O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DO PROFMAT

Experiências e desafios

Organizadores:
Antonio José da Silva
Josenildo de Souza Chaves
Marcos A. Ferreira de Araújo
Valeska Martins de Souza

EDUFMA

Organizadores:
Antonio José da Silva
Josenildo de Souza Chaves
Marcos A. Ferreira de Araújo
Valeska Martins de Souza

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DO PROFMAT
Experiências e Desafios

São Luís

EDUFMA

2020

Revisão
Autores e Autoras
Projeto Gráfico
Antonio José da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O ensino de matemática no contexto do PROFMAT: experiências e desafios/ Organizadores: Antonio José da Silva ...[et al.].— São Luís, EDUFMA, 2020.

168 p.:il.
ISBN 978-65-86619-29-4

1. Ensino da matemática. 2 Geometria. I. Chaves, Josenildo Souza. II. Araújo, Marcos Antonio Ferreira de. III. Souza, Valeska Martins de.

CDD 372.7
CDU 37:51

Elaborada por Gracelynne Oliveira Santos – Bibliotecária CRB-13/520

"20. Importa: a) levar o aluno a formar as noções e descobrir por si mesmo as relações e as propriedades matemáticas, em vez de lhe ser imposto um pensamento adulto já acabado; b) assegurar a aquisição das noções e dos processos operatórios antes de introduzir o formalismo; c) só confiar ao automatismo as operações assimiladas.

21. E indispensável: a) fazer com que o aluno inicialmente adquira a experiência dos seres e das relações matemáticas, e inicia-lo, em seguida, no raciocínio dedutivo; b) estender progressivamente a construção dedutiva das matemáticas; c) aprender a formular os problemas, a pesquisar dados e a explorar e apreciar os resultados; d) dedicar-se de preferência a investigação heurística dos problemas do que a exposição doutrinaria dos teoremas;...

22. E preciso: a) estudar os erros dos alunos e ver neles um meio de conhecer seu pensamento matemático; b) treinar na prática do controle pessoal e da autocorreção; c) dar o sentido da aproximação ... ; e) dar prioridade a reflexão e ao raciocínio ... etc."

Jean Piaget (Página 49) no livro **Psicologia e Pedagogia**. Recomendação nº 43 ("O ensino das matemáticas nas escolas secundarias") Conferência Internacional da Instrução Pública (*Bureau* Internacional de Educação e Unesco) - 1956

Apresentação

Esta obra foi organizada a partir dos trabalhos apresentados na Sessão PROFMAT durante o IV Colóquio de Matemática da Região Nordeste, sediado na Universidade Federal do Maranhão, na Cidade Universitária, Campus Dom Delgado no período de 19 a 23 de novembro de 2018. Essa sessão contou com alunos e docentes de diversas partes do Brasil, o que permitiu trocas de experiências significativas, discussões sobre o andamento do Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e perspectivas futuras. As realidades particulares de cada região em relação às temáticas Ensino e Matemática também viraram pauta, demonstrando que as percepções relativas ao tema Ensino são tão abrangentes quanto o próprio PROFMAT. Esse espaço de ideias permitiu que a Comissão Científica pudesse selecionar 13 dos 32 trabalhos apresentados, que foram reescritos para compor este volume. Os trabalhos selecionados são produtos das pesquisas em andamento, pesquisas concluídas, experiências profissionais, estudos teóricos, e propostas didáticas; na grande maioria, fruto das ações do PROFMAT no âmbito nacional.

Agradecemos à comissão organizadora do IV Colóquio de Matemática da Região Nordeste pela oportunidade dada para organizar uma sessão sobre Ensino de Matemática.

Desejamos a todas e todos os interessados uma excelente leitura. E caso queiram comunicar-se com os autores e autoras, tomamos o cuidado de deixar os endereços eletrônicos disponíveis em cada capítulo para aproximar leitores de autores, muitos deles recém iniciados no universo da pesquisa no Ensino de Matemática.

Boa leitura!

Comissão Científica da Sessão PROFMAT
IV Colóquio de Matemática da Região Nordeste

Sumário

Capítulo 1

SOBRE A REDUÇÃO DE CÔNICAS AOS SEUS EIXOS PRINCIPAIS

Marcos A. F Araújo[1]

1 INTRODUÇÃO

Nestes quase 40 anos lecionando matemática, parte no ensino básico e o restante no ensino superior, tenho tido a oportunidade de travar longas discussões com colegas sobre o que deveria ser um currículo mínimo para um curso de graduação nessa área. Obviamente, o tema é apaixonante e as discussões infindáveis. Muitas vezes recebi críticas dos colegas, mas, creio que na maioria das vezes consegui convencê-los da importância de um olhar diferenciado para o curso de licenciatura em matemática. Nos últimos anos tenho visto com satisfação a entrada da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM nessa discussão com propostas muito semelhantes aquelas em que eu vinha há anos tentando convencer meus pares. Hoje o Mestrado Profissional em Matemática, da SBM, também conhecido como PROFMAT, é uma realidade e tem um olhar bastante diferente dos mestrados acadêmicos, até porque possuem objetivos diferentes.

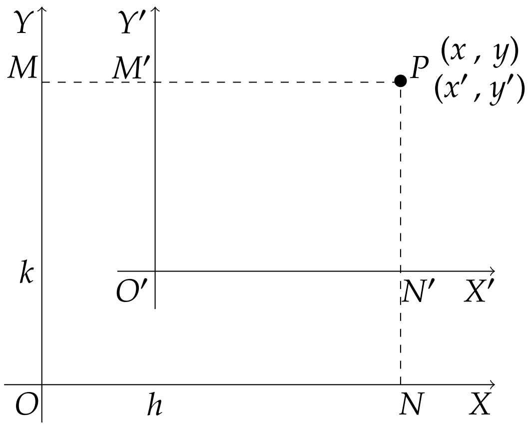
Dentro dessa perspectiva aproveitamos a oportunidade para discutir um assunto que bem que poderia ser discutido no ensino médio, já que não envolve nível elevado de sofisticação matemática. Esse assunto diz respeito à redução de uma cônica aos seus eixos principais, que numa linguagem mais simples significa reescrever a equação de certas quádricas de modo que se possa identificar imediatamente a curva que tal equação representa. A ferramenta utilizada: translação e rotação de eixos. O tema não é novidade, e acredito que já fez parte dos currículos de matemática no ensino básico. Hoje, no entanto, é assunto do passado.

2 A TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Consideremos dois sistemas de eixos ortogonais: XOY e $X'O'Y'$, o primeiro com centro na origem $O = (0,0)$ e o segundo com centro no ponto de coordenadas $O' = (h,k)$, conforme a figura 1 abaixo. Consideremos também um ponto P, cujas coordenadas no sistema XOY são (x,y) e no sistema $X'O'Y'$ são (x',y'). Desejamos saber que relação guardam essas coordenadas.

[1] UFMA, marcos.araujo@ufma.br

Figura 1 – Translação de eixos



Analisado a figura 1, verificamos que

$$x = MP = MM' + M'P = h + x',$$
$$y = NP = NN' + N'P = k + y'.$$

Assim, tem-se as seguintes relações: $\boxed{x = x' + h}$ e $\boxed{y = y' + k}$.

Dentro do espírito do que entendemos sobre redução de uma cônica aos eixos principais, vamos aplicar essas ideias na solução do seguinte problema: reduzir aos eixos principais, a cônica cuja equação é

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135.$$

Solução: Fazendo-se a mudança de variável $x = x' + h$ e $y = y' + k$, onde h e k serão convenientemente escolhidos, obtemos

$$3(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 24(y' + k) = 135,$$

e, daí

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' - (8k - 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k = 135. \qquad (1)$$

Fazendo-se $6h + 6 = 0$ e $8k - 24 = 0$, obtemos $h = -1$ e $k = 3$. Substituindo esses valores de h e k em (1), obtemos a equação

$$3x'^2 - 4y'^2 = 102$$

que pode ser facilmente identificada como a equação de uma hipérbole, centrada nos eixos principais $x = 1$ e $y = 3$.

Outra solução pode ser obtida por meio de completamento de quadrados, da seguinte maneira.

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135 \Rightarrow$$
$$3x^2 + 6x - 4y^2 + 24y = 135 \Rightarrow$$
$$3(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 102$$

$$3(x+1)^2 - 4(y-3)^2 = 102.$$

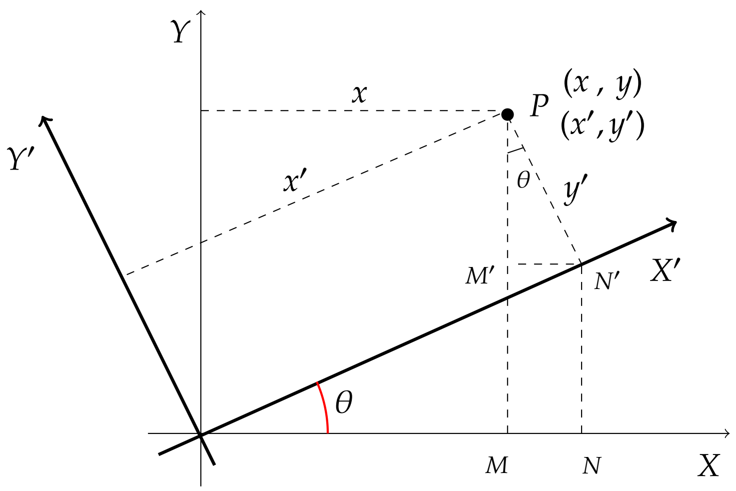
Substituindo-se $x+1$ por x' e $y-3$ por y', tem-se

$$3x'^2 - 4y'^2 = 102.$$

3 ROTAÇÃO DE EIXOS

Suponhamos que um sistema de eixos ortogonais XOY sofre uma rotação, em torno da origem O, de um ângulo θ, tornando-se um novo sistema de eixos ortogonais $X'OY'$, conforme a figura abaixo.

Figura 2 – Rotação de eixos



Sejam (x, y) e (x', y') as coordenadas de um ponto P, respectivamente, no sistema ortogonal XOY e $X'OY'$, conforme a figura 2. Tem-se, então:

$$\begin{aligned} x &= OM = ON - MN = x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta, \\ y &= MP = MM' + M'P = NN' + M'P = x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}$$

Assim, as fórmulas de rotação de eixos são dadas por

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta, \\ y &= x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}$$

Usando as ideias acima, é possível resolver o seguinte problema clássico: Por meio de uma rotação, reduzir a cônica de equação $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$ aos seus eixos principais.

Solução: Façamos a mudança de variável $x = x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta$ e $y = x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta$. Isto feito, obtemos

$$7(x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta)^2 - 6\sqrt{3}(x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta)(x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta) + 13(x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta)^2 = 16,$$

e, daí, desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, segue que

$$(7\cos^2\theta - 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 13\text{sen}^2\theta)x'^2 + [12\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)]x'y'$$
$$+(7\text{sen}^2\theta + 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 13\cos^2\theta)y'^2 = 16. \quad (2)$$

A equação acima ficará mais simples se escolhermos o valor de θ de tal modo que o termo em $x'y'$ "desapareça". Para isso fazemos

$$12\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0,$$

Daí,

$$6\,\text{sen}\,2\theta - 6\sqrt{3}\cos 2\theta = 0,$$

ou, ainda, tg $2\theta = \sqrt{3}$. Assim, $2\theta = 60$, ou seja, $\theta = 30^o$. Substituindo essa valor de θ na equação (2), obtemos a equação mais simples

$$x'^2 + 4y'^2 = 4,$$

que representa uma elipse.

A ideia desenvolvida acima pode ser facilmente generalizada, conforme o teorema abaixo.

Teorema 1. *A equação do segundo grau da forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3)$$

pode ser reduzida em seu termo Bxy fazendo-se uma mudança de variáveis do tipo $x = x'\cos\theta - y'\text{sen}\,\theta$, $y = x'\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta$, *bastando para isso tomar* θ *de tal forma que*

$$tg\ 2\theta = \frac{B}{A-C}.$$

Demonstração: A demonstração do teorema é, realmente muito simples, bastando fazer a mudança de variáveis indicada e, como no exemplo acima, escolher θ de modo que o coeficiente do termo em $x'y'$ se anule. ■

O próximo problema envolve as duas mudanças de coordenadas: a translação e a rotação.

Consideremos o seguinte problema: reduzir a cônica $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ aos seus eixos principais. Aqui, faremos inicialmente uma translação por meio da mudança de variáveis $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Com isso obtém-se

$$5(x'+h)^2 + 6(x'+h)(y'+k) + 5(y'+k)^2 - 4(x'+h) + 4(y'+k) - 4 = 0.$$

Desenvolvendo-se essa expressão e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + (10h + 6k - 4)x' + (10k + 6h + 4)y' + 5h^2 + 6hk + 5k^2 - 4h + 4k - 4 = 0,$$

cujos termos do primeiro grau podem ser eliminados fazendo-se

$$\begin{cases} 10h + 6k - 4 = 0, \\ 6h + 10k + 4 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $h = 1$ e $k = -1$. Daí obtemos a equação mais simples

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 8. \tag{4}$$

Agora efetuamos a rotação por meio do ângulo θ, onde

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{6}{5 - 5} = \frac{6}{0} = \infty.$$

Assim, $2\theta = 90^o$, ou seja $\theta = 45^o$. Usando as equações da rotação, obtemos

$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}.$$

Substituindo em (4), segue-se que

$$5\left(\frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8,$$

o que nos leva a

$$4(x'')^2 + (y'')^2 = 4,$$

que é a equação de uma elipse.

4 CONCLUSÃO

Na discussão acima não usamos nenhum conhecimento que não seja pertinente ao currículo do ensino médio. Esperamos que o material aqui sob apreciação seja interessante para que o leitor possa desenvolver outros conteúdos possíveis de serrem desenvolvidos em nível elementar.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

KINDLE, Joseph H. **Geometria analítica: plana e espacial**. Coleção Schaum, Editora MacGraw Hill, New York, 1971.

Capítulo 2

PROBLEMAS DE MÁXIMO E MÍNIMOS SOLUCIONADOS POR DESIGUALDADES

Francisco de Paula S. de Araujo Junior[1]
Arnaldo Silva Brito[2]

Resumo: O presente trabalho tem a finalidade de apresentar problemas de geometria plana e espacial que envolva máximos ou mínimos, e solucionar estes sem a utilização de Cálculo diferencial, sendo adotado de soluções por conteúdos que podem ser trabalhados com alunos do ensino médio, como problemas que envolvem desigualdades. Dentre estas pode ser destacado a desigualdade de Cauchy - Schwarz, ou os Principio da soma mínima com produto constante, Princípio do produto máximo com soma constante e Princípio da proporção de expoente com soma constante que tem uma relação direta com desigualdade das médias, aritmética e geométrica. Com o intuito que este seja visto como uma possibilidade de se trabalhar com outros assuntos matemáticos que não são próprios da educação básica, ou seja a tentativa de abordar outros conteúdos ditos de ensino superior já no ensino médio. Analisando a problemática da possível colaboração no processo de ensino e aprendizagem tanto para professores como para alunos com relação ao estudo deste tópico de geometria, podendo também ser visto como a de reflexão sobre, quando cada assunto deve ser ensinado com relação a matemática e a oportunidade de colaboração nas aulas voltadas para OBMEP ou outras olimpíadas de matemática.

Palavras-chave: Geometria, Máximos, Mínimos e Desigualdades.

1 INTRODUÇÃO

Uma mudança ou acrescentar na educação básica em especial no ensino médio, com competências que já sejam proprias desta etapa escolar, podem vir a contribuir no aprendizado do aluno e na prática docente, esta sendo esta uma oportunidade para uma breve reflexão do como se ensina e o que se deve ser ensinado, a utilização de aplicações diversas para soluções de problemas deixa claro para o aluno que o assunto estudado tem importância direta na solução destes e pode servir de oportunidade de apresentação de problemas práticos.

> Há mais de um século, a partir dos anos 1910, surgiam na Bulgária e na Russia os "Círculos de Matemática", uma forma diferente de aprender matemática. Eram grupos de alunos liderados por matemáticos que discutiam soluções de problemas (em contraste com o formato expositivo e menos ativo das aulas tradicionais). Nos anos que se seguiram, os Círculos tornaram-se parte importante da academia matemática da Europa Oriental, uma forma dos matemáticos passarem sua cultura para as novas gerações de alunos. (roda de matematica, 2018)

[1] UESPI, pjhatata@hotmail.com
[2] UESPI,bsarnaldo@gmail.com

A motivação é tratar de um conteúdo matemático que pode ser considerado complexo, porem com um linguagem que torne este apresentável para alunos do ensino médio, e que este possa despertar a curiosidade discente em relação ao tópico de máximos e mínimos e nos docente sobre uma possível forma de ver a alternativa de acrescentar este ou outros assuntos que ate então são vistos como sendo exclusivos do ensino superior, mas que na verdade depende da forma como é tratado, e talvez despertando e fazer que esta prática seja levada para outros conteúdos matemáticos.

Ao uma analisar o seguinte trecho "A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilidade por imitação e prática" (POLYA, 2006, p. 3), ou seja vendo problemas matemáticos como uma forma de fazer "exercícios físicos" a solução de problemas com conteúdos mais elaborados tem a prerrogativa que seria de realizar atividades físicas mais intensas, esperando que seja agente direto no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, e acredita-se que não deve existir conteúdos que não deve ou não podem ser apresentado para alunos do ensino médio, na verdade depende de inúmeros fatores não só o de divisão do currículo, que como professores podemos trazer para linguagem dos mesmos e por este motivo, questiona-se: *Quais as possíveis contribuições para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos e prática docente pode ser obtida ao analisar a implementação do conteúdo de, Geometria envolvendo máximos e mínimos, nas aulas do ensino médio?*

2 DESENVOLVIMENTO

A escolha por soluções para os problemas por uma alternativa sem o uso de Cálculo, tema a finalidade de solucionar a problemática levantada, para tornar apresentável estes problemas no ensino médio, com o aumento de participação de alunos em olimpíadas de matemática analisando o caso aqui da OBMEP que em 2018 teve mais de 18 milhões de alunos participando, tanto este dado como aumento de participantes pode ser visto em (OBMEP, 2018),sendo assim faz-se necessário a inclusão de problemas diversificados para os mesmo.

Posteriormente seguem as desigualdades e relações matemáticas que vão ser utilizadas nas soluções posteriores dos problemas elencados, e como o próprio trabalho tem a prerrogativa de apresentar estes problemas no ensino médio, as demonstrações que venham a seguir também tem que ser tratadas desta forma, ou seja sendo feitas somente com conteúdos que são comuns para os alunos neste nível.

2.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS REFERENTES A DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

Segundo (CARVALHO; MORGADO, 2015) segue a seguinte definição:

Definição 2.1 *Dados dois números reais positivos x e y definimos média aritmética destes dois números como sendo $\frac{x+y}{2}$ e a média geométrica $\sqrt{xy}$ e usemos a seguinte nomenclatura* *respectivamente para estas, M_A e M_G.*

Teorema 2.1 *Para quaisquer dois reais positivos x e y é válido que $M_A \geq M_G$ e a igualdade acontece se $x = y$.*

Demonstração:

Sejam x e y números reais tais que $x > 0$ e $y > 0$, temos então que $\sqrt{x} > 0$ e $\sqrt{y} > 0$, daí segue que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ daí desenvolvendo temos:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$M_A \geq M_G$$

onde se $x = y$ temos

$$\frac{x+x}{2} = \sqrt{x.x} \Rightarrow M_A = M_G$$

■

Sabendo da relação destas médias podemos provar os princípios que vão ser enunciados e demonstrados, sendo estes utilizados para solução de problemas que podem ser apresentados para alunos do ensino médio.

