modo, para fazermos a análise pretendida, foi selecionado o canal Ferretto Matemática, o qual é o canal de matemática, em língua portuguesa, com maior número de visualizações da plataforma.

Os vídeos selecionados para análise estão disponíveis gratuitamente no canal citado (disponíveis em [www.youtube.com/user/professorferretto](http://www.youtube.com/user/professorferretto)). O canal apresenta mais de setecentos vídeos voltados ao ensino da matemática.

### 4.1 Videoaulas sobre função em um canal do YouTube

Para este estudo foram selecionados quatro vídeos cujo conteúdo abordado são as noções básicas de função.

O primeiro vídeo analisado, que aborda a definição de função, tem duração de aproximadamente vinte e sete minutos e possui mais de 3,3 milhões de visualizações. O segundo vídeo possui duração de aproximadamente trinta e dois minutos, possui 1,9 milhões de visualizações e trata do domínio, contradomínio e imagem. O terceiro vídeo analisado com duração de, aproximadamente, dezenove minutos, possui 1,4 milhões de visualizações e trata de funções reais. Por fim, o quarto vídeo trata da construção de gráficos no plano cartesiano. O vídeo possui duração de, aproximadamente, onze minutos e possui mais de novecentas visualizações.

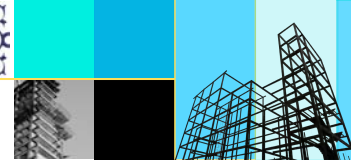
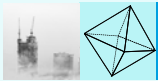
São vídeos de curta duração com aulas expositivas onde o expositor se utiliza apenas de mesa digital e escrita colorida, não há utilização de recursos audiovisuais mais elaborados.

O primeiro vídeo selecionado, *Funções Noções Básicas*, aborda o conceito de função através de conjuntos numéricos. No primeiro exemplo apresentado, utiliza-se dois conjuntos,  $A = \{-1, 0, 2\}$  e  $B = \{-2, 0, 1, 4\}$  para associar cada elemento do conjunto A ao seu dobro, um elemento do conjunto B, esta é a “lei de correspondência” enfatizada pelo professor no vídeo. No segundo exemplo, utiliza-se novamente, conjuntos finitos discretos, mas desta vez para exemplificar uma relação que não constitui uma função. No terceiro, novamente, é mostrado um caso em que a situação apresentada não constitui uma função. Os três primeiros exemplos utilizam conjuntos finitos discretos e diagramas e flechas para mostrar como se dá a relação entre os elementos de A e B. Em seguida, o professor apresenta a definição formal de função: “Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento  $x \in A$  a um único  $y \in B$ ”.

Na definição apresentada, fica claro que para haver uma função é necessário que haja dois conjuntos, mas não é explicitado que os conjuntos fazem parte da definição, ao contrário, a afirmação: “...uma função de A em B é uma regra que ...” enfatiza que a função é a lei de associação.

A ausência de informações pode causar dificuldades no entendimento do conceito e gerar equívocos na utilização de funções dentro de contextos variados. A definição, conforme é apresentada no vídeo, não deixa claro a importância dos conjuntos A e B como parte da definição de função nem faz associação desses conjuntos com o domínio e contradomínio, o professor opta por denominar “conjunto de partida” e “conjunto de chegada”.





Logo após a definição formal, apresenta-se um exemplo de função definida por meio de fórmula matemática, além de exercícios utilizando diagramas de flechas e mais funções definidas por fórmulas.

A deficiência na definição de função pode causar dificuldades decorrentes da falta de entendimento deste objeto matemático. Algumas dessas dificuldades serão enfrentadas, pelos estudantes, logo a seguir quando eles se deparam com a necessidade de construção de gráficos de funções.

No segundo vídeo, *Funções: Domínio, Contradomínio e Imagem*, apresenta-se os conjuntos A e B como domínio e contradomínio, respectivamente, relacionando-os com o “conjunto de partida” e “conjunto de chegada” dados no vídeo anterior. Além disso, é falado sobre a correspondência entre os elementos do domínio com os do contradomínio, ou seja, a função é uma correspondência do elemento  $x$  em A com um elemento  $y$  em B, em que  $y$  seria a imagem de  $x$  pela função.

Ainda neste vídeo são apresentados três exemplos de funções cujos domínios e contradomínios são subconjuntos infinitos do conjunto dos números reais. Não é feita nenhuma observação para este fato. A mudança de domínios dados por subconjuntos discretos e finitos para o conjunto  $\mathbb{R}$  é feita de forma abrupta sem dar a devida importância às mudanças que este tipo de domínio acarreta no comportamento das funções, a ênfase é dada apenas ao cálculo dos valores do conjunto imagem.

Esta abordagem prioriza a utilização de cálculos mecânicos, sem agregar conhecimento, sem levar o aluno a refletir sobre a importância dos conjuntos domínio e contradomínio como parte da definição de função. Além disso, nem um exemplo é dado de funções que não podem ser definidas por fórmulas matemáticas, o que contribui para o entendimento equivocado de que função é fórmula matemática.

A apresentação dos conjuntos domínio e contradomínio em outro vídeo, separado da definição de função, pode reforçar a ideia de que estes conjuntos não fazem parte da definição. Além disso, a utilização predominante de diagramas e conjuntos finitos discretos sem a devida transição para conjuntos não discretos é outro fato que dificulta o entendimento do conceito de função quando se utiliza como domínio o conjunto dos números reais, por exemplo.

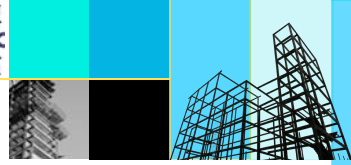
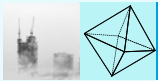
No terceiro vídeo, *Funções: Domínio das Funções Reais*, é analisado o conjunto domínio das funções reais.

Logo no início do vídeo, o professor afirma que quando uma função não apresenta domínio e contradomínio aparentes, subentende-se que o domínio e o contradomínio são ambos o conjunto dos números reais. Este é um equívoco bastante frequente nos livros didáticos e pode levar o aluno a entender que função é apenas a fórmula matemática, ou seja a lei de associação. O domínio e o contradomínio devem ser enfatizados tanto na exposição da teoria como nos exemplos e exercícios apresentados.

Em todos os exemplos, são apresentadas fórmulas matemáticas representando funções e pede-se para calcular o domínio dessas funções, assumindo que o contradomínio são todos os números reais. O vídeo inteiro se resume a efetuar cálculos com o objetivo de definir em qual conjunto a fórmula apresentada pode ser definida.

O quarto e último vídeo analisado, *Funções: Construção de Gráficos*, trata da construção de gráficos de função.

O vídeo já inicia com o esboço do gráfico de uma função polinomial do primeiro grau sem definir gráfico de função como sendo o conjunto de todos os pares ordenados  $(x,y)$ , em



que  $x$  é um elemento do domínio e  $y$  é a imagem de  $x$  por  $f$ . O exemplo apresentado mostra uma função cuja lei de associação é  $f(x)=2x+1$  e o domínio possui apenas quatro elementos. O desenho do gráfico é feito no plano cartesiano, sendo formado por apenas quatro pontos.

Em seguida, outro gráfico é construído utilizando a mesma lei de associação, mas com o domínio e o contradomínio sendo o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. Para o esboço do gráfico são escolhidos 5 valores aleatórios no domínio. Após encontrar os pares ordenados, ele dispõe no plano cartesiano em seguida é traçado uma reta representando o gráfico. Não é explicado por que se deve ligar os pontos para formar uma reta, já que no primeiro exemplo isso não aconteceu, justifica este fato apenas afirmando que isso acontece porque o domínio da função é o  $\mathbb{R}$ . O terceiro exemplo traz uma função quadrática. O esboço do gráfico segue os mesmos passos do exemplo anterior, depois de encontrar alguns pares ordenados, estes pares são localizados no plano cartesiano e uma parábola é traçada. Não fica claro porque os dois últimos gráficos podem ser representados por curvas e o primeiro não. Para dar esta explicação seria necessário definir gráfico de função corretamente, o que não é feito nesta videoaula.

Sem a definição correta de gráfico de função o estudante aprende que o gráfico é o desenho esboçado, uma curva, no plano cartesiano, não entende que todas as funções possuem gráficos mas nem sempre é possível desenhar este gráfico.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho observou que o estudo de funções por meio da plataforma de vídeos YouTube pode proporcionar resultados positivos e negativos com relação a aprendizagem dos estudantes da Educação Básica.

Um fato importante a se observar, nos vídeos analisados, é que a abordagem apresentada é puramente algébrica, sem exemplificação que associe o objeto em estudo à vida cotidiana do aluno. A ausência de associação do conceito com a realidade pode transmitir uma mensagem errada de que função é algo sem utilidade na vida prática. Isso pode causar falta de interesse no aprendizado do conteúdo, dado o fato de parecer algo artificial sem uma utilidade prática.

Se por um lado, a internet e os canais do YouTube têm ajudado na assimilação da aprendizagem de conteúdos matemáticos, por outro, a má qualidade da informação que é repassada através desses canais gera, frequentemente, desinformação e dificuldade de aprendizagem. Os estudantes acessam essas informações e as tomam como verdadeiras sem uma análise crítica do conteúdo que estão acessando.

Muitas das vezes, os estudantes têm acesso à informações que são repassadas de maneira errada ou incompleta e, como o aluno não tem discernimento para analisar o que é errado ou não, acaba por absorver informações desconexas e assim perde-se o essencial, ocorrendo uma falsa aprendizagem.

Esta pesquisa pretende contribuir não apenas com os trabalhos científicos, mas também apresentar o uso da rede social YouTube, como ferramenta pedagógica facilitadora no processo de ensino aprendizagem bem como chamar atenção para a necessidade de aperfeiçoamento através da melhoria da qualidade do conteúdo que é apresentado.

## REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho. SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da, & GADANIDIS, George. (2015). **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. (3a. ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23º ed. Campinas, São Paulo:



Papirus, 2012.

FERRETTO, Daniel. **Funções: Noções Básicas**. YouTube, jun. 2014. Disponível em: <<https://youtu.be/SPZqQ5qn3P0>>. Acesso em: 04 fev. 2022.

\_\_\_\_\_. **Funções: Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem**. YouTube, jun. 2014. Disponível em: <<https://youtu.be/G3zjNRYbDv8>>. Acesso em: 01 jun. 2022.

\_\_\_\_\_. **Funções: Estudo do Domínio das Funções Reais**. YouTube, jun. 2014. Disponível em: <<https://youtu.be/Y1urlgE0IBU>>. Acesso em: 24 jun. 2022.

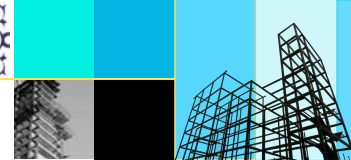
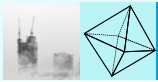
\_\_\_\_\_. **Funções: Construções de gráficos**. YouTube, jun. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=K7wtLRXGLJw>>. Acesso em: 24 jun. 2022.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais ‘Anísio Teixeira’ – INEP. **Microdados do SAEB 2017**. Brasília, DF. 2018. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/microdados>>. Acesso em: 03 fev. 2022.

PAULA, S. C. R. de, RODRIGUES, C. K., SILVA, J. C. da. **Educação Matemática e Tecnologia: Articulando práticas geométricas**. Curitiba: Appris, 2016.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 1990, 15, 3-9.

PONTES, Edel Alexandre Silva et al. **O SABER E O FAZER MATEMÁTICO: UM DUETO ENTRE A TEORIA ABSTRATA E A PRÁTICA CONCRETA DE MATEMÁTICA**. Psicologia & Saberes, v. 5, n. 6, p. 23-31, 2016.



## O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO AUXÍLIO NO ENSINO DA GEOMETRIA EM TURMAS MULTISSERIADAS

Idney Charlison Rocha<sup>1</sup>  
Valeska Martins de Souza<sup>2</sup>

**Resumo:** O artigo apresenta discussões e aplicações acerca do uso do software GeoGebra em turmas do multisseriado cujo objetivo principal foi avaliar as possibilidades do uso do software GeoGebra em turmas do multisseriado como auxílio no ensino de geometria. A metodologia utilizada na pesquisa foi voltada a uma pesquisa descritiva, de cunho bibliográfico e documental. Concluiu-se que o uso do software tem grandes possibilidades de aplicabilidade no ensino do multisseriado, contribuindo para facilitar a compreensão, envolver e dinamizar as aulas de geometria.

**Palavras-chave:** GeoGebra; Ensino de Geometria; Turma Multisseriada.

**Abstract:** The article presents discussions and applications about the use of GeoGebra software in multigrade classes whose main objective was to evaluate the possibilities of using GeoGebra software in multigrade classes as an aid in geometry teaching. The methodology used in the research was aimed at a descriptive, bibliographic and documentary research. It was concluded that the use of the software has great possibilities of applicability in the teaching of the multigrade, contributing to facilitate the understanding, involve and dynamize the geometry classes.

**Keywords:** GeoGebra; Geometry Teaching; Multigrade Classes.

### 1 INTRODUÇÃO

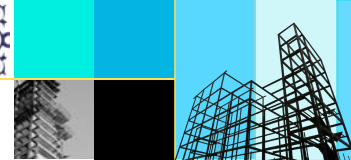
Reconhecer no mundo as diversas formas geométricas que nele existe não é uma tarefa difícil, visto a grande diversidade de objetos que estão postos em nosso dia a dia, de objetos mais simples de forma esférica como uma bola de futebol, a objetos mais robustos e volumosos como um edifício que em suas diversas formas quadradas ou retangulares se predem a enormes linhas retangulares de concreto que em sua moldura envolvem diversas lantejoulas em formatos muitas vezes triangulares. Heinen e Basso (2015, p. 1, apud SILVA e MIRANDA, 2019) afirmam que:

A Geometria está presente em nosso cotidiano nas mais diversas formas, e por esse motivo seu ensino é fundamental. Ao aprender Geometria passamos a estabelecer relações entre os conceitos presentes em nosso dia-a-dia [sic]. Além disso, por meio dos conhecimentos geométricos o aluno desenvolve um

---

<sup>1</sup> Especialista em Matemática, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Professor do Instituto de Ciência e Tecnologia do Maranhão (IEMA). Email: idneycrocha@gmail.com

<sup>2</sup> Doutora em Ingegneria dell'Informazione pelo Politecnico di Milano. Professora associada da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). E-mail: valeska.martins@ufma.br



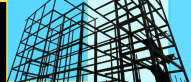
tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive [...].

O estudo da Geometria é indispensável na Educação Básica, visto que, os conhecimentos geométricos proporcionam uma compreensão de mundo, aguça o raciocínio lógico e faz relação com as outras áreas do conhecimento, tendo como base a grande presença da Geometria em nosso cotidiano.

O segmento do multisseriado requer um cuidado maior com o uso da tecnologia do que outros segmentos do ensino básico, visto que, esse segmento necessita inicialmente de um reconhecimento amplo dos alunos, no que se diz respeito ao acesso a aparelhos tecnológicos e domínio dos mesmos. O ensino básico regular já é dotado de diversos empecilhos que tornam o ensino monótono e desinteressante para a maioria dos alunos, e no multisseriado esses empecilhos são amplificados visto a condição desse segmento. Por isso, mudar algumas metodologias de ensino se faz necessário, e inserir as tecnologias de forma correta nesse processo acrescenta um envolvimento maior por parte dos alunos. O GeoGebra se encaixa em algumas necessidades pois possui muitas utilidades e facilidades no que diz respeito ao auxílio do ensino da Geometria e álgebra, por se tratar de um software que pode ter seu uso online e offline, como também ser disponível em diversas plataformas digitais dos mais diversos sistemas.

A pesquisa surgiu durante um projeto de formação continuada para professores do município de Buriticupu – MA, no qual participei como bolsista extensionista e tive contato direto com as turmas e escolas do multisseriado. Dentre as diversas indagações e problemáticas que surgiram no decorrer da aplicação do projeto, as mais inquietantes foram a respeito de como o ensino de Matemática em turmas do multisseriado poderia ser melhorado e que esse tivesse mais engajamento por parte dos professores e dos alunos. Assim, o objetivo da pesquisa é analisar por meio de uma revisão bibliográfica as mais diversas publicações científicas relacionadas ao tema do uso do GeoGebra como auxílio nas aulas de Geometria com foco nas turmas multisseriadas e como esses estudos realizados podem contribuir para o ensino de Geometria nesse segmento de ensino.

A Metodologia utilizada na pesquisa foi voltada a uma pesquisa descritiva de cunho bibliográfico e documental, que busca analisar por meio de uma revisão bibliográfica as mais diversas publicações científicas relacionadas ao tema do uso do GeoGebra como auxílio nas aulas de Geometria com foco nas turmas multisseriadas e como esses estudos realizados podem contribuir para o ensino de Geometria nesse



segmento de ensino, tendo como base documentos do Projeto de Formação continuada dos Professores do Sistema Educacional do Município de Buriticupu – MA (PROSEMEB) e publicações científicas relacionadas ao tema de pesquisa. A metodologia utilizada visou uma abertura maior aos questionamentos levantados por serem complementares. Segundo Gil (1999) a pesquisa descritiva deve vir depois da exploratória, pois normalmente, os pesquisadores possuem um vasto conhecimento do objeto de estudo. E para Fonseca (2002) a pesquisa bibliográfica utiliza fontes constituídas por material já elaborado, constituído basicamente por livros e artigos científicos localizados em bibliotecas e a pesquisa documental recorre a fontes mais diversificadas e dispersas, sem tratamento analítico (FONSECA, 2002, p. 32).

Desse modo, nesta pesquisa foram analisados três textos sobre o uso de tecnologias da educação em escolas do campo e em turmas do multisseriado, nos municípios de Barreiras – BA, Três Passos – RS e Crissiumal – RS, cada turma composta por 20, 11 e 5 alunos do multisseriado, respectivamente.

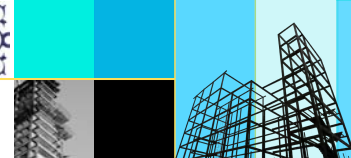
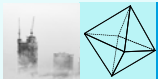
## **2 O MULTISSERIADO**

O multisseriado se envolve em uma teia de problemáticas complexas que permeiam desde a base do ensino ao seu último processo que é a execução, planejamento e avaliação de atividades específicas para esse segmento em sala de aula. Visto que esse segmento ainda se encontra de forma significativa na sociedade atual. Como aborda Santos (2016, p. 20) ao analisar o Censo Escolar de 2013, tira como dados que “as escolas somam um total de 88.261 turmas com Classes Multisseriadas, apresentando-se de forma expressiva em todas as regiões brasileiras, em particular na região Nordeste com cerca de 49.518 classes”.

O multisseriado se insere em uma organização que contém em um mesmo ambiente, diferentes alunos de diferentes níveis educacionais e por consequência diferentes níveis de aprendizado.

Nesse tocante temos duas correntes que se diferem a primeira, negativa o ensino do multisseriado como péssimo e de má qualidade, mas a segunda tem como premissa o ensino como sendo a primeira e talvez única porta de entrada para algumas pessoas adentrarem no ensino formal.





O Projeto de Formação Continuada dos Profissionais de Educação do Sistema Municipal de Educação de Buriticupu – PROSEMEB articulado à Universidade Federal do Maranhão - UFMA, foi a base de informações para essa pesquisa, pois ao proporcionar vivências com essas turmas pode contribuir com dados relevantes no que se refere as turmas do multisseriado no Maranhão. O projeto teve por objetivo “desenvolver ações de formação continuada adequadas às necessidades formativas de professores e gestores do sistema municipal de educação de Buriticupu” (CAVALCANTI, 2017, p. 7). Este projeto atendeu professores dos segmentos do Multisseriado Anos Finais e Iniciais, como também EJA 1º e 2º ciclo, Ensino Fundamental dos Anos iniciais e Anos finais.

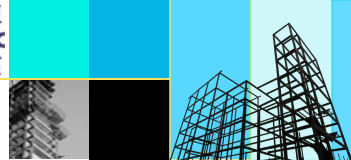
O quantitativo de professores de turmas multisseriadas somente no município de Buriticupu - MA durante a pesquisa foram de 238 (duzentas e trinta e oito), numeração crucial que fez com que o projeto tivesse aplicação e intervenção com mais problemáticas e desafios para os formadores que os outros segmentos ditos regulares.

Os dados do PROSEMEB revelam que do total de professores pesquisados que atuam no multisseriado no município 78% tinham apenas o magistério correspondente ao Ensino Médio atual, como formação inicial e, 4% possuíam formação completa na sua área de atuação.