2.2 PRINCÍPIO DA SOMA MÍNIMA, COM PRODUTO CONSTANTE.

Teorema 2.2 *Seja P um número real positivo, então dentre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x.y = P$, a soma $x + y$ é mínima quando $x = y = \sqrt{P}$.*

Demonstração:

Seja $S = x + y$ e $P = x.y$. Pela desigualdade das médias, obtemos x e $y \in \mathbb{R}_+$, $M_A \geq M_G$ onde $M_A = M_G$ se, somente se $x = y$, daí segue:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$S \geq \sqrt{xy}$$

onde $S = \sqrt{xy}$ se, somente se $x = y$. Assim se $x = y$ temos que:

$$P = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{P} = y$$

■

2.3 PRINCÍPIO DO PRODUTO MÁXIMO COM SOMA CONSTANTE.

Teorema 2.3 *Dado o número positivo S, prove que entre todos os pares possíveis de números positivos x e y tais que $x+y=S$, o produto xy é máximo quando $x=y=\frac{1}{2}S$.*

Demonstração:

Seja $S=x+y$ e $P=x.y$. Pela desigualdade das médias, obtemos x e $y \in \mathbb{R}_+$, $M_A \geq M_G$ onde $M_A = M_G$ se, somente se $x=y$, daí segue:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{P}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq P$$

onde $P=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ se, somente se $x=y$. Assim se $x=y$ temos que:

$$S=x+y \Rightarrow S=x+x \Rightarrow S=2x \Rightarrow \frac{S}{2}=x=y$$

■

2.4 PRINCÍPIO DA PROPORÇÃO DE EXPOENTE COM SOMA CONSTANTE.

Teorema 2.4 *Se a soma de fatores positivos é constante e o produto destes fatores envolve expoentes naturais, este produto será máximo quando estes fatores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Demonstração:

Seja $x+y=c$ (constante) pretende-se demonstrar que o valor máximo do produto $P=x^n.y^m$ é atingido quando

$$\frac{x}{y}=\frac{n}{m}$$

onde m e n são números naturais ambos diferentes de zero. Sendo $P=x^n.y^m$ ou seja $P=x.x.x.\cdots x.y.y.y\cdots y$ onde este produto, tem a soma de seus termos sendo, $x+x+\ldots+y+y+\ldots+y=nx+my$, temos que pelo Teorema **??** esse produto é máximo quando suas soma tem parcelas iguais, sendo assim P é máximo quando

$$nx=my \Leftrightarrow \frac{x}{m}=\frac{y}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{n}{m}$$

■

2.5 DESIGUALDADE DE CAUCHY - SCHWARZ

Teorema 2.5 *Se $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ são números reais, então:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

com a igualdade ocorre se, somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, onde $b_i \neq 0$

Demonstração:

Para a demonstração dessa desigualdade vamos considerar a seguinte função, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde a_i e b_i são números reais

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \cdots + (a_n - b_nx)^2$$

Com relação a função f, podemos fazer algumas observações:

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$, visto que as n parcelas de f são todas maiores ou igual a zero, já que são quadrados de números reais;

(ii) Cada parcela de f é um produto notável;

(iii) f é uma função quadrática, já que é uma soma de n parcelas de quadrados.

Desenvolvendo esses produtos notáveis temos:

$$f(x) = a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2 + a_2^2 - 2a_2b_2x + b_2^2x^2 + \cdots + a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2x^2$$

Colocando x^2 e x em evidência temos

$$f(x) = (b_1^2 + \cdots + b_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)x + (a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

Logo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde,

$$a = (b_1^2 + \cdots + b_n^2); b = -2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n); c = (a_1^2 + \cdots + a_n^2).$$

Pela Equação (4) uma função quadrática é maior ou igual a zero somente se $\Delta \leqslant 0$, onde :

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac \leqslant 0 &\Rightarrow 4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4(b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow 4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant 4(b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \\ &\Rightarrow (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o caso onde $\Delta = 0$, que equivale dizer que f tem apenas um zero, ou seja, existe único x_0 tal que $f(x_0) = 0$, sendo assim:

$$(a_1 - b_1x_0)^2 + (a_2 - b_2x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_nx_0)^2 = 0$$

Onde por (i), cada parcela destas é maior ou igual a zero e para esta soma ser zero, temos que ter cada parcela destas igual a zero, sendo assim:

$$(a_1 - b_1x_0)^2 = 0; (a_2 - b_2x_0)^2 = 0; \cdots (a_n - b_nx_0)^2 = 0$$

O que é equivalente em cada linha termos:

$$x_0 = \frac{a_1}{b_1}; x_0 = \frac{a_2}{b_2}; \cdots ; x_0 = \frac{a_n}{b_n}.$$

Daí, podemos concluir que a igualdade estrita acontece em caso de:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

■

3 PROBLEMAS APLICADOS

Segue uma lista de problemas que podem ser apresentados aos alunos no ensino médio e posteriormente solucionados com matemática adequada para estes discentes, os seguintes problemas foram retirados dos livros: (PROMONET; AGUIAR, 1912a) e (PROMONET; AGUIAR, 1912b). Em cada um dos casos se necessário fazendo pequenas adaptações.

Problema 3.1 *Entre todos os retângulos de mesma área, determinar aquele que tem o perímetro mínimo.*

Problema 3.2 *Num quadrado ABCD, inscrever um retângulo EFGH, de área máxima onde,* $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ *e* $H \in DA$

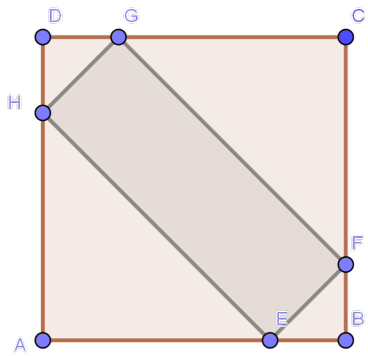


Figura 1 – Retângulo EFGH inscrito no quadrado ABCD.

Problema 3.3 *Determinar a área máxima do triângulo isósceles que se pode inscrever em uma circunferência em função do raio R do circulo.*

Problema 3.4 *Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a,b e c,como o da Figura 2 determinar sua diagonal mínima em que caso isso acontece.*

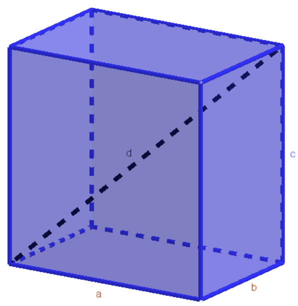


Figura 2 – Paralelepípedo de dimensões, a,b e c.

Problema 3.5 *Determine o valor da superfície total de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c, como o da Figura 2.*

Problema 3.6 *Determine o volume máximo de um paralelepípedo reto retângulo, de dimensões a, b e c.*

4 RESULTADOS

Nesta seção será apresentado uma possível solução para cada um dos problemas enunciados anteriormente, a opção de não deixar cada uma das respostas com suas devidas questões foi pelo fato de o leitor poder ver os problemas na integra e caso deseje tente responder antes de ter contato com estas.

Onde todas as respostas a seguir fazem uso apenas dos teoremas e princípios enunciados e demonstrados neste trabalho, ou seja com o recurso matemático de desigualdades.

Solução: Do problema 3.1

Seja ABCD um retângulo conforme representado na Figura 3, onde x e z são dimensões do retângulo, e o perímetro é dado por y, como na figura abaixo:

Figura 3 – Retângulo de dimensões x e z.

$$y = 2x + 2z = 2(x + z)$$

Segue do Teorema 2.2 que se o produto xz é constante então a soma $x + z$ é mínima quando $x = z$, o que implica que o retângulo $ABCD$ é, em particular, um quadrado.

Solução: do problema 3.2

O retângulo pedido é o da Figura 1 $EFGH$. Os triângulos retângulos BEF e DGH têm hipotenusas iguais e os ângulos agudos E e G iguais por terem lados paralelos e sentidos opostos. Ora, os ângulos $\angle DGH$ e $\angle BFE$ são também iguais, logo $\angle BFE = \angle BEF$, e os 2 triângulos BEF e DGH são congruentes e isósceles.
Temos pois,

$$EB = BF = DG = DH$$

Daí, segue um meio simples de inscrever um retângulo num quadrado. Se tivermos $AB = a$ e $EB = x$ teremos também

$$EF^2 = 2x^2$$

$$EF = x\sqrt{2}$$

$$EF^2 = 2(a-x)^2$$

A área do retângulo y, será

$$y = x\sqrt{2}.(a-x)\sqrt{2} = 2x(a-x)$$

O máximo de y corresponde ao do produto $x(a-x)$.
Como estes fatores têm soma constante, o produto é máximo quando

$$x = a - x$$

$$x = \frac{a}{2}$$

O retângulo de área máxima tem os vértices no ponto médio dos lados do quadrado $ABCD$, logo é um quadrado $EFGH$ inscrito em $ABCD$ e de área igual a sua metade.

Solução: do problema 3.3

Se designarmos por y a superfície do triângulo de área máxima, teremos de acordo com a Figura 4,

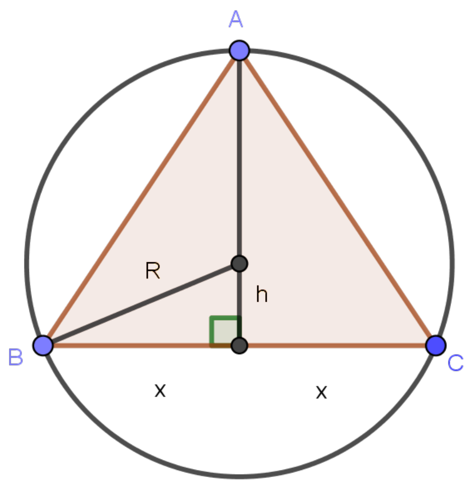


Figura 4 – Triângulo ABC isósceles inscrito em circunferência.

$$y = x(R+h) \tag{1}$$

$$x^2 = R^2 - h^2$$

$$x^2 = (R+h)(R-h) \tag{2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da Equação (1), temos

$$y^2 = x^2(R+h)^2 \tag{3}$$

Em (8), substituindo o valor de x^2, tirado de (7), temos

$$y^2 = (R+h)^3(R-h)$$

Como $(R+h)$ e $(R-h)$ tem uma soma constante, y^2 será máximo quando esses fatores forem proporcionais aos respectivos expoentes. Utilizando o resultado do Teorema 2.4.

Logo, y^2 será máximo para

$$\frac{R+h}{R-h} = \frac{3}{1}$$
$$h = \frac{1}{2}R$$

A altura H do triângulo ABC é $\frac{3R}{2}$ e de $x^2 = R^2 - h^2$ obtemos que $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ logo a base do triângulo ABC que é o segmento $BC = R\sqrt{3}$, sendo assim podemos determinar a área deste triângulo.

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{b.h}{2} \\ &= R\sqrt{3}\frac{3R}{2}\frac{1}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \end{aligned}$$

Sendo este o valor da área desejada.

Solução: do problema 3.4

Temos que a diagonal deste paralelepípedo em questão em termos de a, b e c é $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, para tal basta aplicar o Teorema de Pitágoras duas vezes. Sendo assim vamos analisar as seguintes sequências de números reais positivos, (a,b,c) e $(1,1,1)$, visto que todo paralelepípedo é múltiplo de algum deste da segunda lista. Aplicando a Desigualdade de Cauchy - Schwarz, para estas duas lista de números temos:

$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geqslant (a.1+b.1+c.1)^2$$

Onde do lado esquerdo temos o quadrado da diagonal multiplicado por 3, e do lado direito um quadrado, como segue

$$d^2.3 \geqslant (a+b+c)^2 \Rightarrow d \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$$

Sendo assim devemos usar a razão da desigualdade para verificar se d, chega a este valor, em outras palavras analisar se é válido a igualdade, onde isso deve acontecer pela sequências de números dados se:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = k$$

Ou seja,

$$d = \frac{k+k+k}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = \frac{3k}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = k\sqrt{3}$$

Que é o valor da diagonal de um cubo de lado k, sendo assim esta é mínima quando o paralelepípedo for um cubo.

Solução: do problema 3.5

Temos que o valor da superfície total desta que vamos chamar de S_t é $S_t = 2(ab+ac+bc)$. Façamos a escolha das seguintes sequências de números reais positivos (a,b,c) e (b,c,a), aplicando a Desigualdade (Cauchy - Schwarz), para estas sequências de números temos,

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^2$$

Analisando esta desigualdade do lado esquerdo temos o produto dos quadrados das diagonais e do lado direito temos metade da superfície total ao quadrado, sendo assim

$$d^2.d^2 \geqslant \left(\frac{S_t}{2}\right)^2 \Rightarrow 4d^4 \geqslant S_t^2 \Rightarrow 2d^2 \geqslant S_t$$

Temos então que a superfície total não supera o de $2d^2$, ainda temos de verificar se atinge este valor, e pela desigualdade em questão, a igualdade vale apenas se,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$$

Chamando as frações de k e multiplicando elas temos:

$$\frac{abc}{bca} = k^3 \Rightarrow 1 = k^3 \Rightarrow k = 1$$

Portanto temos que

$$a = b = c = k$$

Vamos atribuir este valor k, igual para todas as dimensões do sólido, desta forma voltando ao valor de S_t, temos

$$d = \sqrt{k^2 + k^2 + k^2} \Rightarrow d = k\sqrt{3}$$

Daí,

$$S_t = 2d^2 \Rightarrow S_t = 2.(k\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_t = 6k^2$$

Sendo assim a área S_t máxima tem este valor, que acontece quando o sólido tem todas as arestas de mesmo tamanho, ou seja é um cubo.

Solução: do problema 3.6

Novamente fazendo uso da Figura 2 , sabendo que o volume deste sólido é $v = abc$, vamos analisar as seguintes lista de números reais, (a,b,c) e (bc,ac,ab), aplicando a Desigualdade (Cauchy - Schwarz) temos,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \geqslant (abc + bac + cab)^2$$

Onde a expressão da diagonal aparece, basta ver o problema 3.4, desta forma podemos afirmar que,

$$d^2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) \geqslant (3abc)^2$$

Temos que todos estes valores são maiores que zero logo, podemos retirar a raiz quadrada de todos estes, assim ficamos com a seguinte expressão,

$$\frac{d\sqrt{(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}}{3} \geqslant v$$

Sendo assim v não supera este valor, porém ainda resta analisar o caso da igualdade estrita, ou seja, para os valores:

$$\frac{a}{bc} = \frac{b}{ac} = \frac{c}{ab} = k$$

Onde relacionando estas frações chegaremos em,

$$a = b = c = k$$

Desta forma substituindo a, b e c por k o volume fica sendo,

$$v = \frac{d\sqrt{3k^4}}{3} \Rightarrow v = \frac{dk^2\sqrt{3}}{3} \tag{4}$$

Analisando o valor de d, como $a = b = c = k \Rightarrow d = k\sqrt{3}$, substituindo este valor em (11) obtemos,

$$v = k\sqrt{3}.\frac{k^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow v = k^3$$

Sendo este o volume de um cubo de aresta k.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredita-se que o trabalho cumpre com os objetivos propostos inicialmente, que é de: chamar a atenção docente para a possibilidade de abordar conteúdos que parecem ser somente de ensino superior, como exemplo aqui o de máximos e mínimos em problemas de geometria plana e espacial, listar problemas deste tipo que podem ser apresentados no ensino médio e por fim solucionar estes somente com matemática comum deste currículo, e mesmo nos assuntos que teoricamente não seriam é feito com assuntos que estão no currículo deste nível de ensino, como a desigualdade de *Cauchy - Schwarz* que tem um tratamento de sua demonstração somente com função polinomial do segundo grau, ou seja com algo comum ao aluno e professor da educação básica de series finais.

Espera-se que ao ter contato com o mesmo,que professores vejam como motivação para fazer o mesmo com outros assuntos ou melhoria deste que aqui esta apresentado, que para os alunos seja uma possibilidade de ver que não existe uma única forma de resolver problemas matemáticos.

E como propostas futuras ficam as possibilidades de melhoria da analise sobre o conteúdo de máximos e mínimos por facilitação das soluções apresentadas, acrescento de novas ou a possibilidade de fazer o mesmo com outros tópicos de matemática que são tidos como aplicáveis somente no ensino superior.

O trabalho pode ser visto na integra em (ARAUJO JUNIOR, F.P.S, 2018), inclusive com soluções para estes problemas com o uso do software livre Geogebra.

REFERÊNCIAS

ARAUJO JUNIOR, F.P.S, **Maximos e minimos aplicados em geometria**. Dissertacao (Mestrado profissional em matematica) - *Universidade Estadual do Piaui-UESPI*, Teresina, 2018.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. **Matematica Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 192 p.

OBMEP. **obmep**. 2018. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 197 p.

PROMONET, E.; AGUIAR, O. **Algebra curso superior: Parte do mestre Vol II**. 1. ed. São Paulo: F.T.D, 1912. 315 p.

PROMONET, E.; AGUIAR, O. **Algebra curso superior: Parte do mestre Vol III**. 1. ed. São Paulo: F.T.D, 1912. 314 p.

roda de matematica. **BLOG RODA DE MATEMATICA, Os Circulos de Matematica**. 2018. Disponivel em: <http://www.rodadematematica.com.br/blog/2016/6/19/os-circulos-de-matematica>. Acesso em: 14 abril 2018.

Capítulo 3

A UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO GEOGEBRA PARA *SMARTPHONE* COMO RECURSO DIDÁTICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Elanny Roma Pereira da Silva[1]
Arlane Manoel Silva Vieira [2]

Resumo: Diante de uma sociedade que está em constantes mudanças devido aos avanços tecnológicos, é importante investigar, discutir ideias e estabelecer estratégias que reflitam em melhorias futuras na educação com o intuito de utilizá-los como recurso didático, principalmente com relação às mídias digitais móveis que já ocupam os espaços escolares. A princípio é realizado um levantamento histórico do desenvolvimento de algumas tecnologias e suas influências no meio social, e de como essas tecnologias evoluíram dentro das escolas públicas. Em seguida desenvolve-se um aprofundamento no conceito de *M-learning*, que refere-se ao uso de dispositivos móveis para a aprendizagem, e um breve tutorial do aplicativo *Geogebra Graphing Calculator* com versão para smartphones. Por fim, é detalhado a metodologia do trabalho e os resultados obtidos através de uma pesquisa realizada com dois focos: averiguar o perfil dos professores quanto ao uso do computador e de smartphones; a perspectiva dos alunos de uma escola pública que realizaram atividades com o app Geogebra. Os resultados mostram que os aparelhos *smartphones* têm conquistado espaço dentro das escolas e que podem ser utizados como recurso para aprendizagem, desde que acompanhado pelo docente baseado em um planejamento estratégico.

Palavras-chave: Aplicativos Matemáticos, *M-learning*, *Geogebra Graphing Calculator*, Tecnologias Educacionais.

1 INTRODUÇÃO

Em um mundo tão complexo, é preciso que se recorra a fontes de informação e conhecimento sempre mais abundantes, diversas e especializadas. E nesse cenário em constante transformação, eis que se tem uma sociedade cada vez mais consubstanciada em aspectos voltados ao uso das tecnologias, ao processo de globalização, bem como, aos novos hábitos trazidos por esses fatores. Nesta acepção, é necessário que se faça uma análise no que tange a abordar as mudanças no âmbito social e estudantil geradas por tais recursos, para que desta forma, se perceba o grau de evolução tecnológica da escola, além de perceber também, como os professores têm se adaptado a tais mudanças que os afetam diretamente, visto que eles são uma peça fundamental no processo de ensino-aprendizagem. Nestas circunstâncias, investigar esse histórico, discutir ideias e estabelecer estratégias é um passo fundamental dado no presente, por meio do qual se poderá refletir sobre as melhorias futuras para a educação.

Para tanto, o que se pretende mostrar é que a motivação inicial para a realização desta pesquisa surgiu das observações feitas no decorrer dos anos, no que tange ao

[1] UFMA, nanny_rominha@hotmail.com
[2] UFMA, arlane@ufma.br

desenvolvimento rápido da tecnologia, aumento do acesso das pessoas a computadores, *tablets*, celulares, *smartphones* e internet.

Com a pesquisa, objetiva-se fazer um levantamento do perfil do professor de matemática quanto a utilização das mídias digitais móveis, comparando-a com o uso dos computadores. Visa-se ainda, analisar o perfil dos alunos quanto a utilização dos *smartphones* como ferramenta de estudos e recurso didático em sala de aula, analisando a eficiência do aprendizado. E posteriormente, apresentar os resultados para os professores participantes da pesquisa em forma de palestra.

A pesquisa tem grande relevância social, visto que o aluno atual é digital em muitos aspectos de sua vida pessoal, como redes sociais, jogos. No entanto, muitos não sabem utilizar esse recurso para estudar e aprender. A pesquisa também tem significativa relevância profissional, pois o perfil do professor que a sociedade atual procura é aquele que é flexível às mudanças, sejam elas tecnológicas, culturais; que seja criativo, tendo uma visão crítica e profissional.

2 DESENVOLVIMENTO

Para o referencial teórico, buscou-se autores que explanavam sobre principais tecnologias desenvolvidas como: luz elétrica, fotografia, filme, celular, televisão, computador e a internet e que convergem em um pequeno aparelho chamado smartphone.

Também foi realizado o desenvolvimento histórico da tecnologia dentro da escola baseado em vários autores e documentos oficiais como Unesco (2014), Nascimento (2007), Oliveira (2006) e Brasil (2008).

Segundo Associação Brasileira de Tecnologia, a ABT (1982 apud OLIVEIRA, 2006, p. 9), temos que a tecnologia educacional passou por dois momentos diferentes. O primeiro momento foi acreditar que os equipamentos tecnológicos eram suficientes para promover melhorias na educação, acreditando que essa revolução seria a solução para os problemas educacionais. Sobre essas conclusões Mazzi (1981 apud OLIVEIRA, 2006, p. 10) enfatiza que "A ilusão estaria no acreditar que, mudando equipamentos e métodos, todo o resto poderia ficar como está". Já o segundo momento, focam esforços em planejamento de atividades, métodos e princípios para facilitar a instrução.

Uma das competências específicas de Matemática que o aluno deve desenvolver no ensino Fundamental, segundo o documento oficial (BNCC), é:"

> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados."(BRASIL, 2018, p. 267)

Vê-se, pois, que já há documentos oficiais que dispõem que o aluno precisa está inteirado das tecnologias, para desenvolver habilidades, resolver problemas, e utilizá-las no seu dia-a-dia.

O Plano Nacional da Educação (PNE), que tem como objetivo reger o Sistema Educacional Nacional, estabelece algumas metas e estratégias para serem implementadas de 2014 à 2024, que incluem as tecnologias na Educação Básica nos níveis de ensino. Essas metas visam reformas nos currículos de formação de professores para que as crianças sejam alfabetizadas com o uso das tecnologias digitais. Visam ainda ampliar o conhecimento por meio de plataformas eletrônicas que ofereçam cursos e material de apoio para as aulas em formatos digitas (BRASIL, 2014).

No referencial teórico dedica-se alguns parágrafos para uma breve descrição do dispositivo móvel smartphone baseada em Lemos (2007), que o conceitua como:

> O que chamamos de telefone celular é um Dispositivo (um artefato, uma tecnologia de comunicação); Híbrido, já que congrega funções de telefone, computador, máquina fotográfica, câmera de vídeo, processador de texto, GPS, entre outras; Móvel, isto é, portátil e conectado em mobilidade funcionando por redes sem fio digitais, ou seja, de Conexão; e Multirredes, já que pode empregar diversas redes, como: *Bluetooth* e infravermelho, para conexões de curto alcance entre outros dispositivos; celular, para as diversas possibilidades de troca de informações; internet (*Wi-Fi* ou *Wi-Max*) e redes de satélites para uso como dispositivo GPS. (LEMOS, 2007, p. 2)

O referencial teórico, também fudamentado em Saccol, Schlemmer e Barbosa (2011, p. 2), continua explanando como os recursos do dispositivo móvel podem ser utilizado na educação, processo denominado *M-learning*. O autor enfatiza que há uma fragilidade a ser contornada nesse meio de ensino que é a questão didático-pedagógica, visto que o essencial não é somente o acesso a tecnologia, mas saber usá-la em paralelo aos conteúdos de forma a promover a aprendizagem.

De acordo com Tarouco et al. (2004), algumas metas precisam ser estabelecidas e, ao usar qualquer tecnologia, o docente deve estar preparado para atender a essas metas. Uma delas é a efetividade que remete à melhor forma de aprendizagem, em que o aluno internalize e generalize seus conhecimentos em outros contextos. Outra meta é a eficiência que diz respeito ao mais rápido tempo em que esses conhecimentos são absorvidos. E outra meta é a atratividade que refere-se ao período e a atenção devotada pelo discente pela atividade.

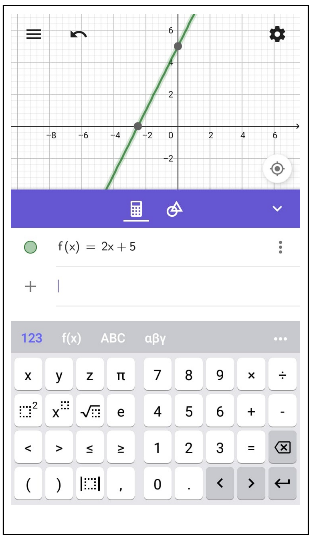
Segundo a Unesco (2014), alguns benefícios podem ser alcançados com o uso da aprendizagem móvel, dentre eles:

- Expandir o alcance e a equidade da educação;
- Facilitar a aprendizagem individualizada;
- Oferecer retorno e avaliação imediatos;
- Permitir a aprendizagem a qualquer hora e em qualquer lugar;

- Assegurar o uso produtivo do tempo em sala de aula;
- Apoiar a aprendizagem fora da sala de aula;
- Criar uma ponte entre a aprendizagem formal e a não formal.

Dedicou-se uma seção para um tutorial do aplicativo Geogebra em versão para smartphone (Figura 1), identificando seus campos de entrada, algébrico e geométrico e a utilização dos principais recursos para a realização da atividade proposta pela pesquisa.

Figura 1 – Tela Inicial



Fonte: Acervo pessoal.

Para encerrar, Resende (2002), Almeida (2007) e outros são citados para mostrar a relação do professor de Matemática com a tecnologia, seus desafios e as mudanças de práticas de ensino tradicionais para práticas construtivistas.

Segundo Gaudio (2016, p. 7):

> "aos docentes cabe uma tarefa árdua mais[*sic*] necessária: sair da "zona de conforto" e adentrar no mundo escolar experimental. O professor não sabe "tudo" e precisa confrontar-se com o novo. A tecnologia deve ser incorporada no ambiente escolar com naturalidade"(GAUDIO, 2016, p. 7).

Para alcançar esse objetivo é necessário que o professor se utilize de outros recursos, além da aula explanativa e dialogada, dentre os quais destacamos os aplicativos para *smartphones* específicos para o ensino da matemática que possuem este potencial, gerando gráficos, figuras geométricas e fórmulas que possibilitem a visualização de ideias abstratas para os alunos, além de possuírem múltiplas formas de serem explorados a favor do ensino, tais recursos possibilitam o desenvolvimento de novas soluções para um mesmo problema.

A corrente de ensino construtivista, defendida por Piaget, Ausubel e outros, está centrada no aluno, focando na descoberta de conteúdos, resolução de problemas, de forma que a aprendizagem seja significativa para ele. Essa perspectiva de aprendizagem é basilar na utilização das novas tecnologias, visto que nela o professor não é a única fonte de informação, pois existem programas educativos, internet com acesso a pesquisas, redes sociais para comunicação mais rápida, entre outras vantagens. De acordo com Resende (2002, p. 73), essas mudanças fazem com que o professor mude de postura como único possuidor do conhecimento no contexto escolar, facilitando assim uma relação mais equilibrada e harmoniosa com o aluno.

Em nossa realidade, se não houver mudanças nas práticas pedagógicas seria, como expressa Resende (2002, pag. 71), apenas como vestir o velho com roupas novas, práticas essas que não incorporam nada de novo no que se refere à concepção do processo de ensino aprendizagem construtivista.

Portanto, o uso das novas tecnologias como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem não resultará uma aula interessante sem que o professor possua novas práticas pedagógicas em que inclua a construção do conhecimento pelo próprio aluno. Isso significa dizer que o professor deve ter uma visão construtivista do processo de ensino e aprendizagem.

2.1 MÉTODO

A pesquisa pode ser classificada quanto a sua abordagem como quali-quantitativa, pois mesclando as duas formas de levantamento de dados pode gerar informações mais completas e concisas. Também pode ser classificada quando aos objetivos como descritiva, onde é possível ter uma visão bem ampla do perfil dos professores de matemática, percebendo assim, informações que vão desde sua formação acadêmica, à descrição de suas práticas pedagógicas, além da visão que expressam em relação à utilização dos recursos tecnológicos.

O procedimento foi realizado em duas etapas para levantamento de dados por meio de questionário em que os sujeitos da pesquisa eram alunos do 9º ano da Escola Municipal em São José de Ribamar e também professores da rede pública de ensino.

2.1.1 Alunos

Inicialmente enviou-se aos pais um termo de consentimento, através do qual solicitou-se a permissão deles para colher informações relacionadas aos alunos, visto que todos são menores de idade. Em seguida, realizou-se um questionário com 13 alunos para identificar o perfil deles quanto ao uso das tecnologias em seu dia-a-dia. Aos 5 alunos que tinham o aparelho *smartphone* foi requisidado que instalassem o aplicativo Geogebra previamente.

A atividade foi realizada em três encontros, onde no primeiro dia foi apresentado o aplicativo, as ferramentas e algumas simulações com exemplos de pontos, funções, figuras geométricas, como manipular as propriedades dos objetos na tela de visualização, para que pudessem se familiarizar com o recurso. No segundo encontro foram executadas duas atividades em que os alunos deveriam aplicar os passos orientados para gerar gráficos e por meio do recurso controle deslizante observar, compreender e redigir suas conclusões quanto às funções polinomiais do 1º grau[3] e do 2º grau[4], seus gráficos e seus coeficientes. Neste encontro, apenas 5 alunos estavam de posse do dispositivo, sendo que foram formadas as equipes e o trabalho pôde ser acompanhado por todos por meio do *note-book* e *data-show*. E por fim, no terceiro encontro foram generalizados os conceitos sobre funções do 1º e 2º graus, traduzindo os para linguagem matemática.

Para concluir foi realizado outro questionário em que os alunos expressaram suas conclusões e impressões sobre o uso do aplicativo.

2.2 PROFESSORES

Para os professores foi realizado um questionário online editado nos Formulários do *Google*, que segundo o próprio site permite "criar testes e pesquisas on-line e enviá-los para outras pessoas". O questionário foi enviado para 60 professores de matemática da rede pública de ensino, onde 35 se voluntariaram a contribuir com a pesquisa.

2.3 ATIVIDADES PROPOSTAS COM A UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO

A atividade sobre função polinomial do 1º grau tinha como objetivo:

- Observar o comportamento do gráfico de uma função do 1º grau quando alterados os seus coeficientes;
- Construir o gráfico de uma função do 1º grau.

Os conhecimentos que podem ser explorados com a atividade:

- Construção de gráficos;
- Inclinação da reta;
- Translação da reta;
- Classificação da função crescente e decrescente.

A atividade sobre função polinomial do 2º grau tinha como objetivo:

[3] **Função 1º Grau** - Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais **a** e **b** tal que f(x) = ax+b, para todo $x \in \mathbb{R}$ (DANTE, 2010, p. 112).

[4] **Função 2º Grau** - Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *função quadrática* quando existem números reais **a**, **b**, **c**, com $a \neq 0$, tal que f(x)= ax^2 + bx + c para todo $x \in \mathbb{R}$ (DANTE, 2010, p. 150).

- Observar o comportamento do gráfico de uma função do 2º grau quando alterados os seus coeficientes;
- Construir o gráfico de uma função do 2º grau.

Os conhecimentos que podem ser explorados com a atividade:

- Construção de gráficos;
- Estudo do comportamento do vértice de uma parábola;
- Concavidade da parábola;
- Estudo de discriminante da parábola.

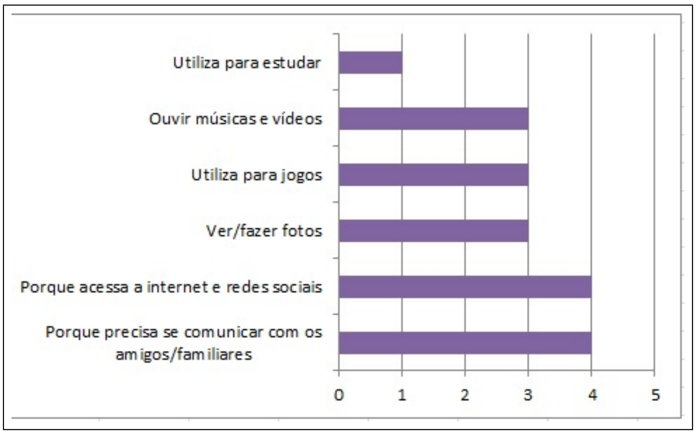
Durante a realização da atividade o aluno deveria construir gráficos da função do 1º e do 2º graus utilizando controles deslizantes sobre os coeficientes de a, b e c. Então descrever o comportamento da parábola em cada questão.

3 RESULTADOS

3.1 QUESTIONÁRIO SOBRE O PERFIL DOS ALUNOS

A pesquisa foi realizada com 13 alunos, na faixa etária de 13 a 17 anos de idade, onde 5 deles possuem celular *smartphone*. Para o tamanho da turma, essa quantidade de aparelhos é suficiente para realizar exercícios em equipes pequenas. Segundo a pesquisa, o aplicativo mais utilizado pelos 5 participantes é o *Whatsapp*, seguido do *Facebook* citado por 3 discentes, e mais o *Google* e o *YouTube* citado por 2 alunos. Mesmo poucos alunos possuindo o dispositivo, já estão conectados com a rede mundial de computadores e, em vez de estarem utilizando apenas para entretenimento, poderiam utilizá-lo como um instrumento de aprendizagem.

Figura 2 – Gráfico relacionando a utilidade do *smartphone* por parte dos alunos



Fonte: Acervo pessoal.

Quando perguntados para quais fins utilizam os *smartphones*, os dados foram tabulados na Figura 2. Na questão poderiam escolher mais de uma opção.

De acordo com o gráfico, apenas 1 discente utiliza o *smartphone* com o propósito de estudar. E que a principal função do dispositivo é entretenimento e comunicar com familiares.

3.2 QUESTIONÁRIO PÓS REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2^O GRAU

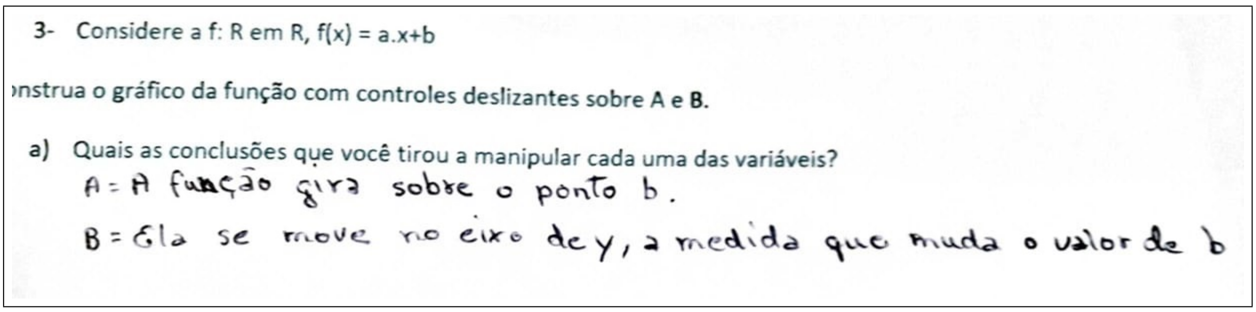
A compreensão do assunto foi percebida nos relatórios de 90% dos alunos que participaram, mesmo expressando seu aprendizado com palavras diferentes e simples, que foram reconstruídas na linguagem matemática sem muitas dificuldades, visto que o aluno já compreendera o comportamento de cada coeficiente da função.

Iniciou-se realizando uma revisão das funções do 1º e 2º graus e construção de alguns gráficos manualmente. Em seguida, após as construções dos alunos, solicitou-se que eles gerassem no aplicativo um controle deslizante nomeado como **a**, criassem uma função $y = \mathbf{a}.x + 2$ e descrevessem o que observaram no comportamento da função.

Em seguida, com a utilização do aplicativo, solicitou-se a criação de um controle deslizante sobre **b**, e inserirem a função y=2.x+**b**. Com o controle deslizante variando entre valores de -5 à 5, lentamente, tanto pelos celulares quanto pelo *data-show* e então extraíssem suas conclusões sobre o comportamento do gráfico.

Por fim, foi gerado um gráfico com 2 controles deslizantes sobre **a** e **b**, para que obtivessem suas conclusões do gráfico dinamicamente. As conclusões foram sintetizadas por uma aluna na figura 3.

Figura 3 – Resposta extraída do questionário de um aluno sobre os coeficientes da função do 1º grau utilizando o aplicativo


3- Considere a f: R em R, f(x) = a.x+b

›nstrua o gráfico da função com controles deslizantes sobre A e B.

a) Quais as conclusões que você tirou a manipular cada uma das variáveis?

A = A função gira sobre o ponto b.