## 2.1 O GEOGEBRA EM TURMAS DO MULTISSERIADO DA TEORIA A PRÁTICA EM SALA DE AULA – ANÁLISE E DISCUSSÕES

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmico, gratuito e multiplataforma criado por Markus Hohenwarter no ano de 2001. O GeoGebra tem várias aplicações no ensino de Matemática nas escolas regulares podem ser trabalhados conteúdos de Geometria, Álgebra, Aritmética, Estatística, Trigonometria, Cálculo, Funções e Probabilidade etc. Uma de suas vantagens é a facilidade de manipulação e visualização e a capacidade do mesmo ser multiplataforma. Nesse contexto, uma pergunta que surge é se “O uso do GeoGebra é possível em uma escola/turma multisseriada?” e “como essa aplicação é feita na prática com esses alunos nessas escolas/turmas do multisseriado?”.

Para responder as perguntas levantadas e refletir sobre os resultados foram abordadas e analisadas três pesquisas com aplicações no ensino do multisseriado que utilizaram como base para implementação e aplicação das atividades o software GeoGebra.



### 2.1.1 SOBRE OS TRABALHOS SELECIONADOS PARA A PESQUISA

Nessa seção vamos descrever brevemente os trabalhos selecionados. No total, foram encontradas três pesquisas brasileiras científicas divulgadas que utilizaram o GeoGebra em turmas multisseriadas, sendo um artigo e dois trabalhos de conclusão de especialização em Matemática, mídias digitais e didática para Educação Básica. Duas dessas pesquisas trabalharam exclusivamente o conteúdo de Geometria em suas aplicações e uma, por sua vez, trabalhou o conteúdo de frações aliado às representações geométricas.

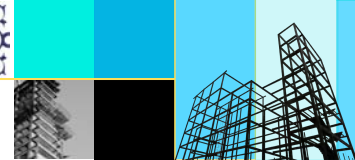
Para melhor detalhamento das pesquisas, apresentam-se: dados de identificação, objetivos, metodologia aplicada, resultados e reflexões acerca das práticas adotadas.

O primeiro artigo considerado: “GEOMETRIA X GEOGEBRA: possibilidades na sala de aula” de Nascimento, Guirado e Pereira (2014), descreve uma prática de ensino realizada com vinte alunos do multisseriado na escola de espaço não formal, Centro de Promoção Humana Eugênia Ravasco – CPHER, situado no município de Barreiras – BA. A pesquisa teve como objetivo geral, favorecer o estudo de conceitos iniciais sobre Geometria plana, que englobasse uma prática mais dinâmica, prazerosa e com base em propostas investigativas, proporcionando assim com o uso do software GeoGebra uma aula inovadora.

As aplicações das atividades foram divididas em momentos. No primeiro momento foram apresentados aos alunos os motivos e as contribuições que as pesquisadoras queriam ao aplicar as atividades com o conteúdo de Geometria.

No segundo momento foram apresentados aos alunos os conceitos e definições de ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas (paralelas e concorrentes) e ângulo, de forma que fosse mais próximo dos objetos existentes no dia a dia dos alunos, assim contextualizando os conteúdos a realidade dos mesmos.

Em um terceiro momento de aplicação das atividades, foram apresentadas as ferramentas do software GeoGebra que foram utilizadas nas aplicações das atividades propostas. Além disso, foram entregues aos alunos uma atividade dirigida, que as pesquisadoras construíram com o propósito de que, os alunos trabalhassem de forma mais autônoma e reflexiva, assim possibilitando que os mesmos pudessem usar o software de forma mais livre sem ajuda ou intervenções a todo momento pelas professoras



pesquisadoras. Sendo assim, as professoras ficaram como mediadoras de todo processo, intervindo em pontos quando necessários.

No último momento foram focadas as atenções ao uso do software na prática, com o uso das atividades dirigidas entregues nos primeiros momentos da aplicação. A atividade dirigida se constituía de pequenos passos para as construções dos conceitos geométricos no GeoGebra. Com o software em mãos, os alunos puderam validar as propriedades de conceitos de ponto, reta e plano, vistos anteriormente em explicações com o uso do quadro.

Dos resultados totais, as pesquisadoras perceberam “o quanto é enriquecedor poder trabalhar um conteúdo matemático de forma mais facilitada, prazerosa e com propostas que deixam os alunos mais receptivos” (NASCIMENTO, GUIRADO e PEREIRA, 2014, p. 6).

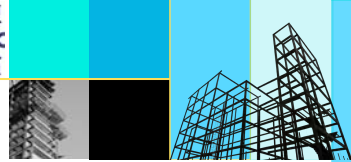
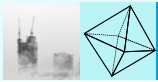
A autora Irmgard Simon teve uma abordagem semelhante a primeira análise, no trabalho de conclusão de especialização em Matemática, mídias digitais e didática para educação básica, que teve como título “O uso da fotografia e da tecnologia em aula de matemática numa escola do campo”. As abordagens foram semelhantes no sentido de ambos os trabalhos estarem preocupados com as conexões dos conteúdos trabalhados com o uso do software GeoGebra com a realidade dos discentes. Nesse sentido, a pesquisa foi aplicada com onze alunos de uma turma multisseriada, composta por alunos do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental, do município de Três Passos, localizado no interior do Rio Grande do Sul.

O objetivo da pesquisa e implementação do trabalho, “giraram em torno da realidade local e com práticas que contemplassem o uso de tecnologias de informação e comunicação, assim, possibilitando a construção de conceitos matemáticos escolares e não escolares” (SIMON, 2015, p.2).

A busca da autora com a pesquisa foi

investigar sobre as possibilidades de trabalhar com o uso da fotografia e transformações geométricas de isometria e homotetia das imagens no software GeoGebra na construção de conceitos matemáticos escolares e não escolares, assim a pesquisa se apoiando em uma abordagem qualitativa (SIMON, 2015, p. 3).

As atividades aplicadas tiveram no total oito momentos, sendo distribuídos em quatro encontros com o total de oito horas. Os momentos foram divididos em: fotografar



situações da realidade local, trabalhar as fotografias no Paint e salvar em formato JPEG, familiarização com o software GeoGebra, transformações isométricas de reflexão, transformações isométricas de translação, transformações isométricas de rotação, transformação geométrica de homotetia e socialização e avaliação. Todos os momentos estão descritos a seguir:

1º momento - Fotografar situações da realidade local:

Nesse primeiro momento os alunos foram a campo para fotografar imagens que representassem a realidade em que vivem. Em retorno a sala de aula, os alunos trocaram experiências sobre os motivos que os levaram a escolher tal registro de imagem. Nessa etapa, a professora relata que “todos estavam comprometidos e envolvidos com o trabalho que durou cerca de uma hora” (SIMON, 2015, p. 8).

2º momento - Trabalhar as fotografias no Paint (software da Microsoft para edição de imagens) e salvar em formato JPEG:

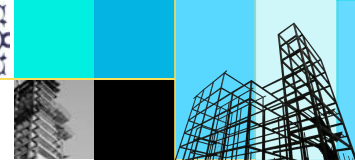
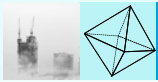
No segundo momento da aplicação das atividades só foi possível mediante a uso de notebooks da Escola e notebooks dos alunos e professoras, visto que, como relata a pesquisadora “a escola até dispunha de computadores, mas os mesmos estavam ultrapassados e funcionamento restrito a poucos comandos” (SIMON, 2015, p. 9). Ressaltando que os notebooks da escola foram obtidos com o Programa Dinheiro Direto na Escola – PDDE e Programa mais educação

3º momento - Familiarização com o software GeoGebra:

O momento em questão foi para familiarizar os alunos com as principais ferramentas do GeoGebra, como também sua interface. Desse modo as explicações e indagações feitas para os alunos tiveram o Datashow como auxílio às professoras.

4º momento - Transformações isométricas de reflexão:

O quarto momento foi dividido em aplicações de duas atividades com o uso do software GeoGebra e com a utilização das imagens salvas com o uso do Paint. A primeira sobre simetria de reflexão em relação a um ponto e a segunda, de reflexão em relação a uma reta. O objetivo da primeira atividade foi de “trabalhar o conceito de reflexão e simetria de uma imagem em relação a um ponto, para melhor compreensão de conceitos matemáticos como ponto, e localização de pontos no plano” (SIMON, 2015, p. 11).



A segunda atividade seguiu os passos da primeira, mas foi trabalhado a simetria em relação a uma reta. Nessa atividade, os alunos foram deixados a trabalharem por conta própria na execução de refletirem uma imagem em relação a uma reta.

5º momento - Transformações isométricas de translação:

Essa etapa do processo, requereu o uso de mais ferramentas do GeoGebra, como especificações de direção e sentido e amplitude do vetor. A atividade foi composta de passos que se iniciaram com, inserir a imagem no programa, inserir o vetor e, no final dos passos foi inserido um novo vetor em sentido contrário, e os alunos iriam observar o que acontecia ao transladar a imagem. O objetivo da atividade é “observar o comportamento das imagens e localização dos pontos no plano e desenvolver noções de vetores com a significação de direção (vertical, horizontal) e sentido (direita, esquerda, para cima ou para baixo)” (SIMON, 2015, p. 4).

6º momento - Transformações isométricas de rotação: O momento foi marcado pelas perguntas iniciais para direcionar os alunos ao conceito de rotação, assim perguntado sobre “o que nos lembra a rotacional?”. Os alunos deram várias respostas, entre elas a de que rotação, os remeter a rodar algo. Depois das exposições e explorações do conceito, os alunos foram chamados a rotacionar uma imagem no GeoGebra. A atividade seguiu com outras aplicações e uso de diferentes imagens, e ao final das aplicações os alunos foram indagados sobre “as propriedades comuns e diferenças entre as transformações isométricas de reflexão, translação e de rotação”. (SIMON, 2015, p. 18).

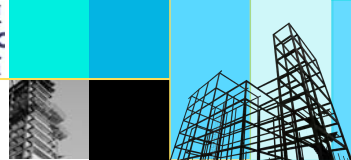
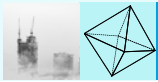
7º momento - Transformação geométrica de homotetia: A presente atividade de transformação geométrica de homotetia teve o objetivo de “observar que nesta transformação geométrica as mudanças são de proporcionalidades, as figuras são semelhantes, contudo, não congruentes” (SIMON, 2015, p. 18).

8º momento - Socialização e avaliação:

O último momento - Socialização e avaliação: O último momento foi marcado pela avaliação dos alunos e professora regente da turma para com as atividades aplicadas.

A seguir estão descritas as avaliações feitas pelos alunos A, B, C e pela professora regente:

Aluno A:



Gostei muito porque aprendi coisas novas que poderei usar algum dia. Nas aulas trabalhamos reflexão de imagem. Aprendemos o que é ponto, reta, segmento de reta, aprendemos que podemos fazer várias coisas no GeoGebra e com isso as aulas ficam mais divertidas. Também tiramos fotos e trabalhamos no Paint. Foi uma experiência muito boa, gostei bastante, e conseguimos aprofundar nossos conhecimentos (SIMON, 2015, p. 20).

Aluno B:

“Eu achei muito interessante porque aprendi coisas novas como ponto, reta, ângulos. A localização dos pontos no plano, a ampliação de fotografias. As aulas ficam mais interessantes com o GeoGebra” (SIMON, 2015, p. 21).

Aluno C:

“Eu achei muito bom mexer no computador e realizar as transformações isométricas. Também achei interessante trabalhar as fotografias no Paint. Trabalhar no GeoGebra, eu gostei porque as aulas ficam mais divertidas” (SIMON, 2015, p. 21).

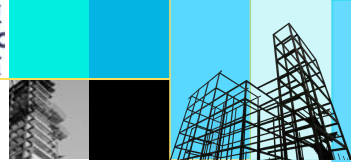
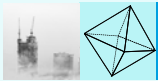
Professora regente:

Os conteúdos e atividades realizadas pela professora Irmgard são interessantes para contribuir no conhecimento dos educandos. A utilização das mídias faz com que os alunos demonstrem mais interesse, pois a informática faz parte dos cotidianos deles. Já nós educadores não tivemos em nossos anos de escola o uso das mídias, “somos da geração que não mexe, pois pode estragar”. Em meu curso superior não trabalhei com atividades utilizando mídias e nem mesmo em nossas formações continuadas. Sou uma professora que trabalha 60 horas em escola pública (município e estado) e ainda tenho dois filhos menores de 10 anos de idade que precisam muito de minha atenção, consumindo meu tempo fora da escola, por isso não disponibilizo de tempo para formação em mídias e assim poder usar em minhas aulas. As mídias representam uma ferramenta a mais na aprendizagem dos alunos, mas eu procuro fazer atividades práticas para construir o conhecimento dos meus educandos. (SIMON, 2015, p. 22).

A pesquisa possibilitou aos alunos olharem para além dos conteúdos e retratarem suas realidades e interesses nas fotos registradas. A pesquisadora ressalta que essa abordagem possibilita ao professor abordar questões que podem direcionar as aulas e projetos e serem desenvolvidos na escola e comunidade, envolvendo diferentes áreas do conhecimento (SIMON, 2015).

Diante de todas as possibilidades que o software GeoGebra engloba, no sentido de poder ser trabalhado vários conteúdos para além da Geometria, a pesquisa intitulada “Ensino de frações utilizando o GeoGebra” (2015), de autoria da pesquisadora e professora Cristina Back Weber, vem mostrar que isso pode ser trabalhado na prática e





mostrar que essas aplicações podem ser feitas em turmas multisseriadas em escolas localizadas no campo.

A pesquisa teve como foco alunos do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental, da cidade de Crissiumal, Rio Grande do Sul. Tendo como foco uma forma de diversificar o ensino-aprendizagem com o uso do GeoGebra.

Os conteúdos trabalhados foram o de soma e subtração de frações, que utilizou da manipulação de objetos geométricos, para fazer com que os alunos percebessem as propriedades da soma de frações por interpretações geométricas.

As atividades foram divididas em etapas, sendo que na primeira, foi requisitado que os alunos respondessem uma atividade avaliativa, na qual os alunos deveriam “desenvolver as mais diversas representações e cálculos envolvendo soma e subtração de frações”. (WEBER, 2015, p. 14). A atividade teve como objetivo avaliar o aprendizado dos alunos no início e no final da pesquisa, visto que, a mesma seria aplicada como avaliação final, para poder assim ter mais aparente os resultados obtidos com o uso do GeoGebra.

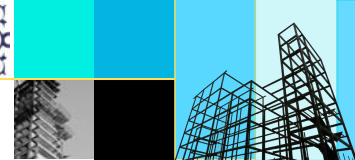
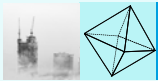
Dos resultados gerais a professora conclui que

percebe-se que em relação a representação de frações, foi eficiente, já ao relacionar o objeto “Adição de frações próprias” percebo que poderia haver uma mudança, não aparecer na tela o cálculo, isso faria com que os alunos desenvolvessem o raciocínio geométrico, para uma futura associação ao cálculo. Da forma apresentado percebo que os alunos manipulam o objeto apenas ao colocar as frações nos controles deslizantes, pois o restante da resolução está pronta (WEBER, 2015, p. 27).

A pesquisadora ressalta ainda que “considero que os objetivos foram alcançados com um crescimento relativo em relação ao ensino/aprendizagem dos alunos” (WEBER, 2015, p. 27).

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi desenvolvido uma pesquisa descritiva, de cunho bibliográfico e documental que buscou perpassar as pesquisas realizadas sobre o ensino de Matemática, formação docente, uso de tecnologias na educação, como também o uso dessas tecnologias em escolas do campo e em turmas do multisseriado. Para essa última, buscou o alinhamento com o software GeoGebra e como esse software dinamiza o processo de ensino/aprendizagem e que ele se torna um importante auxílio para os professores no



ensino de Matemática. Tendo três pesquisas relacionadas com a aplicação do GeoGebra em escolas localizadas no campo e as aplicações das ações se direcionando para três turmas do multisseriado, nos municípios de Barreiras – BA, Três Passos – RS e Crissiumal – RS, cada turma composta por 20, 11 e 5 alunos do multisseriado, respectivamente.

Ao analisar todo o trabalho de pesquisa e resultados encontrados, consideramos que os objetivos do trabalho foram alcançados, pois, mostrou que o uso do GeoGebra pode servir de auxílio para os professores do multisseriado e que esse recurso pode facilitar a forma de como os conteúdos de Geometria são entendidos pelos alunos. Além disso, a interação e possibilidades de manipulação engajam os alunos nas execuções das atividades.

## REFERÊNCIAS

CAVALCANTI, R. **Projeto de Formação Continuada dos profissionais de Educação do sistema municipal de educação de Buriticupu**. São Luís – Maranhão, 2017.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIL. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

NASCIMENTO, GUIRADO, PEREIRA. **GEOMETRIA X GEOGEBRA: possibilidades na sala de aula**. VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática, UNEB, 2014.

SANTOS, Magnólia Pereira. **A Pedagogia Histórico-Crítica e a formação continuada de professores para as classes multisseriadas em escolas do Campo**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação do Campo) – Universidade Federal da Bahia, 2016.

SIMON, Irmgard. **Uso da fotografia e da tecnologia em aula de matemática numa escola do campo. Trabalho de conclusão de curso**. (Especialização em Matemática, mídias, digitais e didática para educação básica) – UFRGS, 2015.

WEBER, Cristina Back. **Ensino de frações usando utilizando o Geogebra**. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática, mídias digitais e didática para educação básica) – UFRGS, 2015.



## RECORRÊNCIAS LINEARES EM PROBLEMAS ASSOCIADOS A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Aldivam do Carmo Albuquerque<sup>1</sup>

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso<sup>2</sup>

Anselmo B. Raposo Jr<sup>3</sup>

Josenildo de Souza Chaves<sup>4</sup>

**Resumo:** Neste artigo usamos as recorrências lineares de 2ª ordem para resolver certos problemas de contagem associados à sequência de Fibonacci. Este trabalho pode servir de base para o desenvolvimento do pensamento recursivo e motivar as aulas sobre técnicas de contagem.

**Palavras-chave:** Recorrências lineares, Problemas de contagem, Sequência de Fibonacci.

**Abstract:** In this article we use 2nd order linear recurrences to solve certain counting problems associated with the Fibonacci sequence. This work can serve as a basis for the development of recursive thinking and motivate classes on counting techniques.

**Keywords:** Linear recurrences, Counting problems, Fibonacci sequence.

### 1 INTRODUÇÃO

Recorrências lineares, embora não sejam abordadas na educação básica, representam uma técnica aplicada à resolução de muitos problemas de contagem. Muitas questões dos principais vestibulares do país e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP usam o raciocínio recursivo, fugindo do padrão adotado em sala de aula, a transmissão de problemas e soluções de forma mecanizada. Em geral, seguindo imposição dos livros didáticos. Para Albuquerque (2018, pg.11), instigar os alunos a pensar recursivamente pode ajudá-los a resolver problemas de contagem aparentemente difíceis, motivando-os e despertando a genialidade e criatividade na construção do pensamento matemático.

### 2 METODOLOGIA

Nesta Seção, seguindo Markuchevitch (1985, pg.08), apresentamos o problema de Fibonacci. Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Deseja-se saber quantos pares de coelhos ter-se-á no mês  $n$  considerando-se as restrições: (i) No primeiro mês nasce apenas um casal; (ii) Casais amadurecem e

<sup>1</sup> Secretaria de Estado da Educação do Maranhão, aldivamalbuquerque@gmail.com

<sup>2</sup> Instituto Federal do Maranhão, ana.cardoso@ifma.edu.br

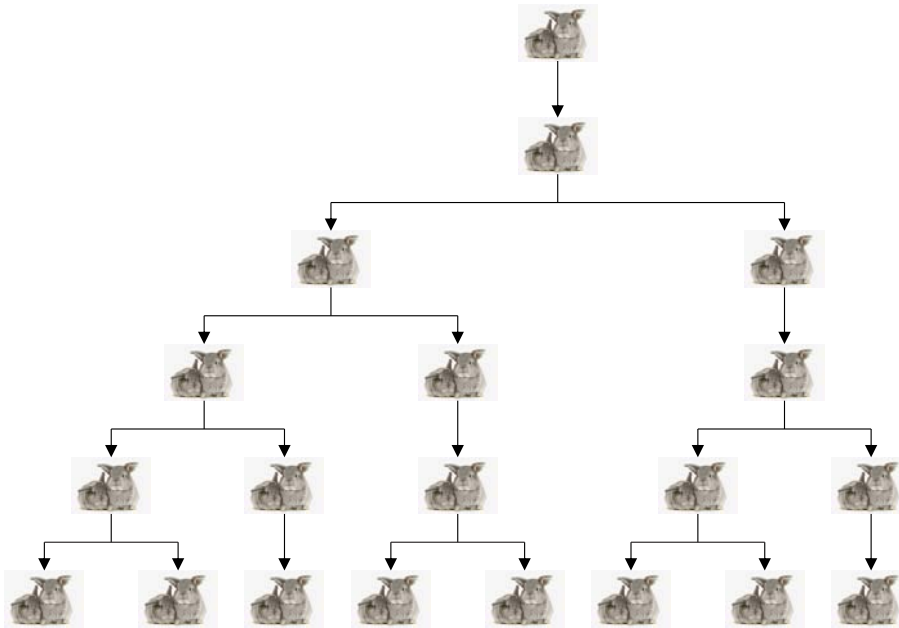
<sup>3</sup> Universidade Federal do Maranhão, anselmo.junior@ufma.br

<sup>4</sup> Universidade Federal do Maranhão, js.chaves@ufma.br

reproduzem-se apenas após o segundo mês de vida; (iii) Não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo; (iv) Todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal; (v) Os coelhos nunca morrem.