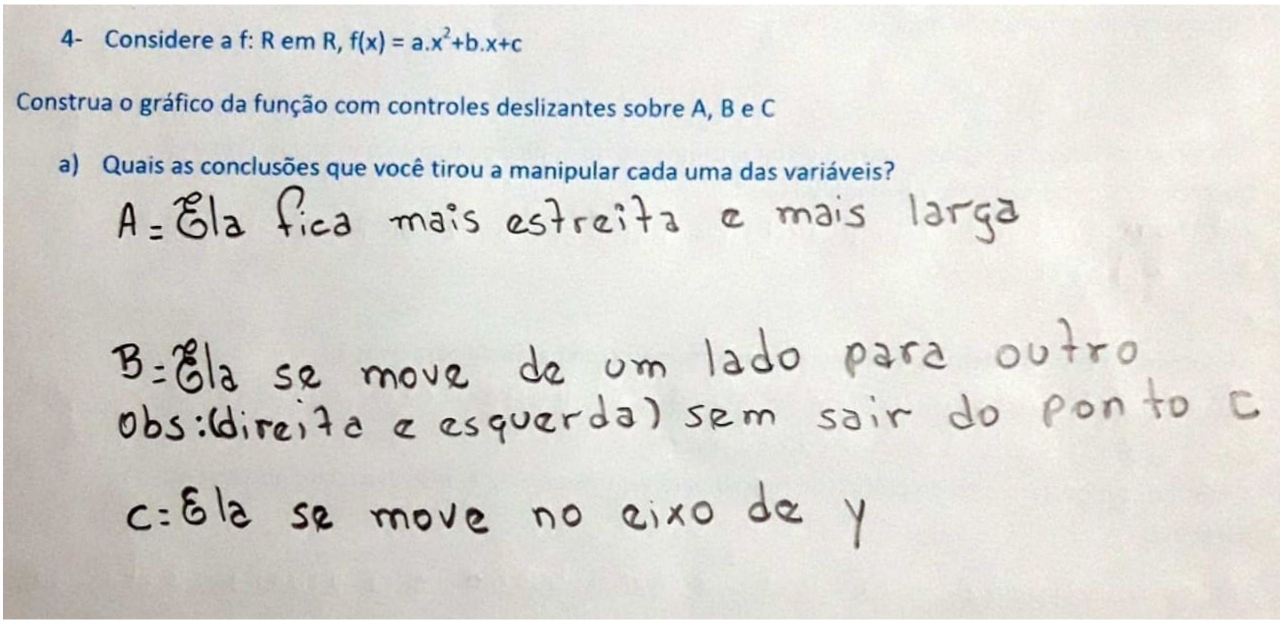
B = Ela se move no eixo de y, a medida que muda o valor de b

Fonte: Acervo pessoal.

Atividade semelhante foi realizada com a função do 2º grau, em que foram criados controles deslizantes sobre os coeficientes **a, b** e **c** para dinamizar o comportamento do gráfico, e as conclusões extraídas por um aluno são demostrados na figura 4.

No terceiro encontro, o tema função do 1º e 2º graus foi dialogado com os alunos, baseado no livro de Dante (2010).

Figura 4 – Resposta extraída do questionário de um aluno sobre os coeficientes da função do 2º grau


4- Considere a f: R em R, $f(x) = a.x^2+b.x+c$

Construa o gráfico da função com controles deslizantes sobre A, B e C

a) Quais as conclusões que você tirou a manipular cada uma das variáveis?

A= Ela fica mais estreita e mais larga

B= Ela se move de um lado para outro
obs:(direita e esquerda) sem sair do ponto C

c: Ela se move no eixo de y

Fonte: Acervo pessoal.

Na função do 1º Grau, o coeficiente **a** está ligado à inclinação da reta. Quanto mais próximo de 0, o gráfico se torna mais horizontal, quanto mais se distancia de 0, tanto para valores positivos ou negativos, o gráfico se torna mais vertical. Segundo o autor, o coeficiente **a** é chamado taxa de crescimento, se "**f** é crescente a taxa de crescimento é positiva, e decrescente se a taxa de crescimento é negativa"(DANTE, 2010, p. 121).

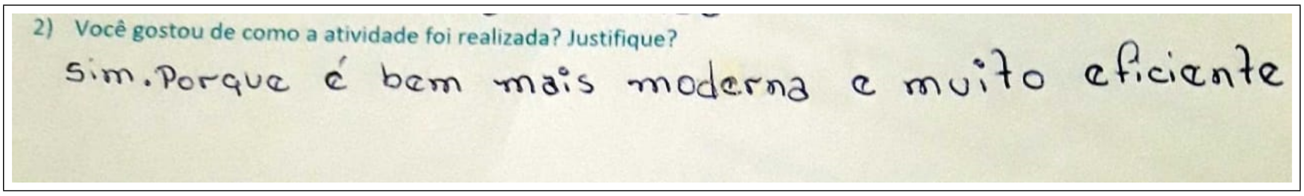
Dante (2010, p. 170) descreve em seu livro que o coefiente **a** na função do 2º grau é responsável pela abertura e concavidade da parábola, "Quanto maior o valor absoluto de **a**, menor será a abertura da parábola (parábola mais 'fechada')". Já o parâmento **b** segundo o mesmo autor, "Indica se a parábola intersecta o eixo **y** no ramo crescente ou decrescente da parábola". E o parâmetro **c** "indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo y".

Após a realização da atividade, 11 alunos responderam um questionário expondo suas conclusões sobre a utilização do aplicativo. Todos os participantes foram unânimes em responder que gostaram da atividade realizada, e citaram várias justificativas como entender mais rápido como as funções variam, toda a turma participou, o recurso é moderno, muito eficiente e ajudou a despertar a curiosidade, como mostra a figura 5.

A interação entre os alunos, interesse em responder, foram motivados pelo recurso utilizado, e a facilidade em visualizar e compreender o conteúdo.

De todos os participantes, apenas 1 já havia utilizado o celular para estudar Matemática, os demais justificaram que não sabiam e nunca tinham sido orientados para utilizar aplicativos educativos, outros devido ao fato de não terem o dispositivo móvel. Percebe-se que, com a orientação necessária e planejamento estratégico, é possível obter

Figura 5 – Resposta de um aluno sobre a atividade realizada com o *smartphone*


2) Você gostou de como a atividade foi realizada? Justifique?

sim. Porque é bem mais moderna e muito eficiente

Fonte: Acervo pessoal.

resultados positivos em um tempo bem menor se esses instrumentos forem utilizados em muitos outros conteúdos abstratos como geometria espacial, números inteiros, frações, entre outros.

Ficam evidentes vários pontos importantes:

- A capacidade do dispositivo de atrair a atenção do aluno, pois a turma estava envolvida, se esforçando para responder o questionário.
- A rapidez com que esse assunto foi tratado, pois se não tivesse algum recurso tecnológico para explicar posições do gráfico de qualquer função, abertura, concavidade, crescimento, decrescimento, seria necessário desenhar vários gráficos, implicando em desgaste de tempo e dos alunos.
- A absorção do assunto ministrado, pois percebeu-se que, mesmo os alunos com mais dificuldades, conseguiram atingir os objetivos.

Daí, despreende-se que tal experiência foi muito proveitosa tanto para o aluno quanto para o professor.

3.3 PERFIL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A primeira seção de perguntas são relacionadas ao *M-learning*, que é a utilização de dispositivos móveis como *tablets* ou *smartphones*. Constatou-se que todos professores entrevistados possuem dispositivos móveis e que têm acesso a internet. Somente 2,9% informou usar internet de 3 a 4 vezes por semana, os demais acessam todos os dias. Esses dados comprovam o quão difundido está o uso dos dispositivos móveis entre os professores e a facilidade para o acesso à internet, tornando essas ferramentas uma aliada a ser usada pelos professores para preparar suas aulas, buscar novas ideias e estratégias de ensino para a disciplina.

Na pergunta 2 foi questionado se o professor utiliza recursos do dispositivo móvel para preparar suas aulas de matemática, constatou-se que 14,3% não utilizam, 34,3% utilizam às vezes, 48,6% utilizam e somente 2,9% utilizam com frequência, de forma que a soma dos professores que utilizam e os que utilizam com frequência somam 51,5%. Portanto, percebe-se que o dispositivo já é um objeto presente no cotidiano dos professores, e que o percentual de utilidade para fins de planejamento educativo já é acentuado. Isso é motivado por ser uma modalidade nova na realidade escolar, mas muitos professores já recorrem ao dispositivo móvel em pesquisas, dúvida ou busca de estratégia para suprir suas necessidades.

Dentre todos os recursos citados, fica evidente o uso da calculadora, onde 10 utilizam e outros 10 não utilizam. Este fato pode ser explicado por ser uma tecnologia antiga, utilizada na formação de muitos professores, que sentem mais segurança em utilizá-la; mas ainda tem aqueles professores que não permitem nem o uso da calculadora. Em seguida, vem a utilização dos aplicativos matemáticos onde 8 professores utilizam com frequência, sendo justificados na questão 5 como aplicativos de jogos, de estudos, de fórmulas, quebra-cabeça, dependendo do assunto que esteja sendo trabalhado. Nenhum dos pesquisados utiliza áudios, mas 3 deles deram preferência à vídeos, visto que é possível abstrair mais conhecimentos enquanto o aluno ouve e visualiza gráficos, formas em 2D ou 3D, diagramas, entre outros. As pesquisas em sites foram pouco escolhidas pelos professores, este baixo número se explica pelo fato de muitos alunos não possuírem acesso à internet em casa ou na escola. E apenas 3 professores utilizam as redes sociais como recurso em suas aulas, como uma forma de comunicação com seus alunos, extensão da sala de aula, tirar dúvidas. No grupo de questões outros, 1 professor acrescentou utilizar o *datashow* em sala de aula. Dentre os professores que não utilizam nenhum recurso tecnológico, 6 deles expuseram suas justificativas para tal na questão 4.2, como: não ter muito preparo, nem todos os alunos possuem dispositivo móvel e acesso à internet, preferem usar o livro e ainda há aqueles que mesmo tendo acesso na escola, alegam que o sinal é fraco e não é liberado para o uso dos alunos.

Na questão 5, pergunta-se se os professores conhecem aplicativos matemáticos específicos para o ensino, o formato da resposta é subjetiva, mas foi possível classificar os resultados obtidos. Sendo que 12 professores relatam conhecer o geogebra, 3 citaram geradores de gráficos mas sem especificar qual seria, 1 professor citou o *winplot*, 3 professores citaram equação do 2º grau, 1 professor citou o photo math, 2 citaram aplicativos de frações, 2 professores citaram aplicativos de tabuada, 1 professor citou tangran e 1 professor citou aplicativo *youtube*. Conclui-se que a maior busca é por aplicativos gráficos visto a dificuldade da compreensão dos alunos em associar a álgebra e a geometria envolvida nos gráficos, sendo um assunto novo no ensino fundamental maior e ainda estará presente no decorrer da vida estudantil, principalmente para aqueles que escolherem profissões que envolvem disciplinas exatas, sendo que, se não compreenderem os elementos, eixos, coeficientes nos gráficos, dificilmente terão êxito quando o nível do conteúdo aumentar.

Concluída a seção de questões sobre dispositivos móveis, abre-se a seção referente ao *E-learning* que consiste na utilização do computador, *notebook* pelos professores no ensino. Nas duas seções pretende-se comparar os hábitos dos profissionais da educação quanto a utilização do *M-learning* e *E-learning*.

Esta seção averiguou que somente 8,6% dos professores não possuem computador em casa, mas todos os voluntários da pesquisa possuem habilidades com a informática, embora que 57,1% consideram ser pouco esse conhecimento. Esse resultado pode ser influenciado pela questão 3, em que 65,7% dos professores utilizaram, às vezes, informática durante sua formação superior, e somente 8,6% nunca utilizaram. Pressupõe-se que o pouco conhecimento que possuem não foi adquirido por meio da formação superior, mas através de cursos básicos, prática ou curiosidade.

Mesmo após a formação superior, menos de um terço dos professores participaram de capacitações com mais frequência, e 37,1% participaram raramente.

Quanto ao acesso a internet, constata-se que todos estão conectados à rede mundial pelo *smartphone*, mas nota-se uma leve diminuição no percentual dos que acessam pelo computador, como também a frequência dos acessos. O percentual dos professores que acessam a internet pelo computador todos os dias é de 78,1% bem menor que os acesso pelos dispositivos móveis registrado em 97,1%. Comparando com os resultados obtidos na seção anterior, comprova-se que a maioria dos questionados já acessam suas redes sociais, emails e pesquisas através dos dispositivos móveis devido à praticidade e mobilidade.

Para finalizar esta seção, perguntou-se aos professores se utilizam o computador para preparar e para ministrar aulas. Comparando os dois gráficos, fica evidente que muitos professores utilizam o computador para preparar aulas, atividades, avaliações, pesquisas, mas apenas 31,4% utilizam para ministrar aula. 34,3% informaram não fazer uso justificando na pergunta 7.2 sobre a falta de preparo, falta de habilidades com a tecnologia, falta de recursos, internet e estrutura na escola, além da violência presente na realidade de algumas escolas, onde o professor têm receio de expor seus materiais próprios em sala de aula. Fica claro que os recursos mais utilizados pelos professores são editores de texto para redigir avaliações, trabalhos, seguido de pesquisas em sites para preparar suas aulas e atividades.

Ao ser solicitado para listarem pontos positivos considerando a realidade da escola, o formato da resposta era livre, mas é possível realizar uma tabulação das principais respostas, onde 4 professores responderam que muitos alunos já possuem o dispositivo móvel e usam para outros fins, consideram que pode ser usado a favor da educação; 10 professores relacionaram a facilidade e praticidade somados ao processo de ensino aprendizagem; 5 professores citaram que as aulas ficam mais dinâmicas atraíndo a atenção dos alunos; 1 professor citou a inclusão digital, visto que a sociedade, profissões, entretenimento estão cada vez mais digitais; 1 professor citou que a estratégia consegue suprir a falta de recursos na escola, visto que os *smartphones* são dos próprios alunos, eles terão o cuidado e a manutenção dos aparelhos e muitos aplicativos são off-lines.

Quando listados os pontos negativos considerando a realidade das escolas de cada professor, os dados foram tabulados selecionando respostas similares: 2 professores assinalaram a falta de estrutura da escola; 14 professores relataram o uso indevido, distrações em redes sociais, mas esta situação pode ser resolvida observando o relato de outro professor que disse "Não vejo pontos negativos, visto que o aluno tem um direcionamento, que é a orientação do professor.", portanto, havendo planejamento no desenvolvimento da atividade, é possível envolver os alunos do início ao fim; 1 professor citou a acomodação para cálculo; 1 professor apresentou a violência, assaltos realizados por vândalos que cercam a escola. Uma das maiores dificuldades relatadas pelos professores é a deficiência na oferta de cursos de capacitação para o docente.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar as discussões dos dados, constatou-se que os professores de Matemática que participaram da pesquisa não têm acompanhado o desenvolvimento tecnológico voltado para o ensino e aprendizagem dos alunos, ou seja, a maioria dos sujeitos da pesquisa, utiliza o *smartphone* para interesse próprio de comunicação e busca de informações.

Verifica-se que alguns educadores têm medo do novo, continuam a ter certa resistência quanto à utilização de recursos tecnológicos em seus ensinamentos, pois muitos não possuem conhecimento técnico e pedagógico para esses métodos de ensino, e ainda pouco comprometimento com o ensino por falta de incentivos, motivação e preparo.

É preciso que haja compromisso dos professores com a educação dos alunos e busca de melhores instrumentos e procedimentos de ensino que facilitem a compreensão do aluno, levando-o a está preparado para enfrentar os desafios da sociedade atual. Destaca-se que a própria utilização da tecnologia e da internet, assim como, a interação com outros colegas e profissionais podem ajudar o professor em sua formação, mudando suas perspectivas em relação as novas gerações de educandos.

Para isso, é necessário que a escola em parceria como a comunidade exija seus direitos frente ao governo, solicitando capacitações para os professores e melhores condições de ensino para o trabalho com as novas tecnologias educacionais de forma construtivista mediando assim o aprendizado dos alunos.

Sabe-se que essa adaptação não será fácil, mas com os resultados obtidos, pretende-se ampliar estas discursões entre os professores participantes da pesquisa de modo a orientá-los ao uso das tecnologias móveis em sala de aula, de forma planejada oferecendo a eles sugestões de sequências didáticas com o aplicativo Geogebra e outros aplicativos.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para visualizar o perfil do professor de Matemática e suas práticas e compreender o que precisa ser mudado para que se tenha uma educação de qualidade mediante à utilização dos recursos tecnológicos na sala de aula.

Por fim, que se evidencie que este trabalho faz parte de uma discursão recente na comunidade escolar trabalhada, também de forma geral na sociedade, logo, evidentemente, não tem a pretensão de esgotar o assunto, mas procurar entender e compreender melhor o mundo cada vez mais informatizado o qual abre suas portas e põe-nos diante de uma situação fática onde o professor tem que está preparado para atravessar e ser o mediador do aluno na geração de um conhecimento matemático utilizando-se de várias possibilidades tecnológicas.

Tem que se pensar ainda que o professor é um mediador entre o aluno e as inovações, nesse caso, como se fala em tecnologia ele deve nortear seus alunos no sentido de que o saber não se limita ao livro, mas toda e qualquer forma de aprender que facilite, convença e faça com que todos saiam ganhando, o aluno que adquira o conhecimento, o professor que serve como canal e a sociedade que está gerando cidadãos para serem verdadeiros profissionais os quais não serão intimidados pelas constantes e indiscutíveis inovações, sociais e tecnológicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABT. "tecnologia educacional: Referencial teórico". *Tecnologia Educacional*. Rio de Janeiro, vol. 11, n. 47, p. 16–17, 1982.

ALMEIDA, G. P. de. **Transposição didática: por onde começar?** 1. ed. São Paulo: Cortez, 2007. 72 p.

BRASIL. **Um Computador por Aluno: a experiência brasileira**. Brasília: Coordenação de publicações, 2008. 193 p.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação 2014-2024 [recurso eletrônico]**. Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2014. 86 p.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasil: Ministério da Educação, 2018. 472 p.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010. 504 p.

GAUDIO, E. V. Brinquedo novo de joão: A calculadora e o ensino da matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAçãO MATEMáTICA, XII., 2016, São Paulo. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

LEMOS, A. Comunicação e práticas sociais no espaço urbano: as características dos dispositivos híbridos móveis de conexão multirredes (dhmcm). **Revista Comunicação, Mídia e Consumo**, São Paulo, Volume, n. 10, p. 23–40, 2007.

MAZZI, A. P. R. Tecnologia educacional: Pressupostos de uma abordagem crítica. **Tecnologia Educacional**, Rio de Janeiro, v. 10, mar./abr, n. 39, p. 25–30, 1981.

NASCIMENTO, J. K. F. do. **Informática Aplicada à educação**. Brasília: Universidade de Brasília, 2007. 84 p.

OLIVEIRA, R. de. **Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula**. 11. ed. Campinas - SP: Papirus, 2006. 176 p.

RESENDE, F. As novas tecnologias na prÁtica pedagÓgica sob a perspectiva construtivista. **ENSAIO, Pesquisa em Educação e Ciências**, Rio de Janeiro, v. 02, n. 1, p. 70–87, 2002.

SACCOL, A.; SCHLEMMER, E.; BARBOSA, J. **M-learning e u-learning: novas perspectivas das aprendizagens móvel e ubíqua**. Numero da edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 162 p.

TAROUCO, L. M. R. et al. Objetos de aprendizagem para m-learning. In: CONGRESSO NACIONAL DE TECNOLOGIA DA INFORMAçãO E COMUNICAçãO, 1., 2004, Florianópolis. Florianópolis: SUCESU, 2004.

UNESCO. **O Futuro da aprendizagem móvel: implicações para planejadores e gestores de políticas.** Brasília: UNESCO, 2014. 64 p.

Capítulo 4

APLICAÇÕES DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO O SCILAB

Bruno Valério Everton Costa[1]
Valeska Martins de Souza[2]

Resumo: Neste trabalho são apresentadas algumas aplicações da teoria de matrizes e sistemas lineares, em que o software *Scilab* é utilizado como ferramenta auxiliar no cálculo de multiplicação de matrizes, matriz inversa e escalonamento de matriz pelo método de Gauss-Jordan, os quais constituem a base teórica da Álgebra Linear para análise e discussão das aplicações apresentadas. Pretende-se que os resultados deste trabalho sejam adaptados como complemento no processo de ensino-aprendizagem de matrizes e sistemas lineares.

Palavras-chave: Matrizes. Sistemas Lineares. *Scilab*.

1 INTRODUÇÃO

As aplicações de Matrizes e Sistemas Lineares vão além da resolução de sistemas ou operações matriciais, elas surgem nas mais variadas áreas do conhecimento, tornando-se ferramentas importantes e alcançaram um notável crescimento incorporadas ao desenvolvimento dos recursos computacionais.

O ensino da Matemática deve ser multidisciplinar, possibilitando ao aluno desenvolver a capacidade de raciocínio, o espirito crítico e cooperativo, os quais fazem parte do papel da escola como instituição promotora da educação integral. Por isso, deve se incorporar ao ensino a relação entre o conteúdo e suas aplicações reais para estimular a capacidade de organizar o pensamento, ler e interpretar dados quantitativos.

De acordo com os PCNs,

> ...a utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem (BRASIL, 1998, p.45).

Em relação ao estudo dos sistemas lineares, a sua abordagem neste trabalho segue as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) conforme BRASIL (2006),

[1] IFMA, bvec2006@gmail.com
[2] UFMA, valeskam@terra.com.br

> A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3×3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (BRASIL, 2006, p.78).

Os softwares constituem ferramentas auxiliares na aplicação e exploração dos conteúdos matemáticos que orientam o usuário em uma sequência de raciocínio, além de realizar cálculos que otimizam tempo e energia, proporciona ao usuário uma visualização clara da resolução do problema assimilado.

Um software bem apropriado aos conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, explorados neste trabalho, é o *SciLab* - do inglês *Scientific Laboratory*, onde sua interatividade com o usuário possibilita eficiência, rapidez e compreensão na resolução dos problemas. A interface oferecida pelo *Scilab* proporciona ao usuário facilidade e adaptação aos comandos, além de ser uma calculadora poderosa para resolver problemas que envolvem uma grande quantidade de dados numéricos.

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas aplicações práticas do estudo de matrizes e sistemas lineares que podem ser incorporadas à metodologia de ensino e contextualização destes conteúdos, sendo o software *Scilab*, a ferramenta computacional auxiliar na execução rápida e eficaz dos cálculos nessas aplicações, as quais abrangem várias áreas do conhecimento e os problemas apresentados geram cálculos trabalhosos que exigem uma ferramenta computacional de cálculo poderosa como o *Scilab*.

2 METODOLOGIA

O *Scilab* (*Scientic Laboratory*) é um ambiente computacional voltado para o desenvolvimento de *software* para resolução de problemas numéricos. O *Scilab* foi criado em 1990 por um grupo de pesquisadores do INRIA (*Institut de Recherche en Informatique et en Automatique*) e do ENPC (*Ecole Nationale des Ponts et Chaussees*) da França. O *Scilab* está disponível para *download* gratuito em *http://www.scilab.org* e pode ser legalmente utilizado, copiado, distribuído e modificado (PIRES, 2004).

Desde 1994, quando passou a ser disponível na *Internet*, o *Scilab* é um *software* gratuito e com o seu código fonte disponível, além de distribuições pré-compiladas do *Scilab* para vários sistemas operacionais, como *Windows*, *Linux*, *Unix* e *Solaris*. O *Scilab* passou a ser mantido por um consórcio de empresas e instituições francesas denominado de Consórcio *Scilab* a partir de maio de 2003.

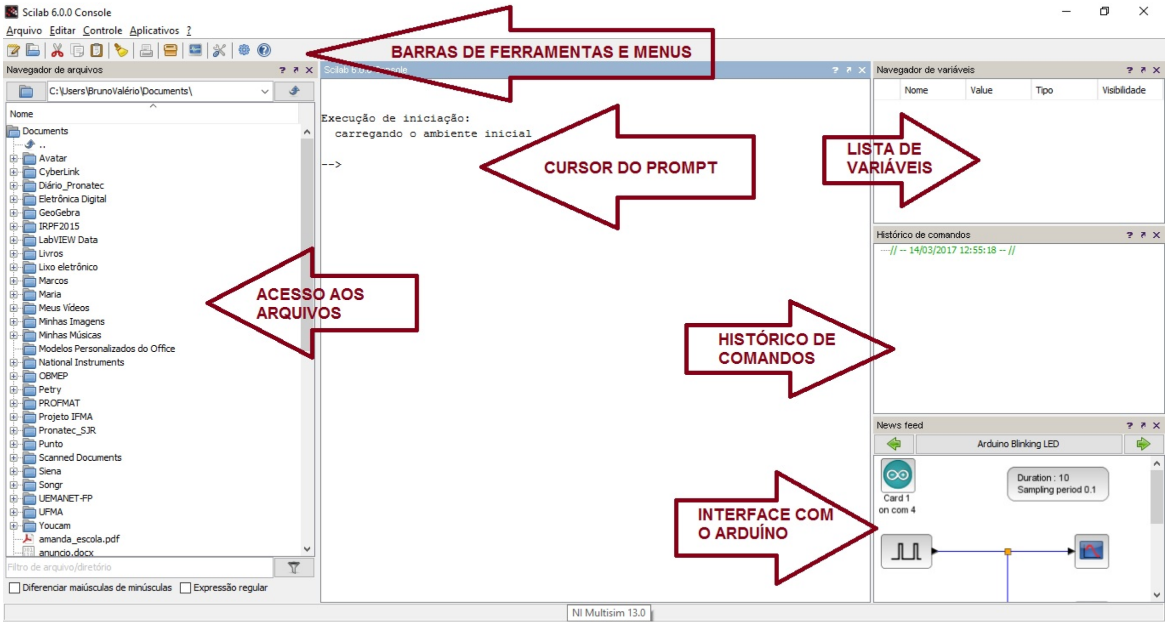
O *Scilab* é um *software* totalmente gratuito, passa por melhorias e atualizações com certa frequência, possui *interfaces* com outras plataformas de linguagens de programação.

O usuário pode contar com uma literatura de apoio sobre o seu uso e comunidades na *Internet* que trocam ideias.

Os recursos do *Scilab* se aplicam nas áreas de Processamento de Sinais, Automação e Controle, Computação gráfica, Matemática, Física, etc. É um ambiente poderoso para geração de gráficos 2*D* e 3*D* (inclusive com animação), implementação de funções para manipulação de matrizes, operações com polinômios, funções de transferência, sistemas lineares e grafos (CAMPOS, 2010).

A Figura 1 exibe a tela inicial do *Scilab* 6.0.0 *Console*.

Figura 1 – Tela Inicial do *Scilab*.



Fonte: Elaborada pelos autores.

No *prompt* (−− >) são inseridos os comandos, funções e códigos do *Scilab*, através de duas formas de interação com o *software*:

- digitação diretamente no *prompt*, em que se tem uso de uma poderosa ferramenta de cálculo;
- programação numérica propriamente dita, em que se delineiam linhas de código.

Para inserir dados de matrizes ou sistemas lineares (matriz associada ao sistema), os elementos (dados) da matriz são digitados entre colchetes, linha por linha, separando as linhas por ponto-e-vírgula (;) ou pela tecla *Enter*, sendo que à matriz inserida é atribuída uma variável de até 24 caracteres.

Além das operações básicas (adição, subtração, multiplicação por um escalar, multiplicação de matrizes e transposição de matriz), o *Scilab* dispõe ainda de comandos específicos para calcular a inversa de uma matriz quadrada e a forma escalonada de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan para solucionar sistemas lineares (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2000).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

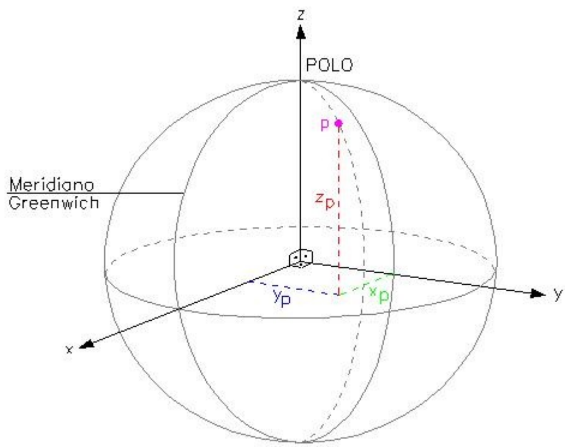
Nesta seção são apresentadas duas aplicações de matrizes e sistemas lineares utilizando o *Scilab* como ferramenta auxiliar nos cálculos mais trabalhosos.

3.1 SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL - GPS

O sistema usado para determinar a localização geográfica de um corpo ou objeto através de uma rede de satélites terrestres é denominado GPS (*Global Position System*). A rede é composta de 24 satélites que percorrem uma órbita terrestre a cada 12 horas a uma altitude de 17.700 km, em seis planos orbitais, de tal modo que cada ponto da superfície da terra seja visível para cinco ou seis satélites.

A Terra pode ser vista como uma esfera de sistema de coordenadas cartesianas $OXYZ$, sendo Z o eixo positivo pelo polo norte, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Localização de um ponto na superfície da Terra.



Fonte: FIORIO, 2013.

Um objeto tem sua localização (x, y, z) desconhecida num certo instante de tempo t, onde as distâncias são medidas em unidades iguais ao raio terrestre, de modo que as coordenadas do objeto satisfazem a equação da esfera, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (ANTON; BUSBY, 2003, p.63).

As coordenadas de localização de um determinado objeto são calculadas por quatro satélites usando uma triangulação e as distâncias deste ponto a cada satélite. O raio terrestre médio r é de $6,4 \cdot 10^6$ metros e o sinal enviado pelo satélite ao objeto, viaja à velocidade da luz no vácuo c, que é dada por $3 \cdot 10^6$ metros por centésimo de segundo.

Sabe-se da Física (YAMAMOTO; FUKE, 2013, p.33), que a distância d percorrida pelo sinal é o produto da velocidade c pelo intervalo de tempo Δt, em que é o intervalo de tempo dado pela variação entre o instante t em que o objeto recebe o sinal do satélite, e o instante t_0 em que o satélite transmite o sinal, o qual também e informado pelo satélite, o que torna t a quarta incógnita a ser calculada, visto que geralmente o objeto que dispõe de GPS não possui relógio com precisão suficiente para este fim. Tem-se,

$$d(t) = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^6 (t - t_0) \tag{1}$$

Se a velocidade da luz for convertida para *raios terrestres por segundo*, a Equação 1 torna-se,

$$d(t) = 0{,}469 \cdot (t - t_0) \tag{2}$$

Para um certo instante de tempo t é possível calcular a distância d,

$$d = 0{,}469 \cdot (t - t_0) \tag{3}$$

Além do tempo t_0, cada satélite transmite suas coordenadas (x_0, y_0, z_0) nesse instante, o que permite calcular d utilizando a distância entre dois pontos.

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{4}$$

Igualando as Equações 3 e 4, elevando-as ao quadrado, obtém-se a equação quadrática,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0{,}22 \cdot (t - t_0)^2 \tag{5}$$

em que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de localização de um satélite no instante t_0 que são transmitidas para o objeto a ser localizado.

A Equação 5 será usada para cada um dos satélites, que embora seja quadrática, é possível cancelar os termos quadráticos e formar um sistema linear.

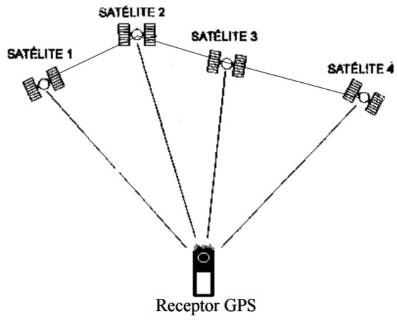
Exemplo 01 *: Um navio com coordenadas (x, y, z) desconhecidas num instante de tempo t, recebe os seguintes dados de quatros satélites, com coordenadas medidas em raios terrestres e o tempo em centésimos de segundo a partir da meia-noite, conforme a tabela,(ANTON; BUSBY, 2003, p.64).*

Tabela 1 – Dados dos satélites.

Satélite	Posição do satélite	Tempo
1	(1,12;2,10;1,40)	1,06
2	(0,00;1,53;2,30)	0,56
3	(1,40;1,12;2,10)	1,16
4	(2,30;0,00;1,53)	0,75

Solução: A situação descrita no enunciado pode ser ilustrada pela Figura 3.

Figura 3 – Localização de um objeto usando quatro satélites.



Fonte: FIORIO, 2013.

Os dados das coordenadas e do instante da localização de cada satélite são inseridos na Equação 5. Desse modo são obtidas as seguintes equações:

$$2,24x + 4,2y + 2,8z - 0,466t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,377$$

$$3,06y + 4,6z - 0,246t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,562$$

$$2,8x + 2,24y + 4,2z - 0,510t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,328$$

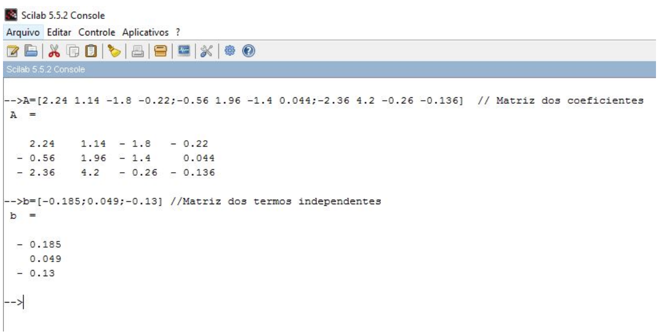
$$2,24x + 4,2y + 2,8z - 0,466t = x^2 + y^2 + z^2 - 0,22t^2 + 7,377$$

Subtraindo cada uma das três ultimas equações da primeira equação, eliminando-se os termos quadráticos, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2,24x + 1,14y - 1,8z - 0,22t = -0,185 \\ -0,56x + 1,96y - 1,4z + 0,044t = 0,049 \\ -2,36x + 4,2y - 0,26z - 0,136t = -0,13 \end{cases}$$

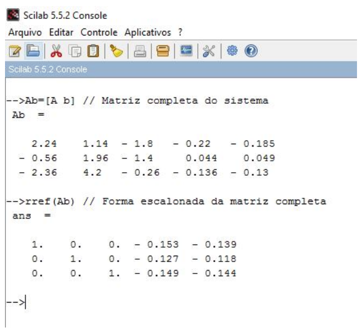
As Figuras 4 e 5 mostram, respectivamente, as entradas das matrizes no *Scilab* e a matriz completa e sua forma escalonada.

Figura 4 – Entradas da matriz no *Scilab*.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 5 – Forma escalonada.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Portanto, o sistema original é equivalente ao sistema,

$$\begin{cases} x - 0,153t = -0,139 \\ y - 0,127t = -0,118 \\ z - 0,149t = -0,144 \end{cases}$$

Dessa maneira, definindo $t = w$, tem-se:

$$\begin{cases} x = -0,139 + 0,153w \\ y = -0,118 + 0,127w \\ z = -0,144 + 0,149w \\ t = w \end{cases}$$

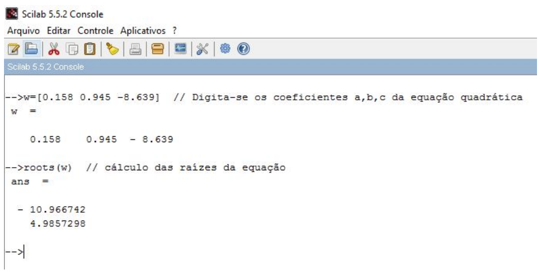
O valor do parâmetro w pode ser encontrado se as expressões para as variáveis x, y, z e t forem substituídas em uma das quatro equações dos satélites.

Seja a equação, $(x-1,12)^2 + (y-2,10)^2 + (z-1,40)^2 = 0,22(t-1,06)^2$, do primeiro satélite. Substituindo as expressões de x, y, z e t, obtém-se:

$$0,158w^2 + 0,945w - 8,639 = 0$$

A Figura 6 exibe a solução da equação quadrática, $w' = -10,96$ e $w'' = 4,98$. Sendo o

Figura 6 – Solução da equação quadrática.

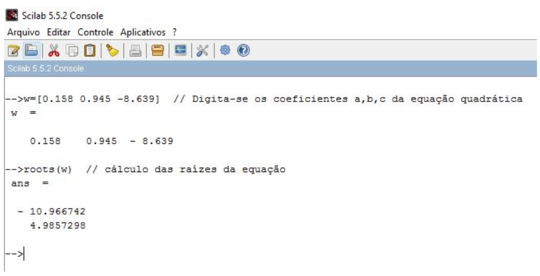


Fonte: Elaborada pelos autores.

tempo $t = w$ é uma variável não-negativa, considera-se o valor positivo $t = w = 4,98$.

A Figura 7 exibe o cálculo das coordenadas cartesianas (x, y, z).

Figura 7 – Solução da equação quadrática.



Fonte: Elaborada pelos autores.

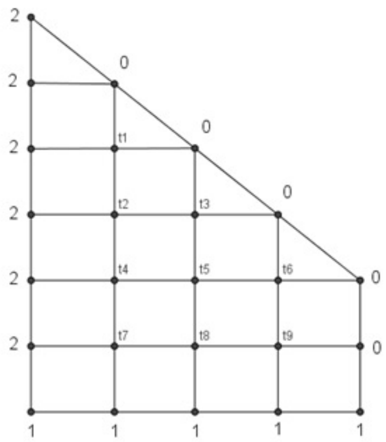
Considerando três casas decimais, a tripla ordenada $(0,622; 0,514; 0,598)$ são as coordenadas da localização geográfica do navio.

3.2 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA

Nesta seção, mostra-se como pode ser encontrada a distribuição de temperaturas numa placa fina, se forem conhecidas as temperaturas ao longo das arestas da placa. O modelo matemático adotado consiste em marcar pontos de malha na placa de forma a dividi-la em regiões. A análise é baseada na seguinte propriedade de temperatura de equilíbrio que diz: *"em cada ponto de malha interior, a temperatura é aproximadamente igual à média aritmética das temperaturas dos quatro pontos de malha adjacentes"* (KOLMAN; HILL, 2013).