O número de pares de coelhos adultos no momento inicial é  $x_1$ , no fim do primeiro mês é  $x_2$ , no fim do segundo mês é  $x_3$  e, de um modo geral, no fim do  $n$ -ésimo mês,  $x_{n+1}$ . Observemos o esquema da Figura 1.

Figura 1 – Os coelhos de Fibonacci



Fonte: Os autores

Temos, então,  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots$ . No fim do  $(n + 1)$ -ésimo mês, o número de casais de coelhos é dado pela quantidade de casais adultos no fim do  $n$ -ésimo mês acrescida do número de casais nascidos no fim deste mesmo mês. O número destes últimos sendo igual ao número de casais já adultos no  $(n - 1)$ -ésimo mês, nos permite inferir que

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

de onde se segue que,

$$x_4 = x_3 + x_2 = 3, x_5 = x_4 + x_3 = 5, x_6 = x_5 + x_4 = 8, \dots$$

A sequência  $(x_n)$  assim definida é denominada **sequência de Fibonacci**, que é uma sequência recorrente de ordem dois.

Agora, determinaremos uma fórmula fechada para a sequência de Fibonacci, da qual extraímos que o número de pares de coelhos adultos no mês  $n + 2$  é  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  com  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$ , sendo conveniente, no que segue, considerarmos  $F_0 = 0$ .

Fazendo uso da metodologia para determinar a solução das equações de recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes, temos:

1º passo - Tem-se que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Sua equação característica é  $r^2 - r - 1 = 0$ .

2º passo - As raízes da equação característica são  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

3º passo - Determinando as constantes  $A$  e  $B$ , tal que

$$F_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Como  $F_0 = 0$  e  $F_1 = 1$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} Ar_1^0 + Br_2^0 = 0 \\ Ar_1 + Br_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Portanto, o termo geral da sequência de Fibonacci é

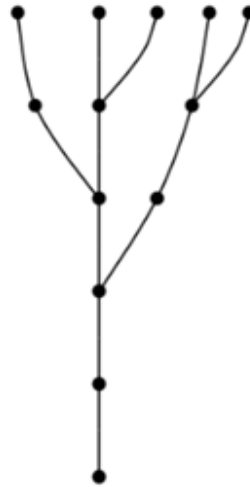
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (1)$$

### 3 RESULTADOS

Problemas de contagem que seguem a sequência de Fibonacci podem melhorar aspectos cognitivos dos alunos, pois instiga o pensamento no sentido de buscar generalizações de padrões na forma de contar. No exemplo seguinte abordamos um problema que recai na sequência de Fibonacci.

**Exemplo 3.1** Banco de questões OBMEP, 2013 - Nível 1 - Questão 14: Vai dar galho - adaptada. A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra: (i) na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho; (ii) após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana; (iii) cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana. A Figura 2 ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas do início de seu crescimento.

Figura 2 – Árvore do professor Fernando



Fonte: Os autores

Note que após três semanas havia dois galhos; após quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos. Quantos galhos haverá após treze semanas? Continuando as ramificações de crescimento conforme as regras estabelecidas, obtemos após a sexta semana de crescimento um total de 8 galhos.

Podemos verificar que a sequência que determina o número de galhos por semana de crescimento é uma sequência de Fibonacci, sendo que aqui os coelhos foram substituídos por galhos e os meses substituídos por semanas. De modo geral,  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  para  $n \geq 1$ . De acordo com a fórmula fechada da sequência de Fibonacci (1), o 13º termo é dado por

$$F_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{13} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{13} = 233.$$

Logo, a quantidade de galhos após a 13ª semana é 233.

Este resultado não é simples de se obter sem o apoio computacional. Obviamente, para um  $n$  pequeno, podemos calcular termo a termo até o 13º, como segue: 6º termo = 8; 7º termo = 13; 8º termo = 8 + 13 = 21; 9º termo = 13 + 21 = 34; 10º termo = 21 + 34 = 55; 11º termo = 34 + 55 = 89; 12º termo = 55 + 89 = 144; 13º termo = 89 + 144 = 233.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um motivo que levou a realização deste trabalho foi a apatia dos alunos frente à matemática repetitiva e mecanizada apresentada em sala de aula. Espera-se que este trabalho possa ser associado às ferramentas de resolução de exercícios usados na educação básica, incentivando o raciocínio do aluno a partir das construções do pensar recursivo, pois iniciando o processo o mesmo poderá visualizar padrões numéricos mais atrativos e assim se deleitar na beleza da modelagem matemática.



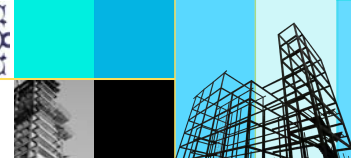


## REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Aldivam do Carmo. Resolução de Problemas de Contagem usando Recorrências Lineares. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luis - MA, 2018.

MARKUCHEVITCH, A. Sequências Recorrentes. Moscou: MIR, 1985.

OBMEP, Banco de questões 2013. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.



## USO DO MANCALA COMO FERRAMENTA NA PRÁTICA DE ENSINO DA DISCIPLINA MATEMÁTICA DO IEMA PLENO COLINAS

Autor(a) Erica Patricia de Oliveira Santos<sup>1</sup>

Autor(a) Marceane Gomes da Silva<sup>2</sup>

Autor(a) Ronaldo Dantas dos Santos<sup>3</sup>

**Resumo:** Este trabalho é interdisciplinar, leva em consideração as dificuldades de aprendizagem com a disciplina de matemática, a exemplo de cálculos, nesse contexto este artigo aborda o jogo mancala, ressaltando também a utilização de materiais recicláveis, proporcionando maior acessibilidade, recorrendo ao reaproveitamento de insumos. Desta forma, o professor é um multiplicador da aprendizagem, conseqüentemente este projeto é interdisciplinar, com o envolvimento sensível, crítico reflexivo da professora de sociologia, o professor de física e matemática, estes aspectos interdisciplinar, tem como bases teóricas fundamentais, Zaslavsky (2000) discute a origem do jogo mancala e Candau (2008) que aborda a necessidade da construção de práticas pedagógicas, evidenciando o professor como o mediador do conhecimento, que envolve um conjunto de informações. Por conseguinte a metodologia utilizada é qualitativa e quantitativa com base em (GOLDENBERG, 2000). Em síntese o resultado, ficou evidente na melhoria do desempenho dos alunos na disciplina de matemática, aumentando sua motivação e interesse. Esperamos também que os resultados deste projeto possam servir de base para futuros estudos sobre o uso de tecnologias na educação.

**Palavras-chave:** Mancala; Ensino; Aprendizagem; Matemática.

**Abstract:** This work is interdisciplinary, takes into account learning difficulties with the discipline of mathematics, such as calculations, in this context this article addresses the mancala game, also emphasizing the use of recyclable materials, providing greater accessibility, resorting to the reuse of inputs. In this way, the teacher is a multiplier of learning, consequently this project is interdisciplinary, with the sensitive involvement, critical reflexive of the sociology teacher, the physics and mathematics teacher, these interdisciplinary aspects, has fundamental theoretical bases, Zaslavsky (2000) discusses the origin of the game mancala and Candau (2008) which addresses the need to build pedagogical practices, highlighting the teacher as the mediator of knowledge, which involves a set of information. Therefore the methodology used is qualitative and quantitative based on (GOLDENBERG, 2000). In summary, the result was evident in the improvement of students' performance in the mathematics discipline, increasing their motivation and interest. We also hope that the results of this project can serve as a basis for future studies on the use of technologies in education.

**Keywords:** Mancala; Teaching; Learning; Math

### 1 INTRODUÇÃO

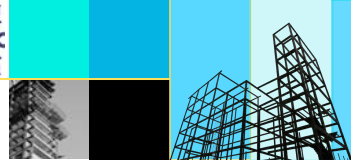
Os professores às vezes se esforçam para responder à pergunta: *Por que a matemática é importante?* A verdade é que a matemática está entrelaçada em cada elemento de nossas vidas de maneiras diretas e indiretas. Ao ajudar seus alunos a entender

---

<sup>1</sup> Vínculo (IEMA). e-mail [ericapatricia0987@gmail.com](mailto:ericapatricia0987@gmail.com)

<sup>2</sup> Vínculo (IEMA). e-mail [marceaneg@gmail.com](mailto:marceaneg@gmail.com)

<sup>3</sup> Vínculo (IEMA). e-mail [ronaldantas11@gmail.com](mailto:ronaldantas11@gmail.com)

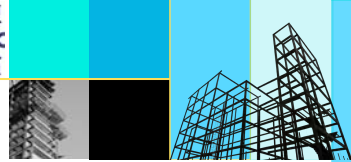
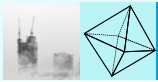


a importância da matemática e suas conexões com o mundo real, você pode ensiná-los a valorizar suas habilidades matemáticas como habilidades de vida necessárias e não apenas regras e procedimentos necessários para passar em um exame avaliativo. Além disso, ensinar e aprender matemática é um verdadeiro desafio para os professores, mas também para os alunos. Seja encontrando alunos com dificuldades de aprendizagem, ou, pelo contrário, alunos com maior capacidade intelectual, a tendência atual na educação é adaptar os conhecimentos, de maneira que as reconfigurações do ensino é viabilizada por meios e métodos de ensino; considerando que às peculiaridades individuais dos alunos, defendendo ainda mais o conceito de aprendizagem diferenciada.

A atitude de um estudante em aprender matemática deve ser ativa. Ele precisa aprender a pensar por si mesmo, a abordar e buscar soluções individuais para problemas ou demonstrações de teoremas que ele pode então discutir com os outros. O pensamento matemático envolve a capacidade de raciocinar em estágios rigorosamente compostos, a lógica é primordial durante o processo de resolução de problemas matemáticos, sendo viável observar a complexidade da matemática no cotidiano humano. Desta maneira, a matemática também viabiliza a capacidade de concentração, na qual o estudante necessita de um longo ou curto período de tempo.

Diante disso, nosso trabalho irá trazer uma abordagem, sobre o Mancala, na Zaslavsky (2000), a palavra Mancala origina-se do Árabe, que significa mover, deslocar ou transportar. O jogo Mancala é tão velho quanto se possa imaginar. De acordo com pesquisadores, não se tem uma data certa, estima-se que data de 2000 a.C. a 5000 a.C, e por sua longa data é considerado o jogo mais antigo do mundo ou até mesmo, o “pai” dos jogos. Os jogos de Mancala receberam grande atenção de matemáticos nas últimas décadas, neste âmbito podemos destacar os estudos de Missawa (2006) extremamente benéficos para crianças hiperativas, pois ajuda a aumentar a concentração e a autorregulação, pois ajuda a melhorar as habilidades cognitivas. Além disso, em seus experimentos os alunos com hiperativas estes venceram os alunos ditos "normais". Alguns estudos sugeriram o uso de jogos de Mancala na educação matemática e introduziram certas variantes dos jogos na escola (Zaslavsky 2000).

No aspecto pedagógico o presente trabalho apoia-se em Candau (2008) para analisar o papel do professor enquanto “facilitador da aprendizagem”, como auxiliador do aluno, figura central do processo de ensino-aprendizagem, com um olhar sensível aos fatores psicológicos (CANDAUI, 2008). Portanto, o professor é um mediador do



conhecimento, que envolve um conjunto de informações. As particularidades de cada aluno, como suas dificuldades de aprendizagem, são percebidas através do olhar sensível do professor, assim as dimensões que o ensino da sociologia na escola assume são baseados em reflexões.

Desta forma, com o intuito de proporcionar novas práticas que instigue e dinamize o ensino de matemática, que desenvolvemos este trabalho com objetivo despertar a curiosidade e o senso críticos dos alunos do 1º ano do ensino médio técnico do Instituto de Educação e Tecnologia do Maranhão (IEMA), além disso, o projeto “Mancala da escola à comunidade” visa levar os conhecimentos matemáticas para além do muro da escola, a comunidade Quilombola Peixe que fica localizada em Colinas-MA.

## **2 PROFESSOR O FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

Para tanto a Pedagogia do Oprimido, foi desenvolvida por Paulo Freire com base na sua experiência em educação popular, onde ele passou a observar o processo de opressão social e “sabotagem”, que as classes dominantes exercem sobre as dominadas, por meio da educação. Segundo Paulo Freire os indivíduos podem “quebrar” tal domínio por meio de uma “educação libertadora”, mas o sistema de opressão imposto sobre eles, gera um sentimento de admiração e o objetivo de ser o opressor, o que reforça e inflama ainda mais tal sistema.

Já Bourdieu (1999) traz uma análise de como a cultura, que perpassa o interior das famílias, está diretamente ligada com o rendimento escolar, a escola que o aluno está inserido e o compromisso dos professores para com os seus alunos. Quando incutidos dos conceitos e categorias analíticas desenvolvidos por Bourdieu para compreender o universo escolar e a cultura, começamos a compreender a razão de a escola ser, em diversos momentos, estranha e indiferente às necessidades e vivências dos alunos.

Ela rejeita a bagagem destes para impor-lhes um modo de proceder e uma linguagem estranha ao seu mundo, tornando o processo de ensino-aprendizagem muito mais dificultoso para aqueles cuja realidade está distante em vários aspectos daquela experimentada na escola. Para o sociólogo, a escola projeta e perpetua a dominação simbólica de alguns grupos sobre a realidade, através da imposição de suas próprias categorias e visões de mundo.

Desta maneira, a ação educativa ocorre na instituição escolar com o professor e a

interação com os alunos, que abrange o ensino-aprendizagem, considerando as especificidades e diferenças de cada sujeito (CANDAUI, 2008). É importante o professor de matemática ter um olhar compreensivo reflexivo acerca do ensino, e como se constituirá o aprendizado, levando em consideração que o ensino tem como principal finalidade a aprendizagem do aluno, deste modo, ensinar e aprender envolve o sujeito que ensina o “professor” e o “aluno” que aprende, sendo necessário uma inter-relação.

Conforme ressaltado anteriormente, o professor é o transmissor de conhecimento, que ensina e conduz ao processo de aprendizagem, no entanto nem sempre o aluno recebe os ensinamentos de forma compreensiva, portanto, o processo de ensino deve se adaptar conforme a capacidade de aprender dos alunos, de acordo com os assuntos.

O ensino requer planejamento, sistematização e avaliação, com o objetivo de selecionar conteúdos e estratégias de ensino, principalmente a disciplina de matemática, com a utilização de recursos, como por exemplo para melhorar e avaliar a aprendizagem do aluno. O professor exerce a função de criar condições para o aluno, exercer a ação de aprender. O bom professor também desenvolve técnica para melhor refletir o ensino que será aplicado em sala de aula.

## 2.1 METODOLOGIA

A estrutura metodológica utilizada se fundamenta primeiramente em uma vasta análise bibliográfica sobre as características do projeto de intervenção a ser desenvolvido. As técnicas adotadas para nos auxiliar na interpretação das informações adquiridas será a pesquisa quantitativa e qualitativa, se configurando em dois principais momentos. Ressaltando que está em fase inicial, pelo professor da disciplina utilizando o jogo mancala. Em que foi elaborado o pré-projeto com os principais eixos temáticos que desenvolvemos, com o enfoque nos conteúdos trabalhados na matemática que envolve a mancala.

Quadro 1 – Etapas da pesquisa

ETAPAS	AÇÕES
ETAPA I	Os professores ficaram responsáveis para a aplicação de um questionário sobre a temática trabalhada em sala de aula, para nos atemos as como se configura o conhecimento prévio dos alunos, após a etapa iremos fazer embasamento teórico sobre o conceitos, vislumbrando condicionar a

	aprendizagem significativa dos alunos que formaram o grupo, tornando aptos a relacionar os estudos teóricos com os práticos.
ETAPA II	Os estudantes envolvidos em todo o projeto passarão por orientação específica para a realização do projeto em campo. Ao final realizaremos uma análise do desenvolvimento na aprendizagem dos alunos em relação ao mancala e suas aplicações presenciais habitualmente. A pesquisa é de caráter qualitativo, pois “é útil para identificar conceitos e variáveis relevantes de situações que podem ser estudadas qualitativamente” (GOLDENBERG, 2000, p. 63). Para Goldenberg (2000) “também é evidente o valor da pesquisa qualitativa para estudar questões difíceis de quantificar” (GOLDENBERG, 2000 p. 63), o método qualitativo permite alcançar conceitos que são visíveis que podem ser sustentados e conseqüentemente dar rigor científico as questões que constituem a sociedade.
ETAPA III	Por fim a atividade será realizada por meio de visitas neste ano de 2023 à comunidade Quilombola Peixe que fica localizada em Colinas-MA; esta comunidade possui um grupo diversificado humano, logo é relevante salientar aspectos sociológicos que constitui a comunidade. Ao observar os indivíduos e seus comportamentos em grupo será viável construir um olhar reflexivo sobre a constituição das particularidades e coletividades da comunidade, por meio da análise comportamental dos indivíduos.

Fonte: Ronaldo Dantas dos Santos (2022.2)

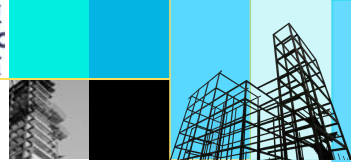
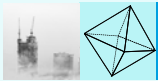
## 2.2 RESULTADO ESPERADO

Quanto aos resultados para o projeto, foi viável abrir possíveis caminhos no desenvolvimento de um senso crítico e reflexivo relacionado ao ensino de matemática para alunos do ensino médio, no desenvolvimento das duas etapas, pois acreditamos que é possível desenvolver a consciência e a percepção crítica dos estudantes por meio do uso de recursos tecnológicos. O uso desses recursos lúdicos podem ajudar a melhorar o desempenho dos estudantes na disciplina de matemática, aumentando sua motivação e interesse. Esperamos também que os resultados deste projeto possam servir de base para futuros estudos sobre o uso de ferramentas didáticas na educação.

## 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em suma este trabalho foi de grande valia para a instituição escolar, infelizmente já estava no final do 4º período, mas foi importantíssimos para os profissionais envolvidos





e os estudantes, porque viabilizou em aproximadamente um mês trabalhar habilidades como a coordenação motora fina, concentração, uso de estratégias, raciocínio lógico e memória. A destacar que a escola é um ambiente em que existe uma relação afetiva dos professores para com os estudantes. A questão da afetividade aparece estreitamente ligada ao processo de mediação de conteúdos e à organização disciplinar dos alunos como forma de viabilizar o ensino-aprendizagem.

Portanto, o papel do professor abrange múltiplas configurações, que correspondem a diferentes técnicas, conteúdos, orientações, ou seja, a reprodução do saber. É fundamental assumir princípios científicos e educativos, apresentar proposições metodológicas fundamentais para o rompimento das práticas da reprodução, mas propor um ensino inovador.

## REFERÊNCIAS

BOURDIEU, Pierre Felix. **O poder simbólico: introdução a uma sociologia reflexiva**. 1999, p.17- 58.

CANDAU, Vera Maria (org.). **Rumo a uma nova didática**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2008

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 26.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1999

GOFFMAN, Erving. **A representação do eu na vida do cotidiano: Representações**. Petrópolis: Vozes. p. 25-75. 1985.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. Rio de Janeiro: Record, 2000.

MISSAWA, Daniela Dadalto Ambrozine. **O Jogo Mancala como instrumento de ampliação da compreensão das dificuldades de atenção**. Vitória, ES:PPGP/UFES, 2006.

ZASLAVSKY, C. **Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro: diversão multicultural para idades de 8 a 12 anos**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000

## AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de expressar nossa profunda gratidão a todos aqueles que contribuíram para a produção deste trabalho. Em especial, queremos agradecer aos professores Erica Patrícia de Oliveira Santos e Ronaldo Dantas dos Santos, por sua contribuição inestimável para o desenvolvimento deste trabalho. Finalmente, agradecemos a todos aqueles que contribuíram para a realização deste artigo, direta ou indiretamente. Vocês foram fundamentais para o sucesso deste projeto.