Exemplo 02 *: Encontre as temperaturas nos pontos indicados na placa da Figura 8.*

Figura 8 – Temperaturas em uma placa fina trapezoidal



Fonte: KOLMAN; HILL, 2013.

Solução: Considerando os nove pontos de malha da placa, as temperaturas nesses pontos foram denotadas por $t_1, t_2, ..., t_9$. Aplica-se a propriedade citada anteriormente e obtém-se as equações para os nove pontos de malha da placa,

$$t_1 = \frac{t_2 + 0 + 0 + 2}{4}$$

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3 + t_4 + 2}{4}$$

$$t_3 = \frac{t_2 + t_5 + 0 + 0}{4}$$

$$t_4 = \frac{t_2 + t_5 + t_7 + 2}{4}$$

$$t_5 = \frac{t_3 + t_4 + t_6 + t_8}{4}$$

$$t_6 = \frac{t_5 + t_9 + 0 + 0}{4}$$

$$t_7 = \frac{t_4 + t_8 + 1 + 2}{4}$$

$$t_8 = \frac{t_5 + t_7 + t_9 + 1}{4}$$

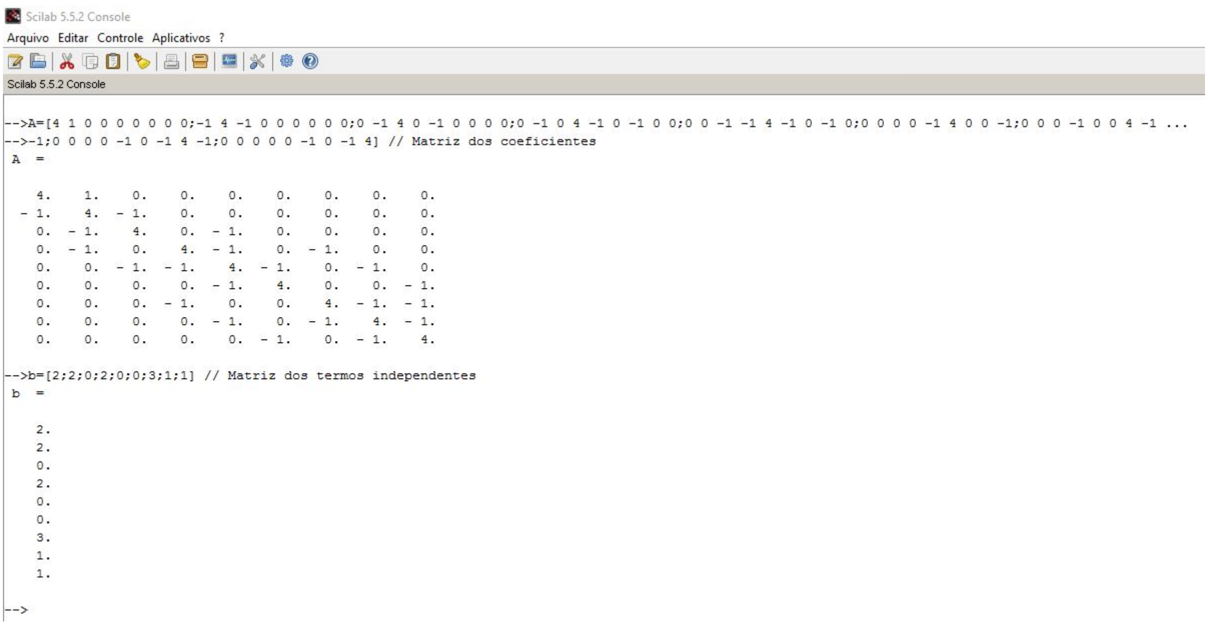
$$t_9 = \frac{t_6 + t_8 + 1 + 0}{4}$$

Dessa forma, obtém-se o sistema linear de 9 equações e 9 incógnitas:

$$\begin{cases} 4t_1 + t_2 + 0t_3 + 0t_4 + 0t_5 + 0t_6 + 0t_7 + 0t_8 + 0t_9 = 2 \\ -t_1 + 4t_2 - t_3 + 0t_4 + 0t_5 + 0t_6 + 0t_7 + 0t_8 + 0t_9 = 2 \\ 0t_1 - t_2 + 4t_3 + 0t_4 - t_5 + 0t_6 + 0t_7 + 0t_8 + 0t_9 = 0 \\ 0t_1 - t_2 + 0t_3 + 4t_4 - t_5 + 0t_6 - t_7 + 0t_8 + 0t_9 = 2 \\ 0t_1 + 0t_2 - t_3 - t_4 + 4t_5 - t_6 + 0t_7 - t_8 + 0t_9 = 0 \\ 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 + 0t_4 - t_5 + 4t_6 + 0t_7 + 0t_8 - t_9 = 0 \\ 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 - t_4 + 0t_5 + 0t_6 + 4t_7 - t_8 + 0t_9 = 3 \\ 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 + 0t_4 - t_5 + 0t_6 - t_7 + 4t_8 - t_9 = 1 \\ 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 + 0t_4 + 0t_5 - t_6 + 0t_7 - t_8 + 4t_9 = 1 \end{cases}$$

A Figura 9 exibe as entradas da matriz dos coeficientes A e matriz dos termos independentes B.

Figura 9 – Entradas das matrizes no *Scilab*


Scilab 5.5.2 Console

Arquivo Editar Controle Aplicativos ?

Scilab 5.5.2 Console

```
-->A=[4 1 0 0 0 0 0 0 0;-1 4 -1 0 0 0 0 0 0;0 -1 4 0 -1 0 0 0 0;0 -1 0 4 -1 0 -1 0 0;0 0 -1 -1 4 -1 0 -1 0;0 0 0 -1 4 0 0 -1;0 0 0 -1 0 0 4 -1 ...
-->-1;0 0 0 0 -1 0 -1 4 -1;0 0 0 0 0 -1 0 -1 4] // Matriz dos coeficientes
 A  =

    4.     1.     0.     0.     0.     0.     0.     0.     0.
  - 1.     4.   - 1.     0.     0.     0.     0.     0.     0.
    0.   - 1.     4.     0.   - 1.     0.     0.     0.     0.
    0.   - 1.     0.     4.   - 1.     0.   - 1.     0.     0.
    0.     0.   - 1.   - 1.     4.   - 1.     0.   - 1.     0.
    0.     0.     0.     0.   - 1.     4.     0.     0.   - 1.
    0.     0.     0.   - 1.     0.     0.     4.   - 1.   - 1.
    0.     0.     0.     0.   - 1.     0.   - 1.     4.   - 1.
    0.     0.     0.     0.     0.   - 1.     0.   - 1.     4.

-->b=[2;2;0;2;0;0;3;1;1] // Matriz dos termos independentes
 b  =

    2.
    2.
    0.
    2.
    0.
    0.
    3.
    1.
    1.

-->
```

Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 10 exibe a solução do sistema utilizando X=inv(A).B, (KOLMAN; HILL, 2013).

Figura 10 – Solução pela Matriz Inversa

```
Scilab 5.5.2 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos  ?
Scilab 5.5.2 Console

-->X=inv(A)*b
 X  =

    0.33
    0.67
    0.34
    1.19
    0.69
    0.31
    1.42
    0.92
    0.56

-->
```

Fonte: Elaborada pelos autores.

A solução do sistema pode ser obtida pelo escalonamento da matriz completa, conforme mostra a Figura 11 (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2000).

Figura 11 – Solução por escalonamento

```
Scilab 5.5.2 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos  ?
Scilab 5.5.2 Console

-->Ab=[A b] // Matriz completa
 Ab  =

    4.    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    2.
  - 1.    4.  - 1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    2.
    0.  - 1.    4.    0.  - 1.    0.    0.    0.    0.    0.
    0.  - 1.    0.    4.  - 1.    0.  - 1.    0.    0.    2.
    0.    0.  - 1.  - 1.    4.  - 1.    0.  - 1.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.  - 1.    4.    0.    0.  - 1.    0.
    0.    0.    0.  - 1.    0.    0.    4.  - 1.  - 1.    3.
    0.    0.    0.    0.  - 1.    0.  - 1.    4.  - 1.    1.
    0.    0.    0.    0.    0.  - 1.    0.  - 1.    4.    1.

-->rref(Ab) //Forma escalonada da matriz completa do sistema
 ans  =

    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.33
    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.67
    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.34
    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.    1.19
    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.    0.69
    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.    0.    0.31
    0.    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.    1.42
    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.    0.92
    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    0.    1.    0.56

-->
```

Fonte: Elaborada pelos autores.

Utilizando quaisquer um dos dois métodos, os valores das temperaturas nos nove pontos da placa calculados são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Temperaturas nos pontos da placa

Temperatura	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
Valor	0,33	0,67	0,34	1,19	0,69	0,31	1,42	0,92	0,56

Fonte: Elaborada pelos autores.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi mostrado que o software *SciLab* é uma importante ferramenta de cálculo nas aplicações de matrizes e sistemas lineares. As aplicações apresentadas aqui, mostram que a teoria das matrizes e sistemas lineares são conteúdos matemáticos versáteis e muito úteis em várias áreas do conhecimento e que não esgotam as possibilidades de abordagem destes conteúdos.

O uso das ferramentas de cálculo do *SciLab* foi muito vantajoso e motivador neste trabalho. Constatou-se que *SciLab* é um recurso computacional de fácil manuseio e assimilação dos seus comandos, além de ser uma poderosa calculadora, o qual é capaz de escalonar uma matriz qualquer (ou obter sua inversa) através de um único comando, sendo que manualmente estes processos são trabalhosos e dispendiosos em tempo e concentração. Com o auxílio do *SciLab* foi possível resolver ou discutir um sistema com 9 equações e 9 variáveis em tempo ínfimo.

O potencial do *Scilab* foi eficiente diante das dificuldades das aplicações, que exigiam manualmente, cálculos trabalhosos e também viabiliza uma análise dos problemas de forma mais dinâmica, prazerosa, atrativa e de fácil compreensão. Isso possibilita a inserção do *Scilab* como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de Matrizes e Sistemas Lineares.

Conclui-se então, que este trabalho foi produtivo e motivacional quanto à aplicabilidade dos conteúdos e do *software* utilizado. Ressalta-se que qualquer software educacional é uma ferramenta auxiliar no processo ensino-aprendizagem e que antes de utilizá-lo, é fundamental o domínio da teoria relacionada. Para trabalhos futuros, sugere-se um aprofundamento matemático nas aplicações e o uso do ambiente de programação do *Scilab* com o uso de *interface* com outras linguagens, ou ainda, expandir o uso do *Scilab* para outros conteúdos da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Contemporary Linear Algebra**. New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, vol.2** .Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de ensino Médio, Brasília, 2006.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e aplicações**. - 6ª edição - São Paulo: Atual Editora, 2000.

CAMPOS, Frederico F. **Fundamentos de Scilab**. Belo Horizonte: CCA-UFMG, 2010.

FIORIO, Peterson R. **Apontamentos de aula: Sistema Global de Posicionamento (GPS)**. Apostila disponível em:
< *http : //www.leb.esalq.usp.br/disciplinas/Topo/leb*450*/Fiorio/APOSTILA_GPS_pdf* >.
Acesso em: 16 mai 2017.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.

PIRES, Paulo Sérgio da Mota. **Introdução ao Scilab**. Natal: DCA-UFRN, 2004.

YAMAMOTO, Kazuhito; FUKE, Luiz Felipe. **Física para o Ensino Médio 1**. - 3ª Edição - São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

Capítulo 5

PARAMETRIZAÇÃO E PROPRIEDADES DAS CURVAS CICLOIDAIS COM UMA EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA

Fernando Ferreira Amorim[1]
Josenildo de Souza Chaves[2]
Antonio José da Silva[3]

Resumo: Neste trabalho apresentamos as Curvas Cicloidais: Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide. Fazemos suas parametrizações e representações gráficas dessas curvas com o auxílio do software Geogebra. Além disso, destacamos propriedades e aplicações dessas curvas planas. O objetivo principal é promover o estudo das curvas cicloidais para os alunos do 3º ano do Ensino Médio. Uma experimentação em sala de aula foi realizada, contribuindo para comprovar algumas propriedades, uma vez que a demonstração dessas propriedades abrange conceitos de disciplinas específicas do ensino superior. Essa experimentação foi importante para fortalecer a proposta da abordagem das Curvas Cicloidais, de forma experimental, no programa de matemática do Ensino Médio.

Palavras-chave: Cicloide, Epicicloide, Hipocicloide, Ensino Médio.

1 INTRODUÇÃO

Para representar uma curva no plano é possível adotar um ponto de vista dinâmico. Podemos descrever qualquer curva do plano como a trajetória de um ponto móvel, considerando as coordenadas x e y como funções da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$ chamadas funções paramétricas e observar que, quando o parâmetro t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ também varia e traça uma curva C (Delgado, et al, 2013; Cutrim, 2015). Sendo que, o movimento de um ponto sobre uma circunferência quando esta rola sem deslizar sobre uma reta ou sobre uma outra circunferência (tanto exteriormente quanto interiormente) descreve exatamente o que chamamos de Curvas Cicloidais (Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide).

Podemos verificar que a maioria dos alunos do ensino médio têm pouco, ou nenhum conhecimento sobre as Curvas Cicloidais e suas propriedades e aplicações. Diante dessa realidade, propomos neste trabalho uma experimentação em sala de aula para que eles possam ter uma boa visão sobre esses tipos de curvas e compreender algumas aplicações. Utilizamos o GeoGebra (Hohenwarter, 2013) como apoio computacional para a construção geométrica das curvas e ensino e aprendizagem.

Com o conhecimento mais refinado sobre a parametrização dessas curvas, suas aplicações e a descrição dinâmica de seus traços no Geogebra, haverá maior sentido quando o aluno, por exemplo, olhar uma rampa de skate e reconhecer que o formato

[1] UFMA, fferreira728@gmail.com
[2] UFMA, chavesjs@yahoo.com.br
[3] UFMA, antonio.silva@ufma.br

dessa rampa é o de uma uma cicloide. Por conseguinte, a de qualquer curva de descida mais rápida. Blaise Pascal (1623 – 1662), já afirmava sobre a cicloide na Acta Eruditorum, de acordo com Farina (2013):

> ”A Cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos”.

Diante deste contexto, este estudo buscou responder as seguintes questões: Como estimular a importância da disciplina Matemática em sala de aula? Como superar as dificuldades encontradas pelos alunos para interpretar uma curva de maneira dinâmica e não somente fixa?

2 METODOLOGIA

Nesta Seção introduzimos a definição de curva plana parametrizada de acordo com Santos & Alencar (2003), parametrização da reta, da circunferência e das Curvas Cicloidais: Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide. Além disso, apresentamos a descrição de como construir as Curvas Cicloidais no software Geogebra.

2.1 PARAMETRIZAÇÃO DAS CURVAS CICLOIDAIS E CONSTRUÇÃO VIA GEOGEBRA

Definição 0.1 *Uma curva no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tal que $\beta(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in \mathbb{R}$. O conjunto imagem C da aplicação β, dado por*

$$C = \{\beta(t) = (x(t), y(t)); t \in I\}; \quad I \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

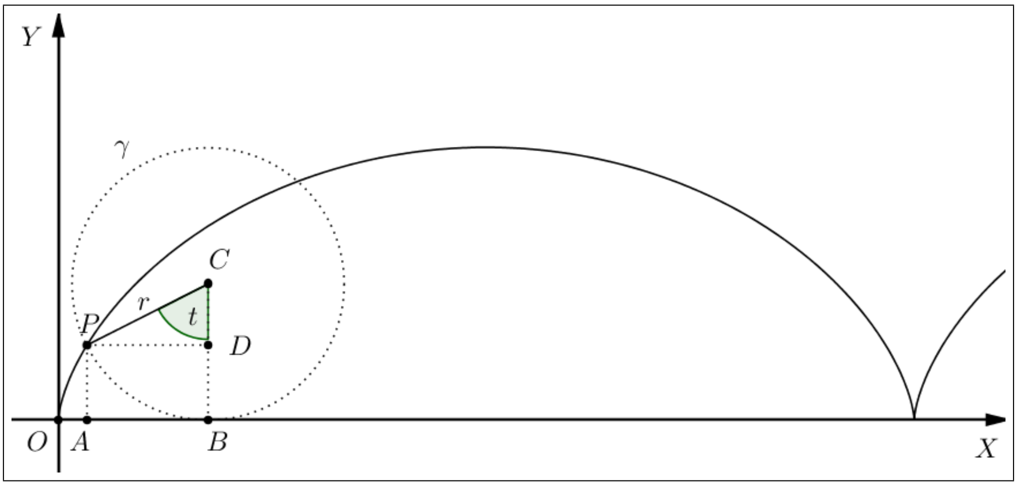
é chamado de traço de β. Devemos observar que, de acordo com a Definição 1, estamos analisando todo o movimento traçado e não somente o conjunto C. Nesse caso, β é dita uma parametrização em C e denominamos t o parâmetro da curva β. A parametrização de uma curva plana pode ser interpretada como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca sobre o plano em um intervalo de tempo.

Nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4 apresentamos as equações paramétricas da reta, circunferência, Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide, respectivamente.

2.2 PARAMETRIZAÇÃO DA CICLOIDE

A Cicloide é o lugar geométrico descrito pelo movimento do ponto $P = (0,0)$ de um círculo de raio $r > 0$, centrado em $(0,r)$, quando o círculo gira sem deslizar sobre o eixo dos x (Figura 1).

Figura 1 – Cicloide com círculo gerador.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o círculo gira um ângulo t, seu centro se move um comprimento $|OB|$. Na Figura 1, temos $|OB|$ igual ao comprimento do arco BP, ou seja $|OB| = rt$, $|CB| = r$, $|CD| = rcos(t)$ e $|DP| = rsen(t)$.

Portanto, as coordenadas de P são

$$x(t) = |OB| - |DP| = rt - rsen(t) = r(t - sen(t)) \tag{2}$$

e

$$y(t) = |CB| - |CD| = r - rcos(t) = r(1 - cos(t)), \tag{3}$$

ou seja, as equações paramétricas da Cicloide são dadas por:

$$\beta(t) = \begin{cases} x(t) = r(t - sen(t)) \\ y(t) = r(1 - cos(t)) \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Quando t varia de 0 a 2π, obtemos o primeiro arco da Cicloide.