## BRINCANDO & APRENDENDO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Ione da Silva Guterres<sup>1</sup>  
José Carlos de Melo<sup>2</sup>

**Resumo:** Esta pesquisa teve como objetivo analisar a importância da utilização do brincar no contexto da ampliação do pensamento lógico-matemático e sua contribuição para o desenvolvimento integral das crianças pequenas. Realizou-se a pesquisa de campo, exploratória e qualitativa. A análise dos dados revelou que das 17 entrevistadas (08 acadêmicas do Curso de Pedagogia e 09 professoras da Educação Infantil), 15 afirmaram que há espaço para a Matemática na Educação Infantil, quando as crianças utilizam diversidades de jogos, brinquedos e brincadeiras. Contudo, 02 educadores mencionaram o ensino fragmentado e dissociado da cultura infantil.

**Palavras-chave:** Ludicidade, Matemática, Educação Infantil.

**Abstract:** This research aimed to analyze the importance of playing in the context of expanding logical-mathematical thinking and its contribution to the integral development of young children. Field, exploratory and qualitative research was carried out. Data analysis revealed that amongst 17 interviewees (08 academics in Pedagogy and 09 teachers from Early Childhood Education), 15 stated that there is space for Mathematics in Early Childhood Education, when children use diversities of games, toys and games. However, 02 educators mentioned the fragmented and dissociated teaching in children's culture.

**Keywords:** Playfulness, Mathematics, Early Childhood Education.

### 1 ABRINDO A DISCUSSÃO... UMA PRIMEIRA CONVERSA

As preocupações com a qualidade do ensino de matemática, tornaram-se mais frequentes desde a Educação Infantil, e há muitos estudos mostrando como dar as crianças, dessa faixa etária educacional, a oportunidade de iniciar adequadamente sua primeira exposição ao conhecimento, nessa área da educação (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000). Nessa perspectiva, a intenção desta pesquisa é evidenciar a importância da utilização dos jogos, dos brinquedos e das brincadeiras no contexto da ampliação do pensamento lógico-matemático e sua contribuição para o desenvolvimento integral no processo ensino aprendizagem das crianças pequenas.

Foram escolhidos pesquisadores da área, como Smole; Diniz; Cândido (2000); Macedo (2007) e Kamii (1997) para dar fundamentação a este escrito. Fez-se ainda um apanhado dos principais documentos que versam sobre o ensino da matemática na Educação Infantil, dentre eles a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) e as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil – DCNEIs (BRASIL, 2010). Dessa forma, organizou-se este artigo em duas seções, além da introdução e das considerações finais. Na primeira seção apresenta-se, a partir dos estudos

---

<sup>1</sup> Mestre em Educação – Gestão de Ensino da Educação Básica (PPGEEB-UFMA) e Membro do Grupo de Estudos, Pesquisa, Educação, Infância & Docência – GEPEID-UFMA. E-mail: [ioneguterres@hotmail.com](mailto:ioneguterres@hotmail.com)

<sup>2</sup> Pós-doutor em Educação, Docente do Departamento de Educação II da Universidade Federal do Maranhão e do Programa de Pós-Graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica – PPGEEB-UFMA, Coordenador do Grupo de Estudos, Pesquisa, Educação, Infância & Docência – GEPEID-UFMA. E-mail: [mrzeca@terra.com.br](mailto:mrzeca@terra.com.br)

das pesquisadoras Smole; Diniz; Cândido (2000), a importância do brincar e das brincadeiras no ensino da matemática na Educação Infantil. Na segunda seção serão apresentados os resultados e discussões da pesquisa.

Nesse sentido, a partir da aplicabilidade de uma oficina pedagógica, intitulada “Brincando & Aprendendo Matemática na Educação Infantil”<sup>3</sup>, com docentes da rede pública e privada de São Luís do Maranhão e estudantes do curso de Pedagogia da Universidade Federal do Maranhão – UFMA e interessados na temática da oficina, realizou-se a pesquisa de campo de cunho qualitativa e exploratória. Os instrumentos de geração de dados foram a observação participante e a aplicação de uma entrevista semiestruturada com 17 participantes (08 acadêmicas do curso de Pedagogia e 09 professoras da Educação Infantil).

Compreender, discutir e refletir sobre o ensino da matemática desde a Educação Infantil e a sua contribuição para as crianças pequenas, é sempre uma oportunidade de demonstrar nossos pensamentos para que as gerações mais novas e as futuras tenham melhores oportunidades em atender às suas necessidades e talentos como cidadãos, agentes ativos e sujeitos históricos.

## **2 AS BRINCADEIRAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: Por que brincar?**

Quando fala-se em brincar na Educação Infantil, depreende-se dois aspectos para pensar: o brincar institucionalizado e o brincar imaginário. Ambos os aspectos estão imbuídos do processo de formação social das crianças, contribuindo para a valorização das suas culturas infantis. Nesse contexto, as DCNEIs, a BNCC e a Resolução nº 5, de 17 de dezembro de 2009, no que se refere à Educação Infantil, preconizam a concepção de criança.

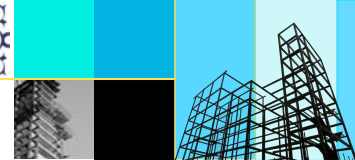
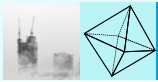
Assim sendo, é unânime nesses documentos a criança como o centro do planejamento curricular, sujeito histórico e de direitos que estabelece sua identidade pessoal e coletiva na interação, relações e práticas cotidianas quando vivencia, brinca, imagina, fantasia, deseja, aprende, observa, experimenta, narra, questiona e constrói sentidos sobre a natureza e a sociedade, produzindo cultura (BRASIL, 2009).

Considerando as habilidades das crianças na produção cultural, por meio da linguagem do brincar, propõe-se uma proposta de trabalho em matemática baseada na ideia de que há espaço para matemática na Educação Infantil e que há um ambiente criado na sala que caracterize: [...] “pela proposição, investigação e exploração de diferentes situações-problema” (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000, p.14).

É relevante ressaltar que, a partir da Educação Infantil, os educadores da primeira infância devem se concentrar em desenvolver o respeito às ideias de todos, valorizando e discutindo os raciocínios, soluções e problemas das crianças; isso gera elementos de construção de uma comunidade social e intelectual e requer muitas oportunidades para o trabalho em grupo, seja em duplas, trios, quartetos ou mesmo com a turma inteira, para criar o desenvolvimento da sociabilidade, da cooperação e do respeito mútuo entre as crianças, possibilitando a aprendizagem significativa por meio das brincadeiras infantis.

---

<sup>3</sup> A oficina pedagógica foi ministrada no II Workshop do Grupo de Estudos Pesquisas Educação Infância & Docência (GEPEID) e enfatizou a importância dos jogos, das brincadeiras e dos brinquedos na área da matemática.



Nesse cenário, o educador precisa observar, acompanhar e ser criativo em relação as suas práticas docentes no contexto educacional, utilizando os jogos, os brinquedos e as brincadeiras na matemática como suporte para descobrir variadas maneiras de brincar com as crianças. Como afirma Kishimoto (2010), é importante que o adulto sempre observe, acompanhe e participe do brincar da criança para a criação de vínculos e mediações durante o ato de brincar.

Essa forma de acompanhamento do brincar do adulto com a criança possibilita que ela se desenvolva integralmente, pois a cultura lúdica se manifesta por meio da interação da criança com os seus pares. Ainda concordando com as ideias de Kishimoto (2010), a autora apresenta sugestões de brinquedos e materiais para a Educação Infantil, com especificações para crianças pré-escolares (4 a 5 anos e 11 meses). Para essas crianças ela recomenda brinquedos diversos, materiais de arte, tanques de areia e materiais para brincadeiras na água e areia, sucatas, entre outros.

Já as autoras Smole; Diniz; Cândido (2020, p. 13), afirmam:

Em matemática, utilizar as brincadeiras infantis como um tipo de atividade frequente significa abrir um canal para explorar ideias referentes a números de modo bastante diferente do convencional. De fato, enquanto brinca, a criança pode ser incentivada a realizar contagens, comparação de quantidades, identificar algarismos, adicionar pontos que fez durante a brincadeira, perceber intervalos numéricos, isto é, iniciar a aprendizagem de conteúdos relacionados ao desenvolvimento do pensar aritmético. Por outro lado, brincar é uma oportunidade para perceber distâncias, desenvolver noções de velocidade, duração, tempo, força, altura e fazer estimativas envolvendo todas essas grandezas.

Por esse motivo, pensa-se que a brincadeira na matemática pode ser útil para as crianças, mas para isso deve conter situações de aprendizagens significativas, interessantes e desafiadoras para que elas participem, usem de suas estratégias, estabeleçam planos e descubram possibilidades para aprender brincando com brincadeiras que tenham uma finalidade pedagógica.

Certamente as brincadeiras não são o único recurso para expor as crianças ao conhecimento matemático, mas aproveitando sua riqueza e seu encantamento em algumas oportunidades permite que o ensino de matemática aconteça de forma mais significativa, abrangendo as diversas habilidades dos alunos, dando mais oportunidades para todos aprenderem.

### **3 RESULTADOS E DISCUSSÃO: Há espaço para uma proposta pedagógica de matemática com as crianças pequenas<sup>4</sup>?**

A oficina pedagógica foi ministrada no II Workshop do Grupo de Estudos Pesquisas Educação Infância & Docência (GEPEID), que aconteceu no dia 30 de

---

<sup>4</sup> O termo “crianças pequenas” está explicitando, na BNCC, Educação Infantil. Este termo reconhece a educação como primeira etapa da Educação Básica e a mesma é constituída por três grupos etários classificando as crianças em 3 blocos: bebês (de zero a 1 ano e 6 meses), crianças bem pequenas (de 1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses) e crianças pequenas (de 4 a 5 anos e 11 meses) (BRASIL, 2017).



novembro de 2019, na Universidade Federal do Maranhão – UFMA, conforme apresentada na figura 1.

Figura 1 – Espaço da Oficina de Matemática



Fonte: Arquivo Pessoal da Autora (2019)

Conforme apresentado na figura 1, a Oficina: “Brincando e Aprendendo Matemática na Educação Infantil”, fez parte do II Workshop do Grupo de Estudos, Pesquisa, Educação, Infância & Docência - GEPEID, que versava sobre a Educação Infantil x Qualidade e a Formação de Educadores de Crianças Pequenas. Durante os momentos da oficina ocorreram a realização de jogos, brinquedos e brincadeiras com proposições pedagógicas para serem trabalhados e ou utilizados na área de matemática para as crianças pequenas.

A seguir, apresenta-se de acordo a recomendação dasicineiras/palestrantes o recurso pedagógico denominado Tapete da Matemática (Ver figura 2), que tem a finalidade de trabalhar com os numerais, associando quantidades. Os números estão aleatórios para evitar que as crianças decorem a sequência numérica e façam a associação por contagem. Os bolsos laterais são para guardar as quantidades.

Figura 2 – Tapete da Matemática



Fonte: Arquivo pessoal da autora (2019)

Conforme Kamii (1997, p.70), o educador precisa estimular o pensamento numérico das crianças considerando que: “A criança não constrói o número fora do contexto geral do pensamento no dia-a-dia, cabendo ao educador encorajar as crianças a expressarem as suas ideias, em vez de focalizar apenas a quantificação”.

Assim sendo, é sabido que as interações e a brincadeira estão presentes em todas as atividades curriculares da Educação Infantil. Contudo, percebe-se que em algumas situações pedagógicas os jogos, os brinquedos e as brincadeiras ocorrem com mais frequência nas atividades de linguagem, deixando em dúvida a seguinte inquietação: há espaço para a Matemática com as crianças pequenas?

Partindo dessa inquietação, o ponto de partida para geração dos dados desta pesquisa de campo e exploratória de cunho qualitativa, ocorreu com a observação participante e aplicação de uma entrevista semiestruturada. O momento inicial da oficina ocorreu por meio da acolhida das participantes, seguido da realização da apresentação dos objetivos do encontro e a leitura compartilhada do texto: “O papel do professor é acreditar no potencial dos alunos”, de Kátia Smole.

Dando continuidade, apresentou-se o slide do tema da oficina, refletindo acerca da temática; complementando com a exibição de vídeos e discussões sobre Letramento Matemático na Educação Infantil e o Brincar e a Matemática.

Cabe ressaltar que no decorrer da Oficina de construção de jogos, brinquedos e brincadeiras, concomitantemente foram sendo realizadas as entrevistas semiestruturadas com as participantes que estavam disponíveis. Talvez, na escola ainda não nos atentamos para o fato de que brincadeiras e jogos como amarelinha, corda e pegador, tenham exercido ao longo da história importante papel no desenvolvimento das crianças, e por isso, estejam tão distantes das atividades em sala de aula (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000).

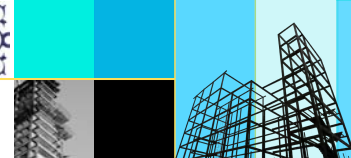
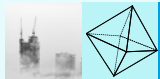
Participaram da oficina 17 sujeitos, sendo 08 acadêmicas do curso de Pedagogia e 09 professoras da Educação Infantil. É válido refletir que as respondentes sentiram dificuldades em relacionar a prática pedagógica docente de forma lúdica e contextualizada com o ensino da matemática.

A entrevista foi iniciada com o seguinte questionamento: Há espaço para a Matemática na Educação Infantil? Explique. Das 17 entrevistadas, apenas 01 respondeu que não há espaço para a Matemática, porque os professores priorizam a Linguagem Oral Escrita à Matemática. Contudo, 16 respostas foram unânimes, afirmando que a Matemática está presente sim nos conhecimentos, nas brincadeiras como amarelinha, nas contagens como contar a própria idade. Uma resposta foi intrigante, afirmaram que sempre há espaço para Matemática, embora muitas vezes não seja bem utilizado.

Assim, considera-se que a criança pequena nos primeiros anos de vida, até por volta de sete anos, segundo Piaget, desenvolve a inteligência sensório-motora e depois simbólica. Dessa maneira, a criança pensa, imagina e questiona; ela não cansa de olhar, tocar, jogar, andar, falar, cantar, etc. O lúdico torna-se simbólico e amplia as possibilidades de assimilação do mundo (MACEDO, 2007).

Outro questionamento relevante durante a entrevista contou com a participação apenas de 08 entrevistadas. Dessa forma, indagou-se: Como os conceitos da área de Matemática estão sendo trabalhados no cotidiano das crianças pequenas? As entrevistadas responderam da seguinte maneira:





**Entrevistada 01:** Com objetos do seu dia-a-dia.

**Entrevistada 02:** Em vários momentos da rotina da criança, desde escovação de dental (quantidades de dentes) e partes do corpo, quantidade de alimentos ingeridos, de roupas, peso da mochila, etc.

**Entrevistada 03:** Idade, quantidade das coisas, tempo. Apresenta deficiência se for em escola da rede municipal, devido à falta de materiais e sempre utiliza atividades xerocadas para preencher essa lacuna.

**Entrevistada 04:** Com brincadeiras. Os números trabalham a idade, conhecimentos e reconhecimento dos números.

**Entrevistada 05:** Atualmente tem sido trabalhado de forma mais lúdica, mas não foi sempre assim e ainda precisa melhorar.

**Entrevistada 06:** Com utilização das músicas e brincadeiras. Com ênfase em trazer para os mesmos uma oportunidade de agregar diversas maneiras de se relacionar com os mesmos.

**Entrevistada 07:** Em muitos casos têm sido trabalhados de forma mecânica, por meio da repetição e da memorização, porém, é importante compreender que as crianças aprendem de forma lúdica, brincando, experimentando, participando ativamente. Com alguns estudos atualmente tem se desenvolvido novos métodos para o ensino da matemática para que ela venha ser mais prazerosa que tenha mais resultados quanto ao aprendizado de crianças, mas não muito distante vemos que aquele tradicional “decoreba” ainda e muito presentes nos sistemas de ensino.

**Entrevistada 08:** De forma fragmentada, mecânica, dissociada do contexto da criança e sua função social. (Informação verbal, grifo nosso).

A geração dos dados acima revela diferentes contextos com o trabalho docente da matemática na Educação Infantil. Observa-se nas falas das entrevistadas 07 e 08, uma prática docente mecânica, fragmentada, a repetição, “a decoreba”. Contudo, a presença da ludicidade apresentou a maioria das respostas. É sabido que o conhecimento matemático não se constitui num conjunto de fatos a serem memorizados, que aprender números é mais que contar, muito embora a contagem seja importante para a compreensão da ideia de número.

Cabe ressaltar que uma proposta de matemática para Educação Infantil deve encorajar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas, não apenas numéricas, mas também aquelas relativas à geometria, às medidas e às noções de estatística, de forma que as crianças desenvolvam e conservem com prazer a curiosidade acerca da matemática, adquirindo diferentes formas de perceber a realidade (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000).

Nesse sentido, na oficina didática, além da construção de recursos, os participantes foram orientados a realizar brincadeiras com regras, rodas, cordas, amarelinha, ou objetos como bolas e boliche, de forma a garantir o espaço das brincadeiras na sala de aula da Educação Infantil.

Isto posto, vale ressaltar que, como primeira etapa da Educação Básica, a Educação Infantil deve promover as interações e as brincadeiras, permitindo que as crianças observem, manipulem objetos, investiguem e explorem seu entorno, formulem hipóteses e consultem fontes de informação para respostas. Todas essas experiências consideradas até aqui são essenciais para que uma criança aprenda a qualquer momento.

#### **4 PARA ENCERRAR: Brincadeiras e matemática... riqueza e encantamento!**

No desenvolvimento desta investigação, foi possível reconhecer a importância da formação do educador infantil para a aprendizagem das crianças pequenas, como o conhecimento na área da Matemática.

Assim sendo, a oficina pedagógica é uma ferramenta que pode fomentar a inovação, a troca de experiências e a construção de conhecimento, aumentando a formação e a especialização dos educadores.

Nesse sentido, a partir da realização da oficina didática, foi possível também perseguir com a questão norteadora, investigando se há espaço para a Matemática na Educação Infantil e como os conceitos da área estão sendo trabalhados no cotidiano das crianças pequenas.

Isto posto, recomenda-se ao educador de crianças pequenas, que criem oportunidades para ampliar seus conhecimentos matemáticos no cotidiano da sala de aula, para que as crianças estejam em contato permanente com as ideias matemáticas de forma clara em suas interações com os seus pares.

Conclui-se que, há a necessidade de propor atividades lúdicas com jogos, brinquedos e brincadeiras para potencializar as habilidades de raciocínio lógico-matemático das crianças para que possam aprender dentro e fora da escola.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, DF: MEC, 2018 Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 17 out. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil**. Brasília, DF: MEC, SEB, 2010.

KAMII, C. 1987. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 2.3. ed. Campinas, SP: Papyrus, 1997.

MACEDO, L. **Brincar é mais que aprender**. (Ideias e opiniões de quem faz diferença). Disponível em: [http://revistaescola.abril.com.br/edicoes/pdf/Esp\\_015/3\\_artigo\\_pre.pdf](http://revistaescola.abril.com.br/edicoes/pdf/Esp_015/3_artigo_pre.pdf) . Acesso em: 17 out. 2022.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Brincadeiras matemáticas na educação infantil**. Porto Alegre: Artmed, 2000.



## GEOPIBID: USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA

### ANALÍTICA

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Valdiane Sales Araújo<sup>1</sup>  
Larissa Santos Chagas<sup>2</sup>

**Resumo:** O trabalho descreve as atividades realizadas por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Matemática - Licenciatura da UFMA - Campus de São Luís, durante a pandemia COVID-19. Além disso, detalha o subprojeto “GeoPIBID” desenvolvido pelas bolsistas Larissa Santos Chagas e Ana Karolinne Silva Costa na turma do 3º ano B do Colégio Universitário da UFMA – COLUN. Para o desenvolvimento do subprojeto supracitado, utilizou-se o software GeoGebra para abordar a Geometria Analítica em questões das edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Tal proposta visou apresentar aos alunos uma abordagem tecnológica e diferenciada daquele conteúdo.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica; ENEM; GeoPIBID.

**Abstract:** The work describes the activities carried out by scholarship holders of the Institutional Scholarship Program for Teaching Initiation (PIBID) of the Mathematics - Degree course at UFMA - Campus de São Luís, during the COVID-19 pandemic. In addition, it details the “GeoPIBID” subproject developed by scholarship holders Larissa Santos Chagas and Ana Karolinne Silva Costa in the 3rd year B class of the University College of UFMA – COLUN. For the development of the aforementioned subproject, the GeoGebra software was used to address Analytical Geometry in questions from previous editions of the National High School Examination (ENEM). This proposal aimed to present students with a technological and differentiated approach to that content.

**Keywords:** Analytical Geometry; ENEM; GeoPIBID.

## 1 INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica é o objeto de conhecimento do Ensino Médio que une a Álgebra e a Geometria, estando presente em várias áreas de conhecimento, tais como a Engenharia e Astronomia. Por meio de softwares de geometria dinâmica pode-se chamar a atenção do aluno para a beleza e aplicabilidade da Geometria Analítica. Além disso, esse conteúdo compõe a tabela de temáticas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

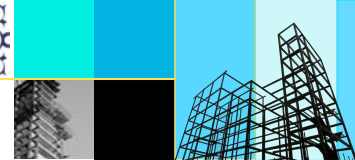
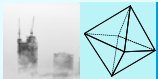
Nesse viés, as bolsistas Larissa Santos Chagas e Ana Karolinne Silva Costa desenvolveram o subprojeto denominado “GeoPIBID” com alunos da turma 3º ano B do Colégio Universitário da UFMA. O termo “Geo” faz referência ao estudo da Geometria Analítica utilizando o software GeoGebra para resolver questões apresentadas nas edições anteriores do ENEM.

As autoras utilizaram como referencial teórica a Base Nacional Comum Curricular (BNCC); a obra de Paulo Freire: “A Pedagogia da Autonomia”; o livro didático

---

<sup>1</sup> Professora Doutora (Universidade Federal do Maranhão). valdiane.sa@ufma.br

<sup>2</sup> Discente (Universidade Federal do Maranhão). chagas.larissa@discente.ufma.br



Matemática: ciência e aplicações, de Gelson Iezzi e outros autores, além de provas digitais das edições anteriores do ENEM.

Tal proposta teve por objetivo apresentar a Geometria Analítica por meio do GeoGebra em questões das edições anteriores do ENEM, de modo que os alunos fossem incentivados a usarem as ferramentas deste software para melhor compreensão do conteúdo. Segundo KENSKI uma abordagem tecnológica na sala de aula permite inúmeras possibilidades de interação e “formas diferenciadas de se alcançar a aprendizagem” (MOREIRA KENSKI,2003).

## 2 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O subprojeto vinculado ao PIBID na edição 2020, do curso de Matemática - Licenciatura da UFMA - Campus de São Luís, foi desenvolvido de forma remota em virtude da pandemia Covid-19, conseqüentemente, todas as atividades ocorreram via plataformas digitais.

Desde o início da realização do projeto PIBID, houve reuniões regulares com a coordenadora de área, os supervisores e professores da escola onde o projeto foi desenvolvido, e com os colegas pibidianos pelo Google Meet.

Nas primeiras reuniões foi definido que os subprojetos seriam desenvolvidos no Colégio Universitário da UFMA (COLUN) em duplas. Cada dupla escolheu um objeto de conhecimento da Matemática, para trabalhar com a turma que ficou responsável. As duplas foram divididas por turmas: 8ºB, 8ºC, 9ºA, 9ºB e 9ºC do Ensino Fundamental (EF) e 3ºA, 3ºB e 3ºC do Ensino Médio (EM). As autoras Larissa Santos e Ana Karolinne ficaram responsáveis por elaborar e desenvolver o subprojeto “GeoPIBID” na turma 3º B do Ensino Médio.

No mês de abril de 2021 as duplas passaram a acompanhar as aulas regularmente, via Google Meet, nas turmas selecionadas.

Em paralelo, foram criadas contas nas redes sociais:

Instagram

(<https://instagram.com/pibidmatematicaufma?igshid=13dv8xlm1qvg1>),

Facebook

(<https://m.facebook.com/PIBID-Matemática-UFMA-104822795027985/?ref=bookmarks>)

YouTube

(<https://youtube.com/channel/UCnXNVlzXFhXzvHMI3w6WKcg>)

para divulgar o projeto. A cada período, estipulado pela coordenadora, foram desenvolvidos, pelos bolsistas do PIBID-Matemática, vídeos e postagens para divulgar conteúdos de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Além disso, fomos orientados à leitura de textos, tais como: A Pedagogia da Autonomia de Paulo Freire e a BNCC.

Além da elaboração dos materiais para publicação, cada dupla formulou sua atuação em sala de aula, a melhor maneira de abordar o conteúdo escolhido e as metodologias adequadas, sob a supervisão do professor responsável e da coordenadora de área.

Entre os meses de abril e setembro, cada dupla apresentou seu progresso na elaboração dos subprojetos a serem aplicados nas reuniões. Durante esse período, algumas duplas já aplicavam nas turmas, enquanto outras ainda iriam executar os subprojetos em sala de aula.

Nesse período, as autoras pesquisaram e estudaram o GeoGebra, suas ferramentas e a gama de conteúdos que se pode ensinar por meio deste software. Em seguida, as mesmas restringiram-se ao aprimoramento do uso do GeoGebra para revisar e explicitar a Geometria Analítica no 3º ano B. Destaca-se que, os alunos da turma já tinham visto tal conteúdo com o professor da disciplina, mas, em virtude da proximidade do ENEM, foi decidido, em acordo com o professor, trazer a Geometria Analítica novamente para a sala virtual em uma nova perspectiva.

### 3 APLICAÇÃO DO PROJETO NA SALA DE AULA VIRTUAL

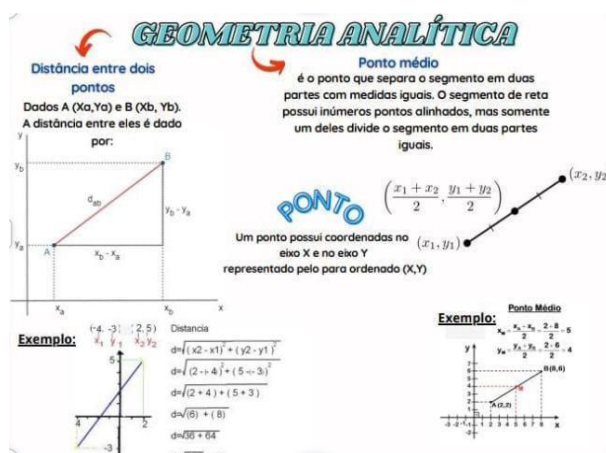
Atuação na turma 3º ano B ocorreu em quatro aulas nos dias 5, 8, 19 e 22 do mês de outubro de 2021.

É importante destacar que antes, durante e depois da execução do subprojeto GeoPIBID, foi aplicado questionários, elaborados no Google Forms, na turma para conhecer os alunos e avaliar o desempenhos das autoras em sala de aula.

#### 1ª AULA – 05/10/2021

Na primeira aula, a autora Ana Karolinne revisou o conteúdo Geometria Analítica com os alunos destacando os tópicos mais importantes que foram abordados nas questões das edições anteriores do ENEM. A bolsista também formulou um mapa conceitual (Figura 1) para ser utilizado nessa aula.

Figura 1 – Primeira página do mapa conceitual

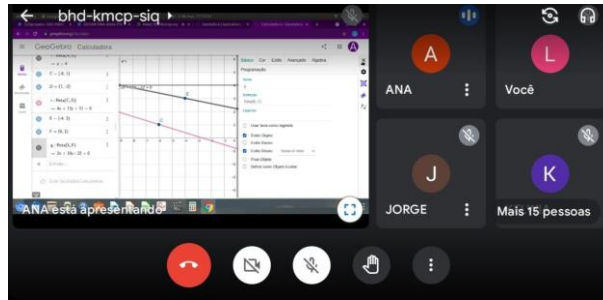


Fonte: Elaborado por Ana Karolinne

Além disso, foi apresentado o software, suas principais ferramentas (Figura 2) e o “passo a passo” de como criar uma conta no site do GeoGebra para acessar materiais exclusivos e construções de problemas que auxiliam na aprendizagem de conteúdos da Matemática.



Figura 2 – “print” da 1ª aula



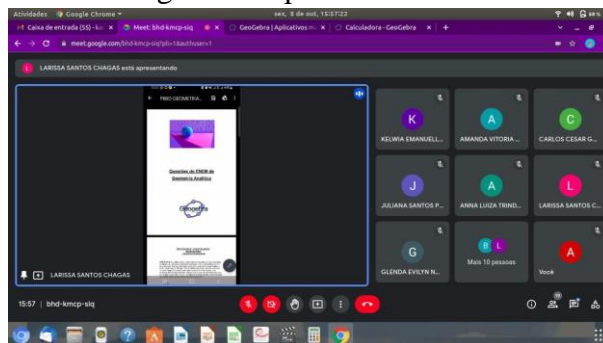
Fonte: Google Meet

**2ª AULA – 08/10/2021**

Dando continuidade, Ana Karolinne, junto aos alunos da turma, elaborou construções de problemas da Geometria Analítica no GeoGebra utilizando ferramentas que foram apresentadas aos alunos na aula anterior.

Ainda na segunda aula, a autora Larissa Santos, resolveu questões de edições anteriores do ENEM, de Geometria Analítica, por meio do GeoGebra (Figura 3). Durante a aula, foram apresentadas as possíveis resoluções das questões resolvidas e dicas úteis para a realização de uma boa prova de matemática no ENEM.

Figura 3 – “print” da 2ª aula



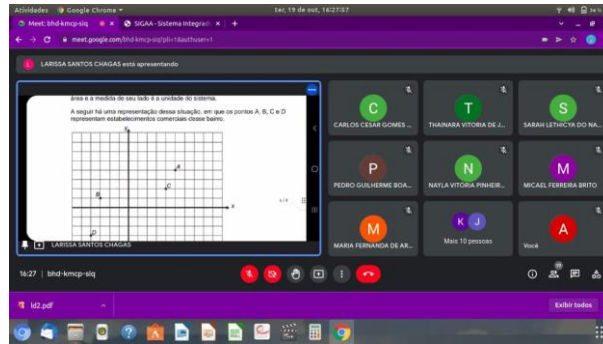
Fonte: Google Meet

**3ª AULA – 19/10/2021**

Nessa aula, foi dado continuidade à resolução das questões do ENEM (Figura 4). Além disso, as autoras elaboraram uma atividade com questões a serem resolvidas pelos alunos utilizando o GeoGebra.

Figura 4 – “print” da 3ª aula



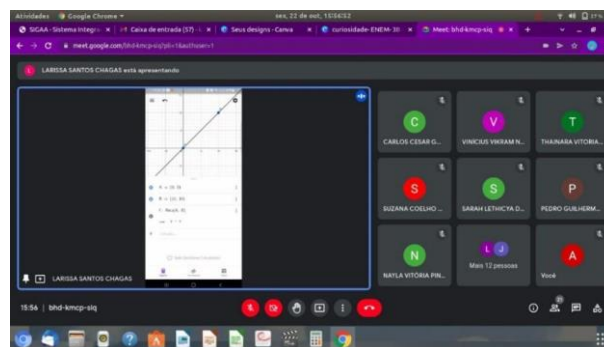


Fonte: Google Meet

#### 4ª AULA – 22/10/2021

A quarta aula foi dividida em dois momentos: no primeiro momento, Larissa Santos, com a participação ativa dos alunos, resolveu as questões do ENEM (Figura 5) que haviam sido passado na aula anterior, a fim de que os estudantes praticassem a construção e resoluções de problemas no GeoGebra; no segundo momento, as duas autoras fizeram a apresentação de um slide sobre curiosidades do Exame Nacional do Ensino Médio. Esse momento foi, para as mesmas, o mais divertido, uma vez que houve muita interação por parte dos alunos e, ao final, eles parabenizaram as autoras pelo desempenho em sala.

Figura 5 – “print” da 4ª aula (primeiro momento)



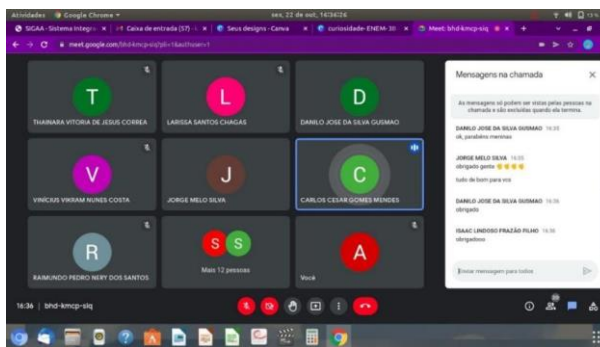
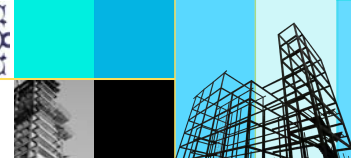
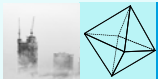
Fonte: Google Meet

### 4 RESULTADOS ALCANÇADOS

Com base na experiência na turma do 3º ano B durante a execução do subprojeto “GeoPIBID” e nos resultados dos questionários respondidos pelos alunos da turma descrita acima, as autoras concluíram que o objetivo proposto foi alcançado.

A (Figura 6) referente a última aula mostra, por meio do “chat” da sala virtual Google Meet, como os alunos receberam bem a proposta das autoras, eles parabenizam e agradecem as mesmas pelo desenvolvimento do projeto.

Figura 6 – “print” da última aula de aplicação do subprojeto



Fonte: Google Meet

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência como bolsista do PIBID foi enriquecedora uma vez que as autoras desenvolveram e aplicaram em sala de aula o subprojeto intitulado “GeoPIBID”. Esta experiência possibilitou o trabalho em equipe, o conhecimento do dia a dia numa sala de aula e a observação da vivência de professores e alunos num momento dramático na educação, visto que, as aulas ocorreram de forma remota em virtude da pandemia. Foi necessário muita criatividade para planejar e desenvolver as atividades do projeto. O subprojeto foi aplicado em uma turma do Ensino Médio e os resultados obtidos foram muito positivos.

Percebeu-se a versatilidade e utilidade do GeoGebra no aprendizado da Geometria Analítica e como esse software pode ser importante para o aprendizado de diversos conteúdos de Matemática.

Tal experiência foi necessária e relevante para a formação docente das bolsistas, de modo que, será levado para a prática profissional futura das autoras muito do que foi aprendido e desenvolvido por meio do PIBID.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2004

<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, NILZE. **Matemática: ciência e aplicações**, 3ª série: ensino 0 série: ensino médio. São Paulo: Atual, 2004.

MOREIRA KENSKI, Vani. **APRENDIZAGEM MEDIADA PELA TECNOLOGIA**. Revista Diálogo Educacional, v. 4. 2003. p. 1-10.



## SALA INVERTIDA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS USANDO VÍDEOS E CAMADA DE COMPUTAÇÃO DO DESMOS

José Valério Moreira Cândido<sup>1</sup>

Valdelírio da Silva e Silva<sup>2</sup>

**Resumo:** Este documento apresenta um roteiro didático para o ensino de funções trigonométricas com Sala de Aula Invertida usando material teórico disponível em vídeos e material online no Desmos, na forma de atividades de conteúdo e de exercícios; além também de exercícios contextualizados de acordo com as competências e habilidades exigidas para o ENEM. O Desmos entrou não só como uma ferramenta para o ensino não presencial disponibilizando elementos de interatividade, como também uma plataforma que armazena as respostas dos discentes nas atividades criadas com a *Computation Layer* e sua *classroom*. O aplicativo auxilia o aprendizado dos alunos tanto nas aulas virtuais como nas aulas presenciais, sendo hora utilizado pelo professor, hora pelos educandos; ajudando-os a entender as aplicações no dia-a-dia das funções seno e cosseno.

**Palavras-chave:** Funções Trigonométricas; Sala de Aula Invertida; Tecnologias Educacionais; Camada de Computação do Desmos.

**Abstract:** The following assignment presents a didactic script for teaching trigonometric functions with Flipped Classroom utilising theoretical material available in videos and online material on Desmos, in the form of activities and exercises related to the content; in addition to contextualized exercises according to the skills and abilities required for ENEM. Desmos entered not only as a tool for non-face-to-face teaching, providing elements of interactivity, but also a platform that stores students' responses to activities created with Computation Layer and classroom. The application helps students learn both in virtual classes and in face-to-face classes, sometimes used by the teacher, sometimes by the students; helping them understand the day-to-day applications of the sine and cosine functions.

**Keywords:** Trigonometrics functions; flipped classroom; Desmos' Computation Layer.

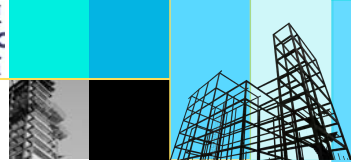
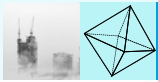
### 1 INTRODUÇÃO

O novo ensino médio traz uma mudança de mentalidade e de postura, tanto do educador como do aluno. Tirar a centralidade do conhecimento do professor é a meta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL. Ministério da Educação, 2018), buscando autonomia e responsabilidade para o alunado, fazendo este buscar o conhecimento através de novos métodos dos quais o professor deverá conhecer e saber aplicar para melhores resultados na aprendizagem.

Sob esse pensamento, “As metodologias ativas podem ser compreendidas como alternativas metodológicas com uma abordagem contrária ao ensino tradicional focado nos

<sup>1</sup> profvalerio43@gmail.com

<sup>2</sup> UFPA, valdel@ufpa.br



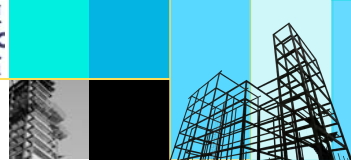
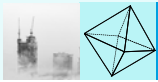
componentes curriculares, de modo que proporcionem o desenvolvimento do olhar crítico e reflexivo do educando em relação ao que está fazendo” (GENEROSO, 2019).

A sala invertida, é uma das metodologias ativas de conhecimento, que de acordo com seus criadores Bergmann e Sams (2018), é a inversão simples de elementos da sala de aula convencional, fazendo com que objetos do conhecimento que normalmente são abordados pelo professor de forma expositiva, sejam agora abordados usando tecnologia, em forma de materiais apostilados, vídeos, sites, pesquisa e exercícios. Esse conteúdo deve ser disponibilizado para que o aluno estude em casa antes do encontro presencial na escola com o professor. Tal momento em sala de aula deve ser usado para uma interação entre alunos, para realização de atividades e resolução de problemas com base no conteúdo previamente estudado pelo aluno.

O papel do professor nesse contexto é conseguir, primeiramente, um engajamento do aluno no método de ensino, fazendo com que ele tenha responsabilidade de seu papel na parte não presencial, que é feita em casa, no horário escolhido por ele próprio; e em seguida, uma participação ativa em sala presencial, trazendo um protagonismo para o estudante, buscando autonomia e responsabilidade para ele. Para que isso aconteça é necessário um planejamento do professor em cada passo das etapas que compreendem o ensino de um determinado conteúdo. Na sala invertida o professor, de certo modo, deve ter bem mais trabalho já que parte do sucesso na empreitada é de uma cuidadosa programação, criteriosa confecção ou seleção dos materiais, junto um acompanhamento dos discentes na etapa síncrona e curadoria nas assíncronas.

A trigonometria sempre foi um conteúdo que gerou desconforto na aprendizagem a muitos alunos no ensino médio. Por essa razão, um dos questionamentos mais frequentes dos alunos no ensino da matemática é: “onde uso isso na minha vida?”. As funções trigonométricas, seno e cosseno, são aplicadas em diversas situações do cotidiano, além de terem uma frequência em provas de ingresso nas universidades. Na maioria das vezes, com questões que lêem matematicamente situações cotidianas. Com isso o ensino e a aprendizagem desse conteúdo sempre foi um desafio complexo para alunos e professores e apostar em novas formas de ensinar, usando metodologias novas que venham trazer uma linguagem mais moderna para a educação, poderá ser o caminho. Dessa forma, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) através do novo Ensino Médio vem com uma proposta de mudança no ensino-aprendizado, fazendo com que as aulas de trigonometria sejam repensadas e planejadas em novos formatos, tornando-se mais atrativas aos olhos dos educandos.

O Desmos é um aplicativo que pode auxiliar no aprendizado das funções trigonométricas, mostrando parâmetros bem definidos das funções e buscando um maior entendimento entre a relação matemática e seu gráfico. Serve também como comprovação de resoluções através de seus gráficos e a importância dos pares ordenados na função. Além



de ser um instrumento em que o aluno pode ter acesso no computador ou no *smatphone* e *tablet*, sendo facilmente utilizado em sala de aula. Trazer aplicativos para a sala de aula que facilitem o aprendizado do aluno, fazendo da tecnologia uma aliada da educação deve ser uma realidade da educação brasileira, fazendo do celular e do computador um auxiliar no ensino-aprendizagem.