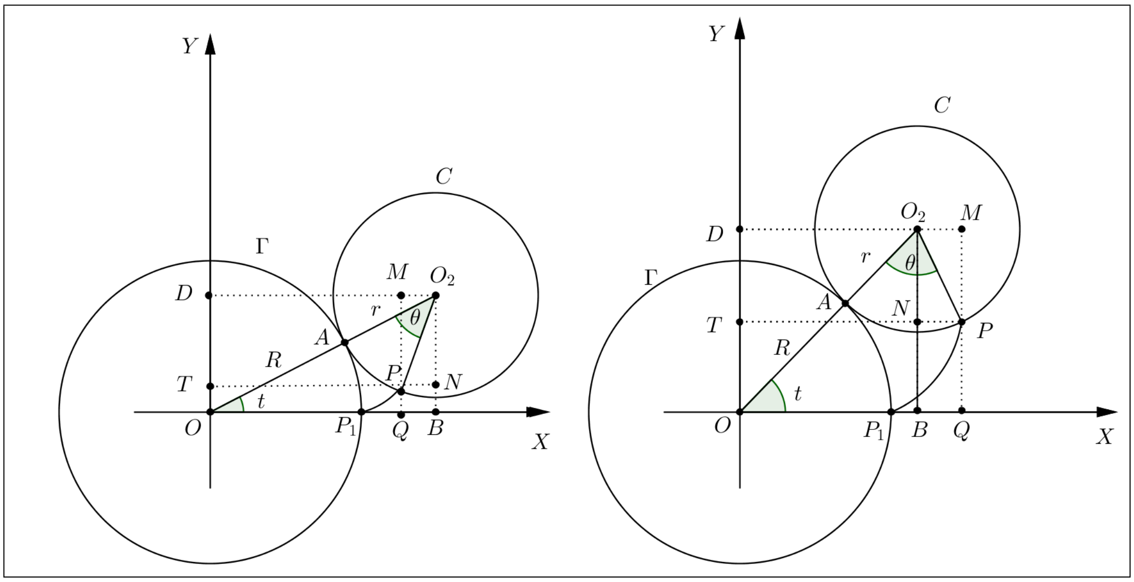
2.3 PARAMETRIZAÇÃO DA EPICICLOIDE

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r, respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P; os pontos de C, diferentes de P, estão no exterior de Γ. Denominamos *Epicicloide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando C rola sobre Γ, sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ.

Para obtermos as equações paramétricas da Epicicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R+r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$, Figura 2, em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

Figura 2 – Epicicloide com círculo gerador.



Fonte: Cutrim (2015).

Na Figura 2, designamos os seguintes elementos: $P = (x, y)$ da Epicicloide está inicialmente na posição P_1, descreve-se o arco P_1P quando C rola um ângulo de medida θ sobre Γ; A é o ponto de contato entre os círculos; O_2 é o centro de C; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B, respectivamente, e θ o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semirreta radial OO_2.

Considerando o caso em que Q está entre O e B, Figura 2, temos:

$$x = |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M| \tag{5}$$

e

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|, \tag{6}$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R + r$, e sendo t a medida do ângulo do semieixo OX positivo para OO_2, no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R + r)cos(t) \tag{7}$$

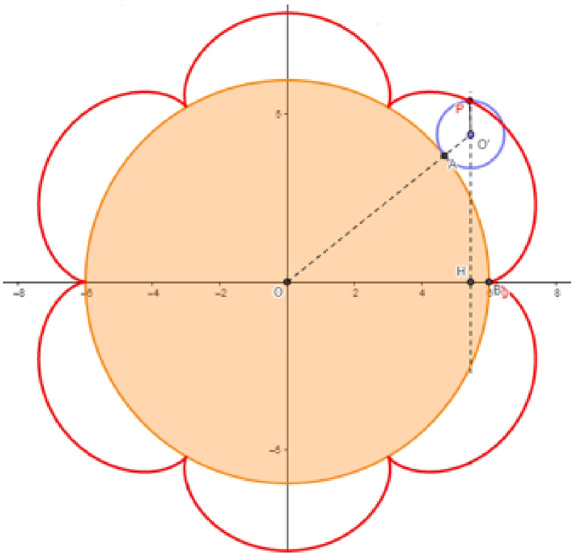
e

$$|OD| = (R + r)sen(t). \tag{8}$$

Observe que, quando C percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ. As cúspides (pontas) são formadas quando a circunferência externa se movimenta e seu ponto fixo toca a circunferência fixa. Portanto, se $R/r = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a enésima vez coincide com sua posição inicial. Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de C, pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$, (Figura 3).

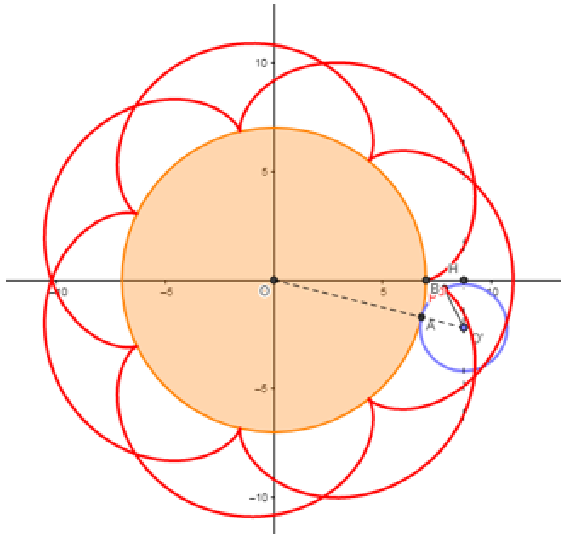
No caso em que R/r é um número racional da forma p/q, com $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, a Epicicloide terá p cúspides quando a circunferência externa girar q vezes. Na Figura 4, temos $p/q = 7/2$. Agora, se R/r for um número irracional, a Epicicloide não será fechada, não possui repetição, ou seja, o ponto fixo na circunferência que gira não volta para o início, o número de cúspides é infinito, (Figura **??**).

Figura 3 – Epicicloide com 6 cúspides.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Epicicloide com 7 cúspides.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 PARAMETRIZAÇÃO DA HIPOCICLOIDE

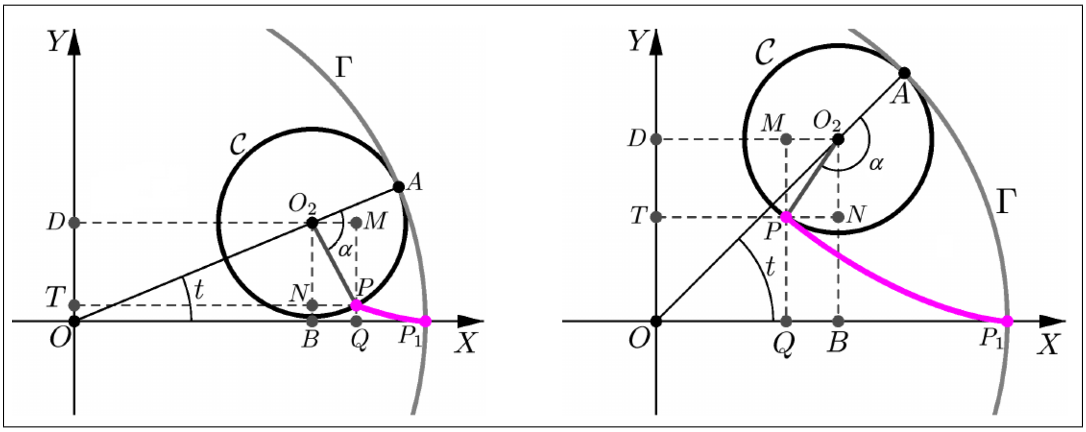
Considere dois círculos Γ e C de raios R e r, respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P; os pontos de C, diferentes de P, estão no interior de Γ. Denominamos *Hipocicloide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando C rola internamente em Γ, sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ.

Para obtermos as equações paramétricas da Hipocicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R-r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

Na Figura 5, A é o ponto de C que toca Γ; O_2 é o centro de C; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B, respectivamente.

Figura 5 – Ponto P descrevendo uma Hipocicloide.

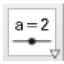


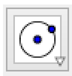
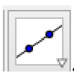
Fonte: Cutrim (2015).

2.5 CONSTRUÇÕES DAS CURVAS CICLOIDAIS NO GEOGEBRA

O GeoGebra (Hohenwarter, 2013) é um software de matemática desenvolvido principalmente para as áreas de geometria, álgebra e cálculo. Em geometria, por exemplo, podemos fazer construções com pontos, vetores, segmentos, linhas, polígonos e seções cônicas, além de funções. Alterações podem ser feitas dinamicamente. Para mostrar a construção das Curvas Cicloidais vamos fazer uma breve seção com a Cicloide. A construção da Epicicloide e do Hipocicloide pode ser obtida de modo semelhante.

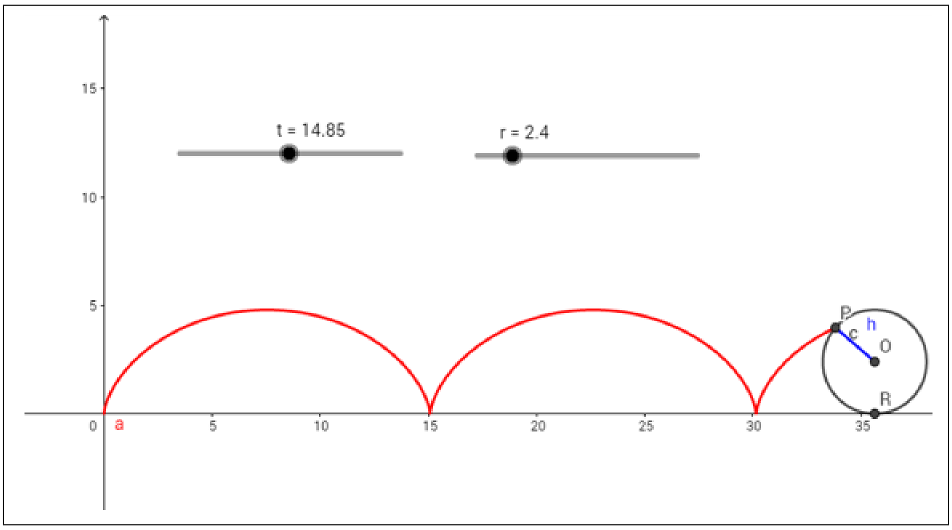
A construção da Cicloide, pode ser feita do seguinte modo:

(i) Criar dois controles deslizantes, no ícone 

, um para o parâmetro t e outro para o raio r da circunferência que rolará sobre a reta. Abrir-se-á uma janela e, como exemplo, para o parâmetro t, utiliza-se mínimo: 0, máximo: 30 e incremento: 0,01. Para o raio r utiliza-se mínimo: 0, máximo: 5 e incremento: 0,1;
(ii) Inserir as funções parametrizadas da Cicloide no campo "Entrada". Os gráficos das funções formadas devem ficar ocultos, para isso, clicar com o botão direito do mouse sobre as curvas e selecionar exibir objeto. As funções parametrizadas podem ser, por exemplo, do tipo: $f(x) = r \cdot (x - sen(x))$ e $g(x) = r \cdot (1 - cos(x))$;
(iii) No campo "Entrada"digitar curva, aparece o comando curva na forma: Curva[<Expressão> ,<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>] . Após clicar sobre o comando, inserir as funções conforme o modelo: $Curva[f(s), g(s), s, 0, t]$. A curva Cicloide está formada;
(iv) Construir três pontos $P = a(t)$, $R = (r \cdot t, 0)$ e $O = (r \cdot t, r)$ no campo "Entrada". A partir desses pontos, traça-se a circunferência, no ícone , que tem centro em O e passa em P. O raio da circunferência é determinado pelo segmento que liga O até P, para isso, utilizar o ícone . Animando o controle deslizante temos a movimentação da

circunferência, traçando assim a Cicloide, conforme a Figura 6.

Figura 6 – Cicloide construída usando o GeoGeobra.



3 RESULTADOS

Podemos perceber nos estabelecimentos do Ensino Médio, o fraco interesse dos alunos pela Matemática. Consequentemente, isso é replicado para outras disciplinas da área de Ciências da Natureza.

O objetivo deste texto é mostrar como apresentar experimentalmente as Curvas Cicloidais na Educação Básica, mais especificamente no 3º Ano do Ensino Médio e assim, fazer com que os alunos possam compreender a beleza, as formas, as propriedades e as aplicações relacionadas a essas curvas.

Destacamos que não foram incluídas demonstrações matemáticas que utilizam recursos do cálculo diferencial e integral na experimentação em sala de aula. Trabalhamos com os alunos os conceitos, fatos históricos, construções das curvas com materiais específicos de desenho e uso do software GeoGebra.

3.1 EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO

Os primeiros passos para a compreensão das Curvas Cicloidais foi fortalecer os conhecimentos prévios, tanto em Física como em Matemática. Conhecimentos que envolvem Trigonometria, Geometria Analítica, Movimento Uniforme, Movimento Uniformemente Variado, Movimento Circular, Força e Energia. Após essas abordagens, entramos no mundo das Curvas Cicloidais através dos conceitos e fatos históricos, conhecendo os trabalhos e o brilhantismo dos celebres matemáticos dos séculos XVI e XVII. Essa sequência teve como objetivo desvendar e incentivar o aprender da Matemática e da Física e não somente o intuito de aplicar fórmulas.

Com o regaste dos conteúdos da Matemática e da Física, partimos definitivamente para o estudo matemático das Curvas Cicloidais no que diz respeito a parametrização das curvas. Parametrizar uma curva é descrever essa curva em função de uma variável. Enfatizamos que conteúdos novos sempre causam estranheza e requer muita habilidade do professor para motivar e estreitar esses conhecimentos para os alunos, assim, com os recursos disponíveis na nossa escola, procuramos desmistificar a parametrização dessas curvas com clareza no trato matemático e com auxílio de imagens no computador para ilustração e facilitação das posições ocupadas pelos pontos que descrevem as curvas. A Figura 7 mostra um momento das aulas sobre a parametrização das curvas.

Figura 7 – Aula sobre parametrização de curvas.

Após o estudo da parametrização das curvas, passamos para a etapa de construção utilizando o Geogebra. Uma ferramenta que contribuiu de forma substancial para criação e manipulação das variáveis que regulam as Curvas Cicloidais. Encaminhamos nossos alunos para o Laboratório de Informática e utilizamos a geometria dinâmica do Geogebra e identificamos, primeiramente, seus comandos e inserção de funções matemáticas na forma algébrica para visualização de seus gráficos. Nesse momento, o uso do software Geogebra teve papel fundamental na construção do conhecimento dessas curvas e suas visualizações foram facilitaram o entendimento da modelagem matemática.

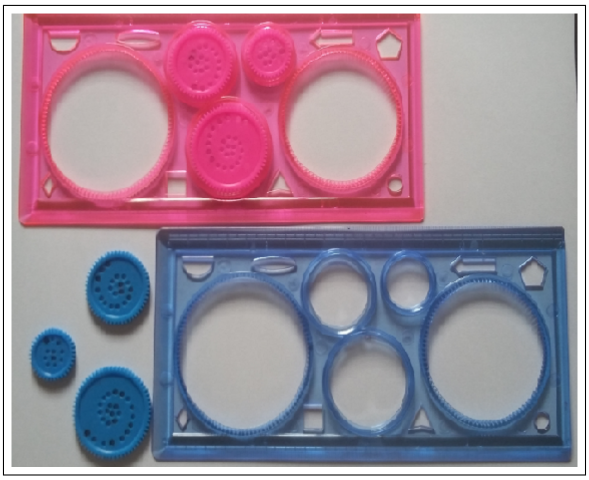
A tecnologia disponível que temos hoje é uma aliada no processo de aprendizagem do educando, assim, trabalhar em ambientes de aprendizagem em que os alunos possam alinhar suas ideias é o que se espera na construção do conhecimento. Nesse ensejo, além de construírem as Curvas Cicloidais nos computadores, lançamos uma proposta, que também fizessem a construção dessas curvas nos seus smartphones através do aplicativo GeoGebra. Como uma parte dos nossos alunos não dispunham de computadores desktops ou mesmo notebooks em suas residências, a utilização dos smartphones foi uma alternativa que os favoreceram. O uso desse aplicativo nos smartphones contribuiu com nosso estudo, como também, impactou positivamente no processo de aprendizagem dessas curvas. A Figura 8 mostra um dos momentos das aulas no Laboratório de Informática.

A construção das Curvas Cicloidais nos computadores e nos celulares possibilitou a abertura para novas ideias. Nesses últimos anos, é comum observar que as

Figura 8 – Aula sobre a construção das Curvas Cicloidais no Geogebra.

tecnologias têm influenciado fortemente na diversão das crianças, adolescentes e adultos. No entanto, em décadas anteriores eram os dispositivos (brinquedos) manipuláveis que faziam a diversão de todos. Nessa perspectiva, procuramos incentivar a construção das curvas de forma lúdica, especialmente a Epicicloide e a Hipocicloide, com o auxílio de uma régua, chamada de Régua Mágica ou Espirógrafo, Figura 9. Essa régua, muito utilizada nas décadas de 70 e 80, permite construir figuras de formatos variados e que desperta a curiosidade pela beleza das formas encontradas. Uma ressalva importante de se fazer é que as curvas formadas por esta régua são chamadas de Epitrocoide e Hipotrocoide.

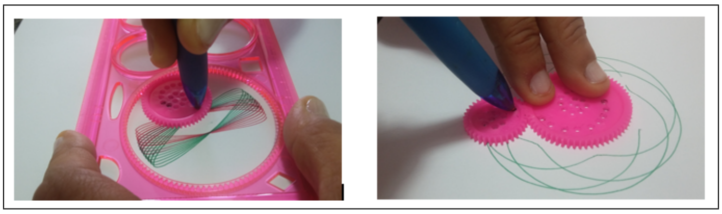
Figura 9 – Régua Mágica ou Espirógrafo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Régua Mágica foi criada pelo engenheiro inglês Denys Fisher, que a exibiu em 1965 na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg (*Nuremberg International Toy Fair*), na Alemanha. Os furos nos círculos dentados são para encaixar canetas ou lápis, então, fazendo os movimentos no sentido horário ou anti-horário, formam-se as curvas numa folha de papel, conforme a Figura 10.

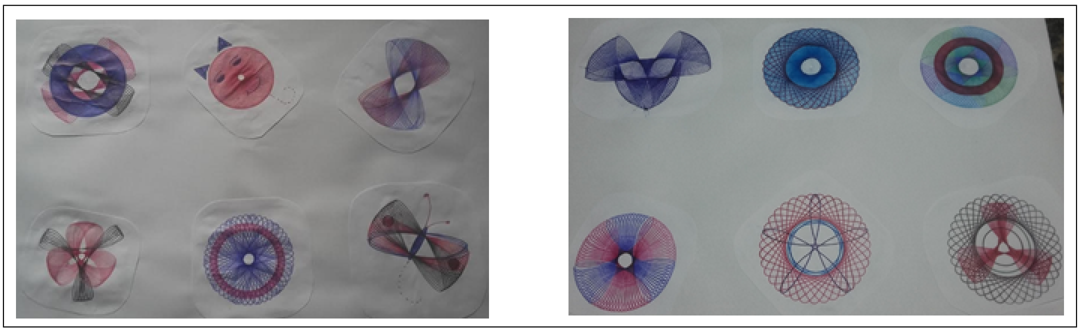
Figura 10 – Formação das curvas no papel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas formadas apresentam uma beleza peculiar que podem ser chamadas de Mandalas. Mandala (em Sânscrito significa círculo) é uma representação geométrica da dinâmica relação entre o homem e o universo. A Figura 11 mostra algumas mandalas construídas com a Régua mágica.