A combinação desses três elementos (Sala Invertida, Funções Trigonométricas e Desmos) traz uma aula moderna e instigante, fazendo com que ela esteja inserida no mundo atual dos jovens, em consonância com que o novo ensino médio propõe para educação: autonomia e protagonismo nos alunos. A BNCC pede que o professor saia da inércia do ensino tradicional, tendo como finalidade a busca de metodologias que tornem o ensino-aprendizado mais dinâmico e atrativo para o aluno. Nesse contexto que se buscou uma aplicação para sala invertida com vídeos e o ambiente *classroom* do *Desmos* para servir de apoio aos conteúdos, e uso da interatividade que esse ambiente possibilita com atividades confeccionadas na sua camada de computação.

## 2 O DESMOS

O Desmos (<https://teacher.desmos.com>) é aplicativo online de matemática, disponível também para *smartphones*, que tem como ferramentas básicas: (a) calculadora gráfica; (b) calculadora científica; (c) calculadora só com raiz quadrada e as quatro operações fundamentais; (d) calculadora matricial; (e) ambiente de construções geométricas. Assim como o *Geogebra*, a calculadora gráfica do Desmos permite: plotar funções e tabela de dados; resolver equações e inequações, apresentando graficamente a resposta; explorar transformações matemáticas; fazer regressões e medidas estatísticas. Mas além disso, o Desmos também tem outros dois recursos muito úteis para o ensino. Um é o ambiente *Atividades de Sala de Aula* (Desmos *classroom*), em que é possível criar turmas e para elas endereçar atividades já disponíveis dentro do Desmos; ou criar suas próprias atividades. Nas atividades autorais pode-se inserir tanto material teórico quanto questões e problemas. As questões podem apresentar não só texto como também figuras estáticas ou animações, com possibilidades das respostas serem apenas de múltiplas escolhas, ou inseridas dentro de um espaço para texto e desenho à mão-livre, ou mesmo fazendo-se uso das ferramentas básicas de (a) a (e)

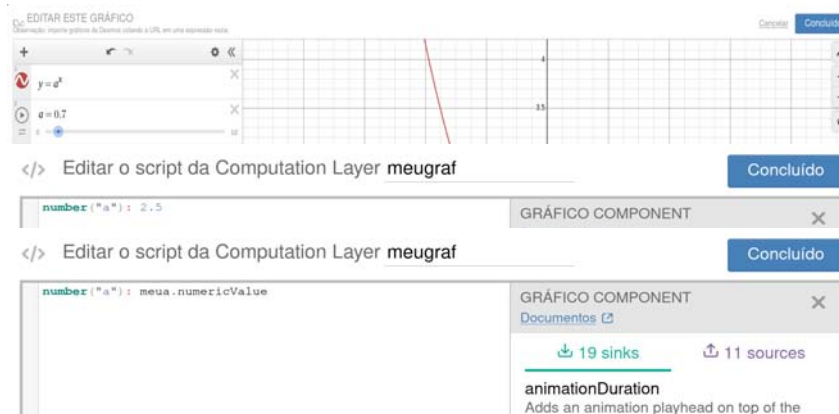
Para customizar atividades, o Desmos disponibiliza fazê-las também com um nível superior a de somente editar as existentes. Isso é feito por sua Camada de Computação (*Computation layer* – CL), que tem um conjunto de comandos que ligam blocos funcionais. Ela tem caráter de ser subprogramas com ações específicas nas construções das páginas de atividades, servindo de ligação para a linguagem de programação na qual o Desmos é construído. Em cada bloco pode-se criar variáveis, as quais são “enxergadas” por qualquer



um outro bloco. Isso permite automatizar ações, como por exemplo o aparecimento de um gráfico após submissão de fórmula inserida pelo usuário, seleções de alternativas num bloco de múltipla escolha, caixa de seleção, tabela ou botão de ação. Decorrente dessa propriedade dos blocos poderem ser interrelacionados, a CL é mais próxima de planilhas eletrônicas que de uma linguagem de programação (como é afirmado na documentação da CL!, já que ao se alterar um variável num componente, um outro que a usa também é alterado).

A interconexão entre os blocos funcionais é permitida por conta de duas classes de comandos que a CL usa, os *sinks* e os *sources*. Comandos *sinks* servem para coletar valores para, por exemplo, parâmetros ou controles deslizantes que estão dentro de uma expressão matemática inserida na calculadora gráfica, a partir do valor informado dentro do próprio bloco funcional (**Gráfico** neste caso). Já os comandos *sources* servem para extrair um valor tomado em um componente, para usar, nele mesmo ou em outro. Usando a mesma exemplificação de **Gráfico**, digamos que ele tem nome `meugraf`, e nele se tem a função  $y = a^x$ , sendo  $a$  um controle deslizante (figura 1)<sup>3</sup>. Então o comando `number("a") : 2.5` é um comando *sink* que coleta o valor 2.5 para ser usado no gráfico de  $y = a^x$ . Se no entanto existir o bloco **Equação** chamado `meua` que disponibiliza o usuário entrar com o valor numérico de  $a$ , o bloco `meugraf` vai adotar tal valor quando nele for usando o comando `number("a") : meua.numericValue`. Ou seja, o comando `.numericValue` é do tipo *source* que habilita o valor de  $a$  inserido em `meua` para a função  $y = a^x$  de `meugraf`.

Figura 1 – Bloco funcional **Gráfico** com controle deslizante, que é assumido com comando *sink* ou comando *source*.



FONTE: criada na CL e capturada pelo autor

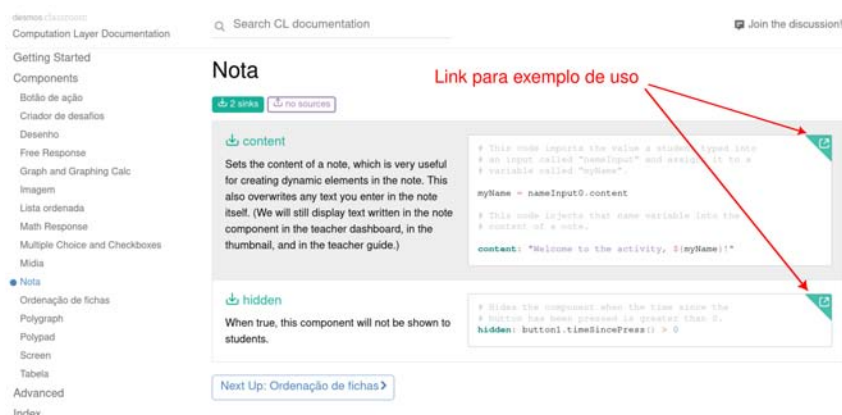
A figura 1 ilustra que a área de edição de blocos funcionais também apresenta todos os comandos *sinks* e *source* que cada bloco funcional possui (nem todos comandos

<sup>3</sup> Tal figura apresenta um arranjo em que a calculadora gráfica é sobreposta com a edição de uso de comando *sink*, e este sobreposto com edição de comando *source*. Essa configuração foi posta assim a fim de usar economia de espaço.



são comuns a todos blocos!). Além disso, vê-se que logo abaixo da especificação do bloco funcional se tem Documentos. Ele é um link para a documentação da CL especificamente para o referido bloco (figura 2), listando os comandos possíveis nele, assim como também habilitando um link com exemplo de uso de cada comando disponível. Do ponto de vista de um professor iniciante, os exemplos apresentados aí são ótimos para entendimento e ricos em aplicação; configurando-se facilmente como fonte de criatividade para confecção de suas próprias atividades!

Figura 2 – Exemplo da apresentação de comandos *sinks* e *sources* de um bloco funcional na documentação da CL, que também permite, por link, acesso a exemplos de uso.



FONTE: adaptada pelo autor a partir da documentação da CL

Arelado às atividades, outro recurso do Desmos é o ambiente *Painel de Controle do Professor*. Nele, além do professor poder criar gabarito para correção automática nas questões de múltiplas escolhas; o professor pode fazer curadoria das atividades endereçadas aos discentes. Pode-se controlar a permissão dos alunos em verem ou não as respostas dos colegas; e pausar atividades para intervir ou incentivar discussões entre os alunos. Tudo isso de forma síncrona ou assíncrona (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020)!

### 3 A SALA INVERTIDA DE FUNÇÕES SENO E COSSENO

Como recomendação de Bergmann e Sams (2018), é preferível que conteúdos matemáticos escolhidos para serem anteriores aos encontros presenciais com o professor sejam dados por vídeos, ou material didático de fácil manipulação do aluno, que o possibilite voltar quando desejar e usá-lo quando quiser. Com isso em mente foram confeccionados e hospedados vídeos em um canal do *youtube*; e atividade customizadas com a CL do Desmos não só com exercícios, como também parte da teoria de funções seno e cosseno.

Para que as aulas presenciais atinjam seus propósitos, os alunos obrigatoriamente terão que visualizar os vídeos, acessar e responder às questões das atividades do Desmos; mas cabe ao professor tornar tais requisitos como avaliativos ou não. Também é comum nas

várias etapas da sala invertida agrupar os alunos para discussões e resoluções dos trabalhos elencados pelo professor, que na proposta aqui também se pensou no envolvimento da calculadora gráfica do Desmos como uso auxiliar.

Abaixo é colocado uma sequência na qual se imaginou compreender um bom roteiro de ensino de funções seno e cosseno com o material confeccionado. Todos os endereços eletrônicos desse material estão “linkados” em seus próprios nomes, sendo de vídeos em azul e sublinhados; enquanto que as atividades criadas com a CL encontram-se em azul e em caixa. O professor interessado em visualizar a construção de qualquer página das atividades só poderá fazê-la caso já possua uma conta no Desmos, caso contrário, verá as atividades como aluno. Alguns exercícios dedicados somente ao encontro presencial também são apresentados aqui; mas os que finalizam o conteúdo com proposta de questões do ENEM, abrangendo habilidades e competências solicitadas pela BNCC são somente referenciadas a esse exame.

### 3.1 ROTEIRO DIDÁTICO

#### 3.1.1 1º passo (duas aulas presenciais de 45 min):

Apresentação do funcionamento da Sala Invertida, definindo obrigações e deveres; as atividades criadas na *classroom* do Desmos, e o ensino de sua calculadora gráfica para construções de gráficos de funções. Além disso, é feita a explanação de como serão feitas as avaliações, os sorteios das atividades presenciais e o encaminhamento para o material de nivelamento que compreende aos conteúdos anteriores ao ensino de funções seno e cosseno.

#### 3.1.2 2º passo (atividade *online*):

Nesse momento são disponibilizados a teoria de “revisão”. Esses assuntos não são de obrigatoriedade de serem estudados pelo aluno, mas pequenos exercícios que vem depois ao material são obrigatórios, pois servem de checagem para o próprio aluno. Esses conteúdos referem-se a arcos, definições de seno e cosseno na circunferência trigonométrica, arcos notáveis e reduções ao I quadrante; sendo tratados em:

Preparação para funções trigonométricas (páginas da teoria e exercícios).

Para as funções seno e cosseno foram criados os seguintes vídeos:

**Vídeo VII:** [Funções seno e cosseno I](#)

**Vídeo VIII:** [Funções seno e cosseno II](#)

**Vídeo XIX:** [Funções seno e cosseno III](#)



Além dos links desses vídeos, a seguinte atividade do Desmos contém alguns elementos de estudo das funções seno e cosseno, assim como alguns exercícios de compreensão desses conteúdos: [Funções trigonométricas \(Vídeos e Exercícios\)](#).

### 3.1.3 3º passo (duas aulas presenciais de 45 min):

Nestas aulas os objetivos são de cobrar o conhecimento compartilhado na plataforma, descobrir e interceder nas dúvidas dos alunos, fazer com que o aluno crie habilidades de relacionar o conteúdo com aplicações no seu cotidiano, além de interpretação, comparações e análise de resultados, resolvendo problemas em grupo. As questões serão apresentadas na aula, mas em vez de apresentá-las neste texto foram colocadas em [Teste avaliativo do 3º passo](#) a fim de não abranger muito espaço. Em seguida às questões, convém o momento de mediação do professor para tirar dúvidas com relação ao assunto ministrado nos vídeos.

### 3.1.4 4º passo (duas aulas presenciais de 45 min):

Aqui o objetivo é de avaliação do aprendizado da turma sobre o conteúdo. Sugere-se realizar três sorteios para apresentação das resoluções dos problemas que foram entregues no final das aulas do 3º passo. Dois sorteios são sobre a escolha dos grupos e às questões. Primeiro é sorteado um grupo e em seguida uma questão. Cabe ao grupo resolver a questão e caso seja pertinente, apresentar no Desmos o gabarito desta; podendo ser também questionado pelos colegas dos outros grupos. Os sorteios continuarão até que todos os grupos participem. É de responsabilidade do professor interceder quando achar necessário. No caso da apresentação do grupo que terá de 4 a 6 alunos, deve-se fazer o terceiro sorteio, que serve para escolher ao acaso 2 deles; um para resolver a questão no quadro e outro para aplicar o Desmos. Nesse momento, a solução pode ser feita no próprio ambiente da calculadora gráfica, ou pode ser dentro da atividade na página criada pelo professor. Os colegas do grupo poderão interceder, porém nessa situação o grupo perde ponto. Dessa forma teremos a avaliação do aprendizado da turma.

## 3.2 QUESTÕES DA AULA PRESENCIAL:

Aqui são apresentadas algumas questões para uso na segunda aula do passo 3º, e todo o 4º passo. São enunciadas na Matriz de Referência do INEP duas competências relacionadas ao eixo da matemática e suas tecnologias: *Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socio-econômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas*; e *Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação*. Essas competências trazem as habilidades **H19** até a **H26** na mesma matriz.

Baseadas nessas competências e habilidades é que se fez a escolha das questões, que contemplam bem as exigências da nova BNCC, e que comumente são cobradas no ENEM, de onde se retirou as questões. Pela mesma razão dado no 3º passo, tais questões foram colocadas como atividade Questões do ENEM do Desmos.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscar um novo caminho para o ensino brasileiro, e claro, para o ensino da matemática é uma necessidade para a nossa educação. Com a finalidade de exemplificar uma sequência didática que esteja inserida no mundo tecnológico e que lance mão de aplicativos que se aproximem da linguagem dos jovens, como vídeos e a plataforma DESMOS, acredita-se que este trabalho seja mais uma semente para o desafio da mudança necessária no professor.

A sala invertida é aplicada em vários países com sucesso, trazendo uma opção que pode se tornar viável para mexer com a responsabilidade, a autonomia e o incentivo para os estudantes pós pandemia. Para que isso aconteça é importante programar aulas em que o estudante seja o centro do conhecimento e o professor seja um instrumento de organização e ajuste desse aprendizado. A tecnologia deve ser uma aliada da educação, e não usar esse poderoso instrumento é se afastar do jovem estudante, que convive muito bem com ambiente virtual. Por isso buscou-se uma sequência moderna com uma metodologia ativa do conhecimento famosa que é a sala invertida. Em sua composição foram confeccionados vídeos de curta duração, e alternativamente, a teoria tratada neles junto com exercícios, disponibilizados também no Desmos mediante criação de atividades com sua Camada de Computação, a qual disponibiliza interatividade com o usuário e armazenamento de suas respostas. Esta funcionalidade permite ao professor acompanhar o desempenho de turmas criadas na plataforma de forma assíncrona, e assim tomar atitudes de gerenciamento e encaminhamentos a fim de melhor aprendizado do assunto.

As aulas presenciais não são menos importantes no processo da sala invertida. Em seguida à aula não presencial, o professor pode avaliar mais fielmente os conhecimentos adquiridos pela turma; identificando alunos que não dedicaram tempo para estudo, ou que eventualmente não compreenderam os conteúdos repassados na primeira fase. Esse momento serve então para avaliar se tais conteúdos foram adequadamente colocados, em sua ordem, abrangência, profundidade e incentivo à autonomia do aluno. São nas aulas presenciais que se tem também oportunidades em tirar dúvidas, repassar novos conteúdos, criar atividades contemplando competências e habilidades desejadas, sejam em forma de material online ou não.

O assunto das funções abordado aqui levou em conta as competências e habilidades exigidas pelo ENEM; e por isso tiveram selecionadas questões desse exame; mas

uma abrangência maior de conteúdo (como das demais funções, equações e inequações trigonométricas), aplicações e nível podem ser confeccionadas no Desmos, fazendo-se uso das estruturas que foram criadas e disponibilizadas por este trabalho, e com o enorme repositório que o próprio Desmos tem em seu site e na sua comunidade de discussões.

As atividades confeccionadas no Desmos ao final parecem ser de plataformas profissionais de grandes sistemas de ensino, comumente utilizadas em escolas particulares; mas no Desmos (assim como do *Google*), suas *classrooms* são flexíveis em criação e aplicáveis à qualquer clientela (com disponibilidade de acesso à internet). Muitas interatividades podem ser simplesmente copiadas de outras e editadas conforme adequação de conteúdo; entretanto, para um elevado grau de customização de interatividade e animações, são necessários conhecimentos da *Computation Layer*, o que pode requerer um certo tempo de aprendizado. No entanto, justamente por levar em conta elementos de lógica nos comandos, tem-se na camada de computação do Desmos uma ferramenta a mais para formação de professores de matemática, compondo certamente ementa de Tecnologias de Informação e Comunicação; isso eleva o grau de importância do Desmos, porque não só possui *calculadora gráfica* e *ferramenta de geometria*, mas também a de criação customizadas de atividades matemáticas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. Ensino remoto de Matemática: possibilidades com a plataforma Desmos. **Professor de Matemática Online**, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, v. 08, n. 04, 2020. ISSN 2319-023X. Disponível em: <[https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/10/art37\\_vol8\\_PMO\\_SBM\\_\\_2020.pdf](https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/10/art37_vol8_PMO_SBM__2020.pdf)>.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. Rio de Janeiro: LTC, 2018. ISBN 9781564843159,9788521630869. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=3B30A8A75E447897D43B14455A00FF30>>.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 22 jun. 2022.

GENEROSO, L. H. C. **Modelagem Matemática e Metodologia Ativa: práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional**. 55 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, 2019.





## UMA PROPOSTA DE ENSINO DAS EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS ATRAVÉS DO TIRO COM ARCO

Sandra Imaculada Moreira Neto<sup>1</sup>

Alberto Leandro Correia Costa<sup>2</sup>

Erivelton Mendes Corrêa<sup>3</sup>

**Resumo:** Neste trabalho relatamos e discutimos uma proposta de ensino das equações e funções quadráticas através do esporte olímpico do tiro com arco por meio da experiência obtida em uma turma do Ensino Fundamental de uma escola pública na cidade de São José de Ribamar no Maranhão. Apresentamos a metodologia utilizada e consideramos os impactos observados na aceitação e motivação dos alunos.

**Palavras-chave:** Proposta de ensino; Equações quadráticas; Funções quadráticas; Tiro com arco.

**Abstract:** In this work we report and discuss a proposal for teaching quadratic equations and functions through the Olympic sport of archery through the experience obtained in an Elementary School class of a public school in the city of São José de Ribamar in Maranhão. We present the methodology used and consider the impacts observed on students' acceptance and motivation.

**Keywords:** Teaching proposal; Quadratic equations; Quadratic functions; archery.

### 1 INTRODUÇÃO

Infelizmente, muitos alunos ainda vêem a matemática como sendo um bicho papão, algo distante, chato, maçante, e possuem muitas dificuldades em compreender teoremas, fórmulas e aplicar o que é ensinado em sala de aula no seu cotidiano. Por muitas vezes, o tipo de abordagem inicial descontextualizada e desconectada da realidade material do aluno, pode gerar a visão errônea de que matemática é algo para poucos ou apenas aqueles que possuem uma certa afinidade, gerando temor e desinteresse por parte dos estudantes frente à disciplina. Sabendo disso, este trabalho pretende apresentar uma maneira diferente de introduzir o estudo das equações e funções quadráticas, utilizando o esporte de tiro com arco como forma de abordagem auxiliar para este estudo, agregando assim, um componente concreto, material e prático à abordagem teórica da sala de aula.

### 2 DESENVOLVIMENTO

Justifica-se esse trabalho devido à necessidade hoje existente, para nós professores, de mostrar aos alunos o quanto a matemática é algo simples e importante na vida, seja

<sup>1</sup> UEMA, sandraneto@professor.uema.br

<sup>2</sup> UEMA, leandrocorreiacosta@hotmail.com

<sup>3</sup> SEMED - São José de Ribamar, eriveltonbleach@yahoo.com.br



estudantil ou não, levando-os assim, a compreender que o estudo da matemática não pode e nem deve ser feito apenas decorando-se fórmulas, e que estudar matemática pode e deve ser divertido. Sendo assim, uma abordagem diferenciada sobre os estudos das equações e funções quadráticas usando um esporte olímpico como o tiro com arco, poderia ajudar muito a compreensão e o interesse do aluno para tal assunto, incentivá-lo a explorar a história do instrumento e da modalidade esportiva, além de impulsionar e estimular o crescimento das atividades esportivas dentro da escola. Uma abordagem essencial hoje no ensino é a questão da interdisciplinaridade, pois permite a parceria entre disciplinas que aparentemente não teriam tanto em comum, como no caso da matemática, história, física e educação física.

Além disso, hoje é essencial termos novas formas de ensino para o aluno, de modo que, ele possa inserir o aprendido em sala no seu cotidiano, tornando assim ainda mais significativo e real o aprendizado. .

No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998)

Às vezes, a matemática é vista apenas como mais uma matéria a se decorar fórmulas, com o único objetivo da aprovação ao final do ano, o que a torna assim, distante e desanimadora. A prática do tiro com arco pode ajudar ainda mais a aproximar o aluno do universo da beleza da matemática.

Pode parecer, a princípio, que alguns temas da matemática não têm aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode gerar certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. (GIOVANNI J.R., 1998)

A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural (BRASIL, 1998).

Neste sentido, este trabalho pretende apresentar um proposta de ensino e aplicá-la em uma turma de ensino fundamental a fim de discutir a experiência obtida.

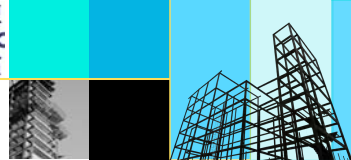
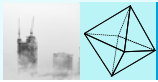
## 2.1 MATERIAIS

O material utilizado nas aulas dentro de sala de aula foram os convencionais

- Quadro branco, pinceis, data show.

Já para a aula de campo, utilizou-se

- Arco artesanal construído com cano PVC 3/4.



- 01 flecha (a flecha usada foi uma Easton Inspire, e pode ser comprada na internet, mas recomenda – se que neste caso o docente faça a opção por uma flecha mais barata, feita de alumínio).
- Trena de 50 metros para medição das distâncias alcançadas em cada disparo.

## 2.2 METODOLOGIA

A metodologia utilizada é descrita da seguinte forma: as aulas teóricas em sala transcorreram como o usual, onde o professor aborda o tema através de aulas expositivas usando-se quadro, pinceis e demais recursos didáticos. Sempre contextualizando com problemas práticos da vida concreta. Sobre sessão de disparo com Arco e flecha, vale ressaltar que para esta aula, os alunos levaram antes para casa um pedido de autorização para os pais ou responsáveis pedindo a liberação ou não da participação desta atividade extra. Para a sessão de disparo com os alunos, o docente atentou inicialmente para algumas regras de segurança indispensáveis a esta prática:

1. - Fazer uma linha de tiro no chão, onde os alunos devem ficar atrás dela, conforme a imagem abaixo.
2. Olhar antes de disparar para ver se não tem ninguém próximo ao alvo. (Nesta aula não haverá um alvo, apenas a medição da distância alcançada em cada disparo)
3. Nunca atirar flechas para cima.
4. Atirar somente na linha de tiro.
5. Só buscar flechas quando todas tiverem sido atiradas.
6. Nunca apontar flechas para pessoas ou animais.
7. Se puder, fazer esta atividade ao lado de um instrutor de tiro com arco ou o professor de educação física.

Seguindo estas regras, o professor iniciou os disparos com os alunos, e eles foram feitos da seguinte maneira:

1. A trena foi disposta em linha reta a partir da linha tiro.
2. Os disparos foram feitos em um terreno plano com distância mínima de 70 metros de comprimento por 30 metros de largura.

3. Chamou-se aluno por aluno para fazer um disparo, após cada acompanhou-se o aluno para verificar a distância alcançada pela flecha. Em cada disparo o professor, ou outro aluno, cronometrou o tempo de trajetória da flecha, desde sua saída do arco até o chão. Após todos os disparos, o professor retornou com os alunos à sala de aula e lá solicitou aos discentes para a próxima aula os seguintes materiais: 01 folha de papel A4 ou almanaque, régua, lápis, borracha e caneta, para a construção do gráfico da função descrita pela trajetória de cada disparo pessoal. Por fim, o professor mostrou para cada aluno o próprio tempo e distância alcançada de cada disparo, mostrando em seguida como calcular a velocidade média da flecha após o tiro com o arco. Por serem alunos do 9º ano, a matemática necessária para calcular a altura máxima atingida por cada disparo ainda não é dominada por eles, então neste caso o professor apresentou a Equação de Torricelli no lançamento oblíquo:

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{2g},$$

onde  $H$  é a altura máxima alcançada,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $v_0$  é a velocidade inicial e  $\theta$  é a ângulo do vetor velocidade com a horizontal. Fixou-se previamente o valor do ângulo e tempo de voo da flecha no ar de acordo com cada distância alcançada, e assim, foi calculada a altura máxima de cada disparo. Os valores fixados previamente para ângulo e tempo de voo foram os seguintes:

- De 10 metros até 20 metros, o valor do ângulo foi de 10º graus, tempo de voo da flecha foi 1,25 segundos.
  - De 21 metros até 30 metros, o valor do ângulo foi de 15º graus e tempo de voo da flecha de 1,5 segundos
  - De 31 metros até 40 metros, valor do ângulo de 20º graus, tempo de voo da flecha de 1,75 segundos
  - De 41 metros até 50 metros, valor do ângulo: 25º graus, tempo de voo da flecha: 2,0 segundos
62. Em seguida pediu-se a cada aluno que construísse o gráfico que representa a trajetória do voo da flecha disparada por ele, mostrando que a trajetória da flecha representa a parábola associada à função descrita pelo seu disparo.

### 3 RESULTADOS

O resultado mais relevantes que podemos apresentar nesta experiência é a elevação da motivação dos alunos, melhoria observada através de seu comportamento mais participativo diante da atividade prática, e do *feedback* dos próprios discentes ao serem indagados



a respeito das atividades realizadas. Abaixo estão alguns depoimentos dados pelos alunos sobre a aula prática: Aluno 12: “Foi muito legal porque é um jeito de se divertir e aprender ao mesmo tempo. Eu achei muito legal por causa disso.” Aluno 17: “Eu achei ótimo ter uma aula com tiro de arco porque é interessante o cálculo que a gente fez do ponto que a flecha percorreu e a altura que ela atingiu.” Aluno 20: “Eu achei esse trabalho muito bom, bem legal e divertido no momento de atirar.” Aluno 23: “Foi interessante fazer uma aula prática sobre o assunto. Se fosse assim em todas as aulas, aprenderíamos mais.”

#### 4 DISCUSSÃO

Ao longo desta experiência notou-se que a sessão de disparo foi o momento mais importante no projeto. A aula prática com o arco artesanal foi o ponto culminante desta proposta de ensino, e foi o momento mais aguardado por todos os alunos, pois foi nesta hora que o significado da trajetória da flecha em forma de uma parábola se tornou real. Foi o momento em que o professor levou cada aluno a perceber que a trajetória que a flecha faz durante o voo, é descrita pela parábola que representa o gráfico de uma função quadrática associada a cada disparo. Dessa forma, todo o assunto abordado antes teve um significado concreto e compreensível para cada um deles.

Sendo assim, podemos perceber que a prática de tiro com arco, como atividade prática de contextualização dos estudos teóricos, contribui de maneira significativa na melhoria de interesse e engajamento dos alunos com a rotina de estudos dentro da sala de aula. Concluimos que o método apresentado neste trabalho possibilitou ao alunos dar maior sentido e relevância aos conteúdos abordados de forma teórica despertando o interesse e motivando os alunos.

#### 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho não tem a intenção de ser o norteador em relação ao ensino das equações e funções quadráticas, mas esperamos que ele possa ser mais uma ferramenta que o professor terá a sua disposição nessa longa jornada chamada educação matemática.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- GIOVANNI J.R., C. B. J. J. R. G. **A Conquista da Matemática. 8ª.série**. São Paulo: FTD, 1998.



## USO DA CALCULADORA COMO INSTRUMENTO FACILITADOR DE APRENDIZAGEM NAS AULAS DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Priscila Marques Lopes Abitibol<sup>1</sup>  
Celina Amélia da Silva<sup>2</sup>  
Lélia de Oliveira Cruz<sup>3</sup>

**Resumo:** Saber aplicar o conhecimento escolar na resolução de problemas reais é fundamental ao processo de ensino-aprendizagem. As escolas, os professores não devem ignorar as mudanças trazidas com a revolução tecnológica, mas agregar todas as tecnologias possíveis desenvolvendo novas metodologias a fim de proporcionar novas propostas de ensino da Matemática. A utilização da calculadora, neste contexto, pode indicar uma dessas novas propostas de ensino. O presente estudo teve como objetivo tratar do uso da calculadora como ferramenta pedagógica, mediada pelo professor, nas aulas de Matemática, para compreensão de conceitos e resolução de problemas.

**Palavras-chave:** resolução de problemas; tecnologia; uso da calculadora.

**Abstract:** Knowing how to apply school knowledge in solving real problems is fundamental to the teaching-learning process. As teachers, we should not ignore the changes that new technologies have brought therefore, we should try to aggregate these new technologies and methodologies, aiming to provide new approaches to the teaching of mathematics. The use of the calculator, in this context, may indicate one of these new approaches. The present study aimed to deal with the use of the calculator as a pedagogical tool, mediated by the teacher, in Mathematics classes, to understand concepts and solve problems.

**Keywords:** problem solving; technology; using the calculator.

### 1 INTRODUÇÃO

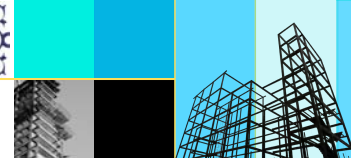
Na educação básica, sobretudo no ensino fundamental, a abstração dos conteúdos matemáticos em nada contribui com a formação integral do indivíduo, mas, ao contrário, corrobora com a ideia por muitos propagada de que a Matemática é uma disciplina reservada a poucos indivíduos dotados de uma inteligência extraordinária, na qual se estuda conteúdos complicados e que não têm relação alguma com a realidade. Houve um tempo em que os próprios professores desse componente orgulhavam-se de fazer parte desse seleto grupo de pessoas que tinham uma boa relação com a temida Matemática. Felizmente essa visão está sendo desconstruída.

---

<sup>1</sup> Mestrando do programa PROFMAT/UEMA. priscila.lopes@prof.edu.ma.gov.br

<sup>2</sup> Departamento de Matemática e Física – CESC/PROFMAT/UEMA. celina\_amelia@yahoo.com.br

<sup>3</sup> Departamento de Matemática e Física – CESC/PROFMAT/UEMA. leliacruz@cesc.uema.br



Novas propostas de ensino, novas metodologias, têm surgido objetivando proporcionar novas abordagens no ensino da Matemática, inclusive com a utilização de ferramentas tecnológicas e materiais concretos. O uso desses recursos tecnológicos deixa de ser uma opção futura e torna-se uma necessidade imediata para adaptar a forma de ensinar à realidade dos estudantes de hoje, imersos em um mundo digital, dinâmico, de rápidas transformações e comunicação instantânea. Dessa forma, o uso da calculadora em sala de aula vem auxiliar o trabalho do professor, poupa tempo e ajuda o aluno na compreensão de conceitos e resolução de problemas.

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda, não apenas nas habilidades específicas do componente, o uso tanto de objetos concretos e situações do cotidiano que possam identificar significado, como de recursos tecnológicos. BNCC (2017, p.276):

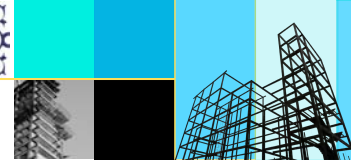
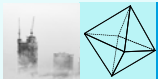
Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

O uso da calculadora favorece a observação das regularidades matemáticas, incentiva o aluno a observar e investigar a situação, diminui a exaustão sofrida pelos discentes na realização de grandes cálculos, fazendo-os concentrar a atenção nos resultados obtidos.

A habilidade de fazer cálculos manualmente é importante e, de forma alguma, deve ser extinta das aulas de Matemática, o que deve ficar evidente é que a Matemática pode ser estudada e ensinada com o apoio de ferramentas tecnológicas, entre as quais a calculadora, aproximando o estudante da realidade, efetivando seu aprendizado.

Nos dias atuais, ainda há resistência, por um número considerável de professores, em permitir a utilização da calculadora em sala de aula, por entenderem que esse recurso prejudica o interesse dos estudantes pelo cálculo manual. O uso da calculadora é tido como objeto de “trapaça”. Isso não se concretiza, se os cálculos forem trabalhados de forma crítica, com compreensão e significado para o aluno. Alguns professores argumentam ainda que não deve ser usada, porque não é permitida em concursos e vestibulares.





O uso da calculadora, no entanto, não impossibilita os alunos de saberem calcular, desde que o professor explique que eles devem saber a tabuada, as operações, os algoritmos das operações e também saibam chegar ao resultado utilizando estratégias de cálculo mental. Segundo Santana (2019), cabe destacar ainda, que atualmente os concursos e vestibulares trazem situações que avaliam competências ligadas à argumentação, conceitos e propriedades e não especificamente ao cálculo.

## **2 O USO DA CALCULADORA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA**

O uso da calculadora nas aulas de Matemática da Educação Básica leva o aluno a pensar o conhecimento de modo contextualizado, relacionando-o com seu cotidiano e fortalecendo o desenvolvimento de competências e habilidades que são imprescindíveis à sua vida fora da escola, depois de concluída esta etapa educacional.

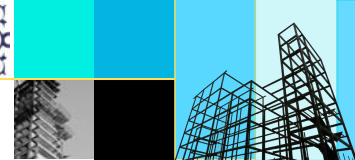
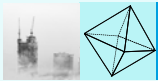
De todas as ferramentas tecnológicas, a calculadora é uma das mais populares, ela é consequência do desenvolvimento tecnológico alcançado pela humanidade, é antiga e contemporânea. Nas palavras de D'Ambrosio (1986, p. 42):

A escola deve se antecipar ao que será o mundo de amanhã. É impossível conceber uma escola cuja finalidade maior seja dar continuidade ao passado. Nossa obrigação primordial é preparar gerações para o futuro.

Se não for possível proporcionar uma escola do futuro aos estudantes da rede pública, que se trabalhe, no mínimo, em uma escola do presente, que considere todas as suas necessidades e potencialidades. Esses estudantes têm facilidade com as tecnologias, são curiosos e se interessam por situações desafiadoras.

Fora dos muros da escola, quando o cidadão precisa resolver um problema matemático, é pouco comum ter caneta e papel à mão. Nos casos mais simples, utiliza-se do cálculo mental e, em situações mais complexas, utiliza a calculadora; assim, tem precisão de resultado com a vantagem do tempo. Essa economia de tempo permite aos alunos dedicarem maior atenção ao desenvolvimento de estratégias, interpretação dos resultados, descoberta de padrões e percepção dos conceitos matemáticos aplicados na situação-problema de modo a construir seus próprios conhecimentos.

Cada vez mais modernas e cheias de recursos, as calculadoras têm recebido (e devem receber) a permissão para fazer parte das aulas de Matemática na condição de



recurso facilitador de aprendizagem e verificação de propriedade matemáticas. É interessante, por exemplo, utilizá-la em situações simples como as seguintes:

**Situação 01:** na aula de propriedade de potências de números inteiros ou racionais. Antes de anunciar as propriedades, o professor pode pedir aos estudantes que determinem, na calculadora, as potências de uma base negativa fazendo o expoente variar no conjunto dos números naturais e registrem os resultados, em seguida pedir à turma que observe os resultados e identifiquem um padrão. Com isso, estarão, eles mesmos, concluindo a propriedade na prática, de maneira não subjetiva.

**Situação 02:** ao estudar o conceito de área com os alunos, pedir para que calculem as dimensões da sala de aula, ou de qualquer outro ambiente da escola e determinem a área, pois com o uso da calculadora, este exercício fica bem mais prático, porque não será preciso “facilitar” usando decimais exatos ou números inteiros.

**Situação 03:** o professor pode pedir aos alunos que utilizando de alguns algorismos, por exemplo, 1,3,5 e 7, e dos símbolos das operações de adição (+), subtração (-), multiplicação (x) e igualdade (=) encontrem o maior e o menor resultados possíveis.

**Situação 04:** Na aula de decomposição em fatores primos, o professor pode lançar o seguinte desafio: como resolver o produto  $6 \times 54$  se as teclas 6 e 4 da calculadora estiverem quebradas?

Em uma outra perspectiva, quando o objetivo da aula não é calcular mas resolver um problema que requer, em uma de suas etapas, a resolução de contas grandes ou que exijam o uso de algoritmos, não há motivos para não utilizar a calculadora. Por exemplo, se o aluno do Ensino Médio, na aula de Estatística, necessita determinar o desvio padrão de uma sequência de dados, ele precisa calcular a raiz quadrada da variância, raiz que raramente é exata, então ele necessita da calculadora para realizar o cálculo. Outro exemplo é calcular os juros por atraso em uma parcela de um bem.

Para uso eficaz de tal ferramenta, faz-se necessário que o professor de matemática, socialize com seus discentes as funções da calculadora ao introduzi-la às aulas, pois, embora sua utilização pareça simples por se tratar de um objeto do dia a dia, eles, geralmente, só conhecem as funções básicas.

Ainda se observa docentes que não têm familiaridade com algumas funções da calculadora básica como, por exemplo, a função das teclas M+, M-, MRC, CE, e outros. O principal motivo da ausência desse recurso facilitador de aprendizagem na sala de aula deve-se à formação do professor que não utiliza e nem reflete os recursos tecnológicos como instrumentos didáticos de grande potencial na aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

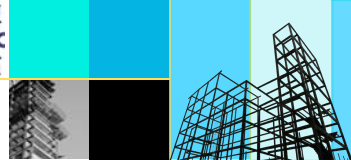
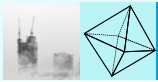
Desse modo, a calculadora agrega muito às aulas de Matemática, sendo importante tanto incluí-la como ensinar a utilizá-la, para que os indivíduos possam conhecer e utilizar melhor todas ou a maior parte das suas funções. De acordo com Ávila (2010, p.4):

[...] o avanço tecnológico criou uma situação curiosa: hoje em dia o cidadão necessita de menos Matemática – pelo menos no que diz respeito a cálculos com números – do que décadas atrás, quando não dispúnhamos, como hoje, desses instrumentos tão eficazes, que são as calculadoras de bolso.

Ressalta-se, entretanto, a importância de o professor planejar o uso desses recursos em suas aulas evitando o risco de esses virem a ser simples elementos de distração e ocupação. Então, ao optar pelo uso da calculadora, o professor deve estar ciente que não deve inserir o recurso de qualquer jeito, é necessário leitura reflexiva sobre o uso da calculadora em sala de aula, planejamento com clareza de objetivos e definição da metodologia a ser inserida a prática docente. Segundo Silva (1989 p. 3):

A calculadora se introduzida na aula de Matemática sem qualquer projeto educativo que a sustente será mais um ‘modernismo’ que nada mudará para além de poder criar grande insegurança em professores e alunos”. Porém se trabalhada de forma planejada e organizada ela possibilita um avanço para construção do conhecimento, trabalhando com meio social e cultural, desenvolvimento cognitivo e melhor rendimento escolar.

A utilização da calculadora em sala de aula, não atrapalha, pelo contrário, ajuda no desenvolvimento do aluno nas habilidades matemáticas, desde que esse seja orientado, pelo professor, a utilizá-la de forma consciente e significativa.



### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática precisa ser ensinada de forma dinâmica, buscando despertar o interesse dos alunos para a aprendizagem da disciplina.

O uso da calculadora como instrumento facilitador de aprendizagem nas aulas de Matemática deve ser estimulado, uma vez que, a calculadora funciona como uma aliada do professor para a compreensão de conceitos e resolução de problemas matemáticos. Essa metodologia além de promover uma maior integração, faz do estudante sujeito de sua própria aprendizagem e o permite ter maior concentração no processo de resolução do que na realização de cálculos repetitivos.

O professor, para fazer uso da calculadora em sala de aula, deve ter familiaridade com suas funções e ensiná-las a seus discentes com atividades práticas de modo a proporcionar um melhor entendimento das condições de uso da ferramenta.

A incorporação da calculadora na sala de aula, nas aulas de Matemática, deve ser feita com bastante responsabilidade, pois para que essa ferramenta seja realmente utilizada como alternativa para intensificar a aprendizagem dos conteúdos e torná-la produtiva, deve haver planejamento. Dessa forma, é preciso considerar que o professor deva dispor, de criatividade para formular atividades que levem o aluno a estabelecer relações entre as práticas desenvolvidas nas aulas de matemática e as situações vivenciadas no seu cotidiano e não apenas instrumento facilitador de cálculos.

### REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação**: Reflexões Sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus: Unicamp, 1986.

SANTANA, José Edivam. **O Uso da Calculadora nas aulas da Matemática Do Ensino Médio**: Refletindo Sobre O Papel Do Professor E Suas Concepções. Editora Realize, 2019. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/editora/ebooks/conapesc/2019/>



PROPOSTA\_EV126\_MD4\_ID699\_14062019120642.pdf. Acesso em: outubro de 2022.

SILVA, Albano V. **Calculadoras na educação matemática:** contributos para uma reflexão. Revista Educação e Matemática. Lisboa, n. 11, p. 3-6, jul./set. 1989.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por minha vida, e por me permitir ter saúde e disposição para não desanimar e chegar até aqui. Ao meu esposo Paulo Abitibol, por todo o apoio e pela ajuda, que foram essenciais para a realização deste trabalho. Aos amigos do mestrado, que sempre estiveram ao meu lado, por todo auxílio demonstrado ao longo do tempo em que me dediquei a esta pesquisa. Às professoras Lélia de Oliveira Cruz e Celina Amélia da Silva pelas orientações e pela disponibilidade em compartilhar seus conhecimentos, não só na realização deste artigo, mas ao longo de toda a disciplina TCC do Mestrado PROFMAT.



## O CUBO MÁGICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL: um recurso para o desenvolvimento de habilidades

Márcia Regina Sousa de Olanda<sup>1</sup>  
Waléria de Jesus Barbosa Soares<sup>2</sup>  
Lélia de Oliveira Cruz<sup>3</sup>

### Resumo:

O presente trabalho propõe-se apresentar o jogo Cubo Mágico, identificando-o como recurso que pode ser agregado às aulas de Matemática no ensino fundamental, anos finais. Isso ocorre visando responder a seguinte problemática: quais habilidades e conhecimentos matemáticos podem ser desenvolvidos por meio do uso do Cubo Mágico em salas dos anos finais do ensino fundamental? Desse modo, os objetivos foram: apresentar o Cubo Mágico, identificar habilidades e conhecimentos matemáticos que podem ser desenvolvidos em aulas de Matemática que o utiliza, o que contribui no processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, realizou-se uma pesquisa fundamentada em revisão bibliográfica, trabalhos científicos correlatos e da BNCC de Matemática do ensino fundamental. A partir das leituras e análises, concluiu-se que o Cubo Mágico surge como um recurso que possibilita o desenvolvimento de diversas habilidades e conhecimentos matemáticos.

**Palavras-chave:** Cubo Mágico, Habilidades, Conhecimentos matemáticos.

### Abstract:

The present work proposes to present the Magic Cube game, identifying it as a resource that can be added to Mathematics classes in elementary school, final years. This occurs in order to answer the following problem: what mathematical skills and knowledge can be developed through the use of the Magic Cube classrooms in the final years of elementary school? Thus, the objectives were: to present the Magic Cube, identify mathematical skills and knowledge that can be developed in Mathematics classes that use it, what contributes to the teaching and learning process. Therefore, research was carried out based on a bibliographic review, related scientific works and the BNCC of Mathematics classes in elementary school. From the readings and analyses, it was concluded that the Rubik's Cube appears as a resource that enables the development of different skills and mathematical knowledge.

**Key-words:** Rubik's Cube, Skills, Mathematical Knowledge.

## 1 INTRODUÇÃO

Os jogos e materiais concretos assumem grande importância nas pesquisas educacionais, por serem considerados meios de compreender e intervir nos processos cognitivos

<sup>1</sup> Possui graduação em Licenciatura em Matemática (UFMA – 2005) e Bacharelado em Direito (UFMA – 2012). Especialista em Matemática e Estatística (Faculdade Pitágoras – 2010), Direito Civil (Faculdade Signorelli – 2017) e Informática na Educação (IFMA – 2021). Atualmente, mestranda do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT – UEMA) e professora do Instituto Estadual de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IEMA). Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3991131549976687>. E-mail: [marcia.ufma@gmail.com](mailto:marcia.ufma@gmail.com)

<sup>2</sup> Possui graduação em Matemática (UFMA – 2002), em Artes Visuais (UFMA – 2012) e em Pedagogia (UNIFRAN – 2017). Especialista em Ensino de Matemática (UEVA – 2004), em Gestão Educacional (IBMEC – 2014) e Cinema e Linguagem Audiovisual (UGF – 2014). Mestrado em Matemática (UNICAMP – 2009) e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática (UNICAMP – 2017). Professora Adjunta da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) e Professora Permanente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT – UEMA). Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-6022-9670>. E-mail: [walleriajotabes@gmail.com](mailto:walleriajotabes@gmail.com)

<sup>3</sup> Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA – 2017). Professora Permanente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT – UEMA), Professora da Universidade Estadual do Maranhão (DMF – CESC/UEMA) e da Educação Básica/SEEDUC – MA. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-9605-4091>. E-mail: [leliacruz@cesc.uema.br](mailto:leliacruz@cesc.uema.br)



da criança, além de representarem para a Psicologia do Desenvolvimento uma atividade dinâmica que desempenha as funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no processo de desenvolvimento.

A respeito dos materiais concretos, pode-se dizer que “têm fundamental importância pois, a partir da utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática.” (LORENZATO, 2006, p. 43). Sobre os jogos, “um dos principais motivos para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados pelos alunos.” (BORIN, 1996, p. 10). Ambos são lúdicos e concretizam a Matemática abstrata. Um exemplo é o Cubo Mágico, material concreto que pode ser adaptado como um jogo, se houver competição.

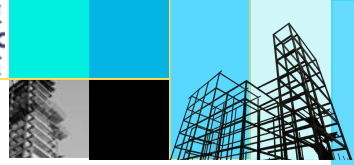
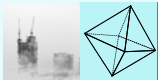
Nesse contexto, o trabalho propõe-se responder a seguinte problemática: quais habilidades e conhecimentos matemáticos podem ser desenvolvidos por meio do uso do Cubo Mágico em salas dos anos finais do ensino fundamental? Tendo os seguintes objetivos: apresentar o Cubo Mágico, identificar habilidades que podem ser desenvolvidas nos alunos durante as aulas de Matemática que o utilizam, contribuindo para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos auxiliando no processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, a pesquisa foi realizada por meio de revisão bibliográfica e de trabalhos científicos correlatos, associados à uma análise da BNCC de Matemática do ensino fundamental.

## 2 O JOGO COMO RECURSO PEDAGÓGICO

A atividade lúdica já existia entre os animais e os seres humanos desde os tempos mais remotos. No entanto, o jogo foi inserido como metodologia de trabalho a partir dos grandes psicólogos, como Lev Vygotsky e Jean Piaget.

Em sua obra *A Formação Social da Mente* (1994), Lev Vygotsky vem discutir o papel do brinquedo no desenvolvimento da criança. Segundo Vygotsky (1994), o brinquedo é visto não somente como uma atividade prazerosa, mas como uma situação que surge do desejo de satisfazer as necessidades da criança, em idade pré-escolar, e dos adolescentes. Estes criam uma situação imaginária permeada de regras de comportamento, concluindo assim que todo jogo com regras contém situações imaginárias.

O psicólogo Jean Piaget (1978) interessou-se pelas propostas cognitivas que os jogos e suas regras desenvolviam, a partir da investigação sobre o desenvolvimento do juízo moral da criança. Dell’agli (2002) diz que Piaget caracterizou os jogos como: os jogos de exercícios, pois servem de exercitação e formação de hábitos na criança; os jogos simbólicos que tem função



de abstração através de comparação entre um elemento dado (objeto), um elemento imaginado e uma representação fictícia; os jogos de regras que tem função nas relações sociais ou interindividuais de caráter coletivo (jogadores dependem um do outro e cumprem regras).

Conforme Rosamilha (1979), os jogos e os brinquedos desenvolvem o senso de competência que faz com que as pessoas confiantes, tenham senso de eficiência e autorrespeito, diminuindo sua ansiedade. Portanto, os jogos funcionam como recursos construtores de valores éticos que surgem da liberdade que estes trazem aos jogadores, que através da imaginação e criatividade interagem consigo mesmos, com o jogo e com o outro, dentro de regras estabelecidas entre eles.

Desse modo, o jogo surge na educação possibilitando associar o caráter imaginário aos conhecimentos sistemáticos escolares. O que garante um envolvimento mais profundo e interativo dos alunos com o seu próprio conhecimento, desafiando-os em como pensar e resolver problemas matemáticos.

A seguir, tratar-se-á o Cubo Mágico como recurso para o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos matemáticos na sala de aula.






### **3 CUBO MÁGICO: HISTÓRIA, TIPOS, COMO USAR**

Em 1974, o professor húngaro Erno Rubik inventou um quebra-cabeça em formato de um cubo, chamado de cubo mágico. A ideia surgiu com a criação de um protótipo de cubo feito de madeira para ilustrar o conceito de terceira dimensão para os seus alunos do curso de arquitetura. Após patenteadado e divulgado na Hungria, o jogo despertou curiosidade entre alguns matemáticos que o levam às conferências internacionais, despertando interesse em outras pessoas. E, em 1980, houve sua produção industrial e distribuição mundial, sendo que 100 milhões de cubos foram vendidos em apenas dois anos.

O Cubo Mágico é um quebra-cabeça que tem o formato tradicional de um cubo com 6 faces coloridas em azul, verde, amarelo, vermelho, branco e laranja. Cada face é constituída por 9 quadrados, compondo um cubo de versão 3x3x3. Composto de três tipos de peças: os centros que possuem somente uma cor; os meios que possuem duas cores; e os cantos que possuem três cores. Logo, suas 27 peças distribuem-se da seguinte forma: seis centros, doze meios e oito cantos.

Além do Cubo Mágico tradicional, na versão 3x3x3, há outras variações diferenciadas pelo formato, como: cubo 2x2x2, Pyraminx, Megaminx, Cubo 3x3x4, Cubo 4x4x4, Skewb.

Figura 1 – Alguns tipos de cubo mágico.

					
Cubo 2x2x2	Pyraminx	Megaminx	Cubo 3x3x4	Cubo 4x4x4	Skewb

Fonte: adaptado de <https://grauacao.alegre.ufes.br/conteudo/projeto-aprendendo-montar-cubo-magico> (2022)

Para resolver o Cubo Mágico embaralha-se as peças e depois realiza-se movimentos de forma que as faces voltem a ser compostas por todas as peças da mesma cor. Segundo Silva (2015), há alguns métodos de resolução, como: o método da chave-de-fenda, que consiste em girar uma face qualquer (45°) e enfiar uma chave-de-fenda fazendo com que um cubinho salte do cubo e assim poder desmontar e montar novamente; o método empírico, no qual o manuseio aleatório por testes, tentativa e erro pode levar a conseguir montar; o método estratégico (método de camadas), em que se toma um conjunto de algoritmos realizando tarefas num sistema tutorial passo-a-passo; o método algébrico, que consiste em encontrar a solução fazendo as contas, utilizando os conhecimentos de Teoria dos Grupos.

Nas perspectivas de resolução do Cubo Mágico embaralhado, tem-se a atitude de fazê-la sem instruções, só por tentativas. No entanto, “sem instruções de como proceder é quase impossível de se resolver, tornando com que o cubo de Rubik seja umas das invenções mais frustrantes e viciantes já produzidas.” (SILVA, 2015, p. 16).

Portanto, as estratégias que envolvem a resolução do Cubo Mágico despertam a compreensão não somente das regras de como concluir o cubo, mas também desenvolve habilidades e conhecimentos matemáticos. Estas possibilidades serão tratadas no tópico a seguir.

#### 4 A MATEMÁTICA DO CUBO MÁGICO NA SALA DE AULA

As primeiras ideias matemáticas a serem exploradas com o Cubo Mágico consistem em utilizá-lo para explorar conceitos geométricos, como de volume, pois é um sólido de Platão cuja faces são formadas por quadrados congruentes, em que as faces coloridas despertam a curiosidade dos alunos para mexer e entender os elementos que o compõe. Então, ao ser usado em aulas de Geometria servirá para “visualização e desenvolvimento do raciocínio espacial dos



alunos, além de aprenderem as fórmulas e desenvolverem capacidade de raciocínio para se calcular os volumes de alguns sólidos geométricos.” (MOURA, SILVA, SILVA E AMARAL, 2019, p. 7).

Nesse contexto, tomando a BNCC (2018), pode-se desenvolver a habilidade 24, do 6º ano do ensino fundamental, que diz “resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas [...] capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 303), ou ainda, a habilidade 19, do 9º ano, que trata de “resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.” (BRASIL, 2018, p. 319)

Mas, também, conforme o projeto com o Cubo Mágico aplicado por Tabuti, Azevedo e Nakamura (2016), os alunos fizeram:

[...] cálculos da probabilidade da face vermelha estar posicionada na face superior do cubo, bem como, cálculos de análise combinatória para saber de quantas formas diferentes pode-se obter faces de uma ou duas cores, identificando a posição das cores a partir da manipulação com matrizes. Além disso, os alunos desenvolveram as competências e habilidades do raciocínio lógico na aplicação dos algoritmos de resolução do cubo mágico que foram motivados pelo campeonato de Cubo Mágico promovidos pelos estudantes. (TABUTI, AZEVEDO E NAKAMURA, 2016, p. 132).

Assim, trabalhado desta forma, o Cubo Mágico ajuda a desenvolver a habilidade 22, do 8º ano, referente ao estudo de probabilidade, na qual o aluno deve “calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.” (BRASIL, 2018, p. 315).

Enfatiza-se que outros conhecimentos matemáticos podem ser trabalhados e habilidades diversas serão adquiridas, pois o Cubo Mágico auxilia no desenvolvimento de “competências de análise, síntese e inferência do raciocínio lógico e dos conceitos matemáticos que envolvem os elementos de um Cubo Mágico como vértices, arestas e faces [...]” (TABUTI, AZEVEDO E NAKAMURA, 2016, p. 132).

Nesse sentido, ao trabalhar com o Cubo, em aulas, pode-se desenvolver a habilidade 17, do 6º ano, sobre “quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.” (BRASIL, 2018, p. 303).

Também, é possível trabalhar noções de funções, volume, simetria, permutação e conteúdos de Álgebra, como Álgebra Abstrata, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade 21, do 7º ano, que busca “reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.” (BRASIL, 2018, p. 309).

Quanto às habilidades desenvolvidas pelos alunos, “é possível perceber o Cubo como um importante objeto de ensino, ele cativa a atenção do aluno e o envolve em suas atividades, tendo o potencial de em um trabalho conjunto com o professor perceber/descobrir os conceitos matemáticos que se fazem presente.” (MACHADO, 2017, p. 5).

O projeto de extensão Desvendando o Cubo Mágico, aplicado pelos autores Juliana Moreno Oliveira, Gizele Geralda Parreira e Luciano Duarte da Silva (2019), visou ensinar a solução do quebra-cabeça por meio do método de resolução sequencial de camadas adaptado (com sete etapas, notações e algoritmos) a fim de desenvolver a capacidade de raciocínio lógico. Os autores concluíram com a prática que houve uma “evolução da potencialidade da maioria dos alunos participantes no quesito agilidade e rapidez para montar o cubo no decorrer das instruções de cada encontro.” (OLIVEIRA, PARREIRA E SILVA, 2019, p. 141).

Outra proposta de atividade utilizando o Cubo Mágico, foi aplicada em aulas de Matemática ministradas na turma do 7º ano do Ensino Fundamental, por Alecio Silva, Thalita da Silva, Wesley Barros e Valdson Silva (2016) em que se identificou a aplicação do Algoritmo da Divisão de Euclides e os passos da manipulação do Cubo Mágico. Isso decorreu do fato de que ao girar as faces ou combinar as sequências de movimentos que se executadas repetidas vezes faz retornar as faces a posição inicial (faces completadas). Assim, os próprios autores asseveram que ao manusear o Cubo:

[...] repetida seis vezes consecutivas ter-se-á novamente a posição inicial. Relacionando cada uma das posições alcançadas com a sequência de giros das faces podem ser relacionadas com um possível resto da divisão de um número inteiro por seis. Mostrando que o cubo é um modelo em que se evidencia um sistema composto pelos restos da divisão euclidiana de números inteiros, assim desenvolvendo ideias como a do raciocínio sequencial e periódico. (SILVA, 2016, p. 6)

Observa-se que nessa atividade desenvolveu-se a habilidade 34, referente ao 7º ano, que diz que o aluno deve “planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.” (BRASIL, 2018, p. 311).





Enfim, o Cubo Mágico é um recurso que pode ser utilizado em várias aulas dos anos finais do ensino fundamental, desenvolvendo assim, habilidades matemáticas nos alunos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou as habilidades e os conhecimentos matemáticos desenvolvidos com a utilização do Cubo Mágico no processo de ensino e aprendizagem no ensino fundamental, anos finais, a partir de uma pesquisa realizada por meio de revisão bibliográfica e de trabalhos científicos correlatos, associados à análise de habilidades da BNCC de Matemática.

Para atingir o conhecimento das possibilidades pedagógicas desse quebra-cabeça, definiu-se os seguintes objetivos: apresentar o jogo Cubo Mágico, identificar as habilidades desenvolvidas nos alunos do ensino fundamental a partir da BNCC de Matemática e reconhecer os conhecimentos matemáticos envolvidos que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem.

Com isso, a pesquisa permitiu concluir que o Cubo Mágico surge como um recurso que possibilita o desenvolvimento de diversas habilidades, como atenção, agilidade, raciocínio espacial e numérico, e conhecimentos matemáticos, como conceitos de cálculo de áreas, volume, função, Álgebra Abstrata. Assim, o jogo mostra sua potencialidade pedagógica na sala de aula, e, no ensino de Matemática, traz uma abrangência de conhecimentos que transitam dos conteúdos básicos aos temas complexos.

## REFERÊNCIAS

**BRASIL.** Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BORIN, Júlia. **Jogos e resoluções de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

DELL'AGLI, Betânia Alves Veiga. **O jogo de regras como recurso diagnóstico psicopedagógico.** 2002. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP - Campinas – SP.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores)

MACHADO, Milca Pires. Que matemática está por trás do cubo mágico? **Revista MoEduCiTec: Mostra Interativa da Produção Estudantil em Educação Científica e Tecnológica** - O Protagonismo Estudantil em Foco. Edição 2017. Disponível em: <https://www.publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/moeducitec/article/view/8524/7315#:~:text=Foi%20no%20ano%20de%201980,milh%C3%B5es%20em%20todo%20o%20mundo.> Acesso em: 23 out. 2022





MOURA, Ivan Rodrigues de; SILVA, Adelson José Brandão; SILVA, Gorete Rodrigues da; Amaral, Vilani Ferreira Feitosa. O uso do Cubo Mágico como recurso facilitador para abordagem de volume mediante o princípio de Cavalieri. In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DAS LICENCIATURAS – COINTER PDVL, Recife - PE, 2019 **Anais eletrônicos** [...] Recife, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.31692/2358-9728.VICOINTERPDVL.2019.0097>. Acesso em: 23 out. 2022

OLIVEIRA, Juliana Moreno; PARREIRA, Gizele Geralda; SILVA, Luciano Duarte da. O uso do cubo mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. **As diversidades de debates na pesquisa em matemática 2 [recurso eletrônico]** / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. p. 126 - 141. Disponível em: <https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/post/o-uso-do-cubo-magico-como-recurso-pedagogico-para-o-desenvolvimento-do-raciocinio-logico-matematico>. Acesso em: 24 out. 2022

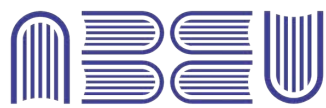
ROSAMILHA, Nelson. **Psicologia do jogo e aprendizagem infantil**. São Paulo: Pioneira, 1979.

SILVA, Alecio Soares et al.. O cubo mágico: aplicações do algoritmo euclidiano da divisão. **Anais IX EPBEM...** Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26463>. Acesso em: 24 out. 2022

SILVA, José do Nascimento. **Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta – PB**. Dissertação Mestrado Profmat, 2015, Universidade Estadual da Paraíba. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2390>. Acesso em: 23 out. 2022

TABUTI, Lucy Mari; ROCHA, Ricardo Luis de Azevedo da; NAKAMURA, Ricardo. O Cubo Mágico no Ensino da Matemática e do Raciocínio Lógico, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. In: CONGRESSO DE GRADUAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Anais do 2º Congresso de Graduação da Universidade de São Paulo**, Piracicaba, 2016. p. 132-133. Disponível em: <http://www.congressograduacao.usp.br>. Acesso em: 23 out. 2022

VYGOSTSKY, Lev Semyonovich. **A formação social da mente: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.



Associação Brasileira  
das Editoras Universitárias