Figura 11 – Mandalas construídas por meio da Régua Mágica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

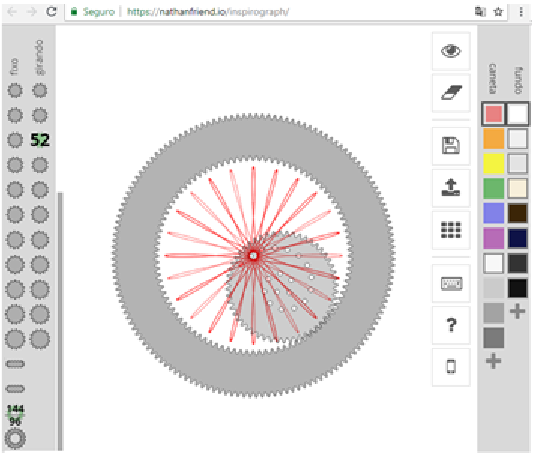
Com a habilidade apurada para construir as figuras, começamos a mostrar para os alunos como utilizar a régua, manipular corretamente as engrenagens e, com muita paciência, chegar a formar as figuras observadas anteriormente. A Figura 12 mostra um dos momentos de como criar as figuras por meio da Régua Mágica no Laboratório de Ciências.

Figura 12 – Construção das figuras com a Régua Mágica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A missão de ensinar como construir as figuras com a Régua Mágica foi bastante inovadora e satisfatória. Verificar a dedicação para chegar a um resultado que simbolize a aprendizagem e compreender as aplicações das Curvas Cicloidais é um elo que se enxerga a Matemática tão próxima do nosso cotidiano. E para se fazer as figuras com maior precisão, utilizamos, também, um recurso disponível na internet que é o Inspirograph, Figura 13, que pode ser encontrado no endereço: https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/. Com esse recurso, é possível escolher diferentes modelos de réguas, cores das linhas e do fundo, resultando numa infinidade de possibilidades de figuras. A Figura 4.8 indica um dos momentos da utilização do Inspirograph no Laboratório de Informática.

Figura 13 – Inspirograph.



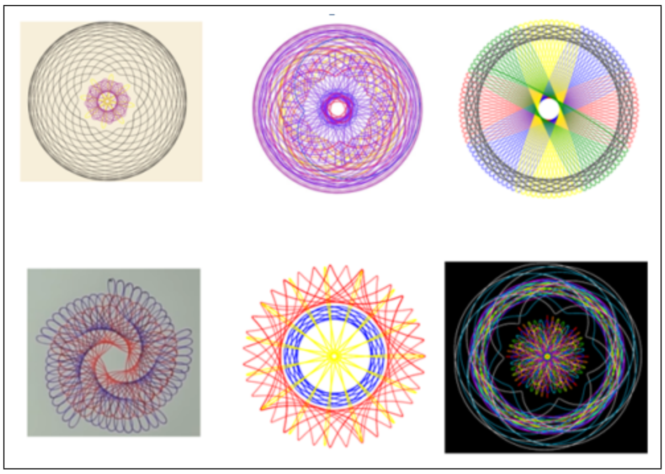
Fonte: https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/.

Figura 14 – Utilizando o Inspirograph no Laboratório de Informática.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 15, destaca-se algumas figuras (Mandalas) feitas pelos alunos com os recursos do Inspirograph.

Figura 15 – Mandalas feitas no Inspirograph.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Todo esse processo, conhecer as Curvas Cicloidais, parametrizá-las, construí-las no Geogebra, desenhá-las no papel utilizando a Régua Mágica e utilizando o Inspirograph para aprimorar as figuras, foi um trabalho desenvolvido em quatro meses. Planejamento, sequência didática, inspiração, entusiasmo, apoio da gestão escolar e de docentes, contribuíram para tornar o estudo das Curvas Cicloidais no Ensino Médio muito atrativo e despertar interesse dos nossos alunos.

Para que esse trabalho chegasse a todo o ambiente escolar, planejamos uma exposição para as Curvas Cicloidais, e que não ficasse exclusivamente voltado para os alunos do 3º Ano do Ensino Médio, por isso, a exposição foi aberta para todas as séries do Ensino médio. Mas para que isso fosse concretizado, houve uma seleção de alunos, principalmente daqueles que se destacaram no período do estudo das curvas, para divulgação e realização desse evento. Com essa visão, contamos com a participação de nove alunos que foram distribuídos em três equipes, cada equipe com a incumbência de desenvolver o trabalho de pesquisa, construção e apresentação das respectivas curvas.

Sob nossa orientação, cada grupo começou a fazer a busca da literatura sobre fatos históricos das Curvas Cicloidais, com o objetivo de aprofundar os conhecimentos adquiridos anteriormente e para, posteriormente, a confecção de cartazes descrevendo as características das curvas. A situação interessante foi perceber a união entre as equipes, valendo-se do espírito colaborativo, os componentes começaram a fazer um estudo em conjunto para a realização da tarefa de elaboração de cartazes. A Figura 16 mostra alguns dos cartazes elaborados pelos alunos.

Figura 16 – Cartazes das Curvas Cicloidais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que as Curvas Cicloidais podem ser usadas para ampliar o desenvolvimento do raciocínio matemático no Ensino Médio com facilidade.

Destacamos que apresentar a parametrização das Curvas Cicloidais, construí-las e manipulá-las no software Geogebra, compreender as propriedades e aplicações e construí-las utilizando materiais disponíveis no nosso dia-dia, foi uma experiência inovadora e geradora de grandiosa satisfação, que fez modificar nosso olhar para o ensino da Matemática.

Apesar das Curvas Cicloidais não fazerem parte da matriz curricular do Ensino Médio buscamos adaptá-las em um projeto para que os alunos das turmas da 3ª série pudessem ter a oportunidade de conhecê-las.

Com a experiência em sala de aula apresentada na Seção 3, podemos verificar que foi motivado o interesse e a curiosidade pelo estudo da Matemática, mostrando que é uma ciência dinâmica, cheia de desafios. Acreditamos que esse trabalho possa incentivar novas práticas de ensino em matemática para o Ensino Médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACTA ERUDITORUM. **Revista dos Eruditos**. Leipzig, publicada entre 1682 e 1782, por Gottfried Wilhelm Leibniz.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

BUSTILLOS, Oscar Vega, SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide**: Braquistocrona e Tautocrona. Editora: Scortecci, São Paulo, 2011.

CASTRO, Leonardo Miranda de. **O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais**. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Brasília.

CUTRIM, Raimundo José Pinto. **Curvas Planas Parametrizadas**: um ensaio para o Ensino Médio. 2015. 82f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), São Luís.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 7. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

FARINA, Carlos. **Huygens, a Helena da Geometria e o Aprisionamento do Tempo**. Universidade Federal do Rio de Janeiro (2013).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

HOHENWARTER, Markus. Introduction to GeoGebra/M. Hohenwarter. J. Hohenwarter, 2013.

JÚNIOR, José Ribamar Alves de Sousa. **O cálculo variacional e o problema da bráquistócrona** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista - UNESP,. 2010. In: TAGLIOLATO, Ana Luísa Sader. **Braquistócrona**. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual Paulista - Rio Claro.

MIYASAKI, Rodrigo. **Um Estudo de Curvas Planas Utilizando o Geogebra**. 2017. 81f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Federal de Goiás, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Goiânia.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**.(2 vols.). Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.

RAPOSO, Cláudia Sofia Carrilho Morgado. **Curvas Famosas e não só**: teoria, histórias e atividades. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores). Universidade de Lisboa - 2013.

SANTOS, Walcy; ALENCAR, Hilário. **Geometria diferencial das curvas planas**. IMPA, 2003.

STEINHAUS, H. **Instantâneos Matemáticos**, 3.ed. Nova Iorque: Dover, 1999.

VENCESLAU, Allisson Wesley do Nascimento. **Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). UFSE -2015.

WHITMAN, E. A. **Algumas anotações históricas sobre a cicloide**. The American Mathematical Monthly 1943 309-315.

Sites:

GONÇALVES, Vladimir Sicca. **Curvas, Superfícies e Arquitetura**. Disponível em: Https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/ - Acesso: 21/11/2017.

NUNES, Paulo. **Knoow net. Enciclopedia temática**. 2015. Disponível em: http://knoow.net/cienciasexactas/matematica/cardioide/ - Acesso: 10/12/2017.

VITÓRIA, Cacilda. **Universo da Vitória**. Crie Mandalas com a Régua Mágica Virtual. Disponível em: https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/ - Acesso: 16/01/2018

Capítulo 6

ESTUDO DAS RELAÇÕES ENTRE CORDAS NO CÍRCULO A PARTIR DO GEOGEBRA

Edson Bernardo de Oliveira [1]
Luiz Antônio da Silva Medeiros [2]

Resumo:
No âmbito do ensino de geometria as possibilidades do uso de recursos tecnológicos no processo de ensino são imensas. Os softwares de geometria dinâmica surgem como um instrumento propício para auxiliar o professor em sua prática pedagógica e contribuir com o processo de aprendizagem dos alunos, apresentando novos meios para o entendimento de conceitos e propriedades geométricas. Além disso, cabe observar que na educação básica pública existe certa dificuldade em se ensinar todos os tópicos de geometria pelo fato de o currículo escolar ser bastante abrangente e a parte dedicada à geometria aparecer nos últimos capítulos na maioria dos livros didáticos. Observando estes aspectos, realizamos um estudo do círculo e suas propriedades planas utilizando o software GeoGebra, oferecendo aos alunos a possibilidade de investigar problemas, levantar hipóteses e propor soluções, proporcionando a eles meios para a realização de um aprendizado significativo da matemática, tornando-os agentes do processo de construção do próprio conhecimento. Por fim, apresentamos um relato de experiência das atividades didáticas propostas aplicadas em uma turma da segunda série do ensino médio.

Palavras-chave: Círculo, GeoGebra, Ensino, Geometria.

1 INTRODUÇÃO

Os conteúdos sobre o círculo e os triângulos apresentam grandes possibilidades de exploração através da utilização de materiais concretos e softwares livres de geometria dinâmica construídos para fins didáticos.

Analisando alguns livros didáticos adotados nas escolas públicas notamos que alguns resultados envolvendo estes conteúdos são apresentados sem quaiquer demonstrações, apenas são seguidos de exercícios de aplicação das propriedades apresentadas. Não é oferecida ao aluno a possibilidade de levantar conjecturas ou estimular o raciocínio lógico dedutivo, recursos essenciais para se aprender matemática e referendados pelos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Médio.

Em conformidade com os dados observados notamos também que os conteúdos envolvendo círculos encontram-se no final dos livros didáticos e, por ser o currículo escolar da escola pública bastante abrangente, são apresentados às turmas de forma muito rápida, geralmente sem discussões aprofundadas e descontextualizadas.

É importante destacar que a Matemática do Ensino Médio não possui apenas caráter formativo ou instrumental como alerta os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. É fundamental que o aluno perceba que as definições, demonstrações

1 UFCG, edson4791@gmail.com
2 UFCG, medeiros@ufcg.edu.br

e encadeamentos conceituais e lógicos tenham a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas, PCN (BRASIL, 1999, pg. 252).

Para Eliane Aguiar (AGUIAR, 2008) o uso da tecnologia em sala de aula permite interatividade entre o aprendiz e o objeto de estudo propiciando uma participação ativa do aluno. A autora ainda afirma que a utilização e a exploração de aplicativos ou softwares computacionais em Matemática podem desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-os a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passam a ser objeto de estudo (AGUIAR, 2008, pg. 64.).

No âmbito do ensino de geometria as possibilidades do uso de recursos tecnológicos no processo de ensino são imensas. Os softwares de geometria dinâmica surgem como um instrumento propício para auxiliar o professor em sua prática pedagógica e contribuir com o processo de aprendizagem dos alunos, apresentando novos meios para o entendimento de conceitos e propriedades geométricas. Conforme comenta Giraldo (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012), os ambientes de geometria dinâmica podem ser explorados para ajudar os estudantes a expandirem sua concepção de uma representação geométrica de desenho (representação particular de um objeto isolado) para figura (representação genérica de uma classe de objetos matemáticos) - o que constitui um passo de abstração matemática. Ele afirma ainda que o computador não pode ser utilizado para validar resultados matemáticos, mas apenas para facilitar a observação de regularidades.

Reconhecendo a importância do estudo do círculo e de suas propriedades, propomos algumas atividades com o software Geogebra que estimule e favoreçe o estudo de propriedades geométricas, através de um processo de (re)descoberta coletivo, mediatizada pelo diálogo entre educador e educando e, finalmente, sistematizados em sala de aula.

Estas atividades foram aplicadas numa turma da 2ª série do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Isabel Rodrigues de Melo, escolhendo-se alguns conteúdos que consideramos relevantes na formação do educando para serem abordados durante algumas atividades de experimentação no laboratório de informática.

A metodologia escolhida para a apresentação de cada conteúdo leva em conta que os recursos computacionais, como recurso didático, exigem cuidados básicos. Tomamos como referência àqueles elencados por Rêgo e Rêgo (RÊGO; RÊGO, 2006, pg. 54). A saber:

(i) dar tempo para que o aluno conheça o software (material);

(ii) incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;

(iii) mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de questionamentos, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;

(iv) planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem o recurso (software) utilizado, para que possa ser explorado de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-lo às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo.

Objetivo Geral

Realizar o estudo do círculo e suas propriedades planas através da utilização de recursos computacionais, onde os alunos tenham a oportunidade de investigar problemas, levantar hipóteses e propor soluções, proporcionando a eles meios para a realização de um aprendizado significativo da matemática, em que os mesmos sejam agentes do processo de construção de conhecimento.

2 ATIVIDADES

Nesta seção apresentamos três atividades didáticas sugeridas em (OLIVEIRA, 2014). A escolha dessas atividades levou em conta a análise dos resultados, onde nos deparamos com a importância dos registros dos alunos e da dificuldade de se trabalhar com ambientes digitais. É importante destacar que a maioria delas faz menção a seus respectivos aplicativos, que foram previamente elaborados com a finalidade de facilitar o manuseio do computador e priorizar as reflexões acerca da aprendizagem.

Atividade 1

Com o Geogebra ativado na disposição **Geometria**, construa um círculo de centro O e raio r (Figura 1), uma corda AB concorrente com o raio OC em um ponto M. Estabeleça as medidas dos segmentos AM e BM e do ângulo $A\widehat{M}O$.

1. Com a ferramenta **Mover**, movimente o ponto C ao longo do círculo, fazendo com que $\overline{AM} = \overline{BM}$. Observe o que acontece com o ângulo $A\widehat{M}O$.

2. Com o ponteiro do mouse sobre a variável r, do controle deslizante, varie o raio do círculo e repita o processo anterior, verificando se existe algum padrão nos resultados observados.

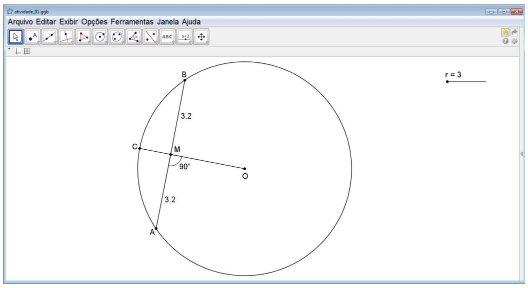


Figura 1 – Aplicativo 1

3. Utilizando novamente a ferramenta **Mover**, mova o ponto C ao longo do círculo fazendo com que o ângulo $A\widehat{M}O$ seja reto. Observe o que ocorre as medidas $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$.

4. Varie o raio r do círculo, a partir do controle deslizante, e repita o Item anterior, verificando se existe algum padrão nos resultados observados.

5. Registre suas observações.

Atividade 2

Utilizando a disposição **Geometria** do Geogebra, construa um círculo de centro O e raio r (Figura 2), um raio OP e uma reta t tangente ao círculo no ponto P.

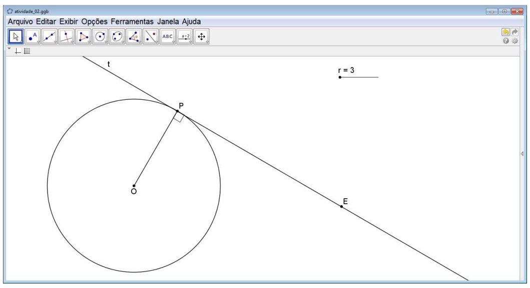


Figura 2 – Aplicativo 2

1. Utilizando a ferramenta **Mover**, modifique a posição do ponto E da reta t fazendo com que o ponto P percorra o círculo.

2. Observe o ângulo entre a reta tangente e o raio do círculo no ponto P. Verifique se existe alguma regularidade.

3. Amplie e reduza o raio r círculo com o controle deslizante, repetindo o processo anterior. Observe o que ocorre e anote os resultados.

Atividade 3

Abra o Geogebra na disposição **Geometria** e construa um círculo de centro O e raio r, uma reta perpendicular ao raio OP no ponto P.

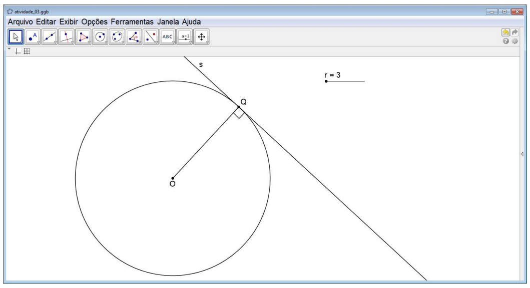


Figura 3 – Aplicativo 3

1. Com a ferramenta **Mover**, movimente o ponto Q ao longo do círculo, observando a posição da reta em relação ao círculo. Faça anotações dos dados observados.

2. Varie o raio r do círculo, a partir do **Controle Deslizante**, deslocando o ponto Q ao longo do círculo. Verifique se o resultado permanece.

Atividade 4

Com o Geogebra ativado na disposição **Geometria**, construa um círculo de centro O e raio r. Desenhe um ângulo inscrito $B\widehat{A}C$ e o ângulo central correspondente $B\widehat{O}C$ e exponha as medidas dos dois ângulos.

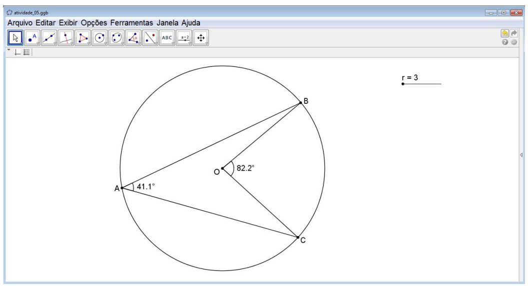


Figura 4 – Aplicativo 4

1. Com a ferramenta **Mover** mova os pontos A, B e C sobre o círculo, registrando a relação existente entre o ângulo inscrito e o ângulo central.

2. Com o controle deslizante modifique o raio r do círculo e verifique se o resultado anterior se mantém.

Atividade 5

1. Com a ferramenta **Polígono** desenhe um triângulo MNP.
2. Utilizando a ferramenta **Mediatriz**, estabeleça as mediatrizes do triângulo ABC.
3. Obtenha o cincuncentro C (o ponto de encontro das mediatrizes) a partir do botão **Interseção de dois objetos**.
4. Oculte as mediatrizes, mantendo o cincuncentro destacado.
5. Utilizando a ferramenta **Reta perpendicular**, estabeleça as alturas do triângulo ABC selecionando um lado e seu vértice oposto.
6. Obtenha o ortocentro G (o ponto de encontro das alturas) a partir do botão **Interseção de dois objetos**.
7. Oculte as alturas, mantendo o ortocentro destacado.
8. Utilizando as ferramentas **Ponto Médio ou centro** e **Segmento definido por dois pontos**, estabeleça as medianas do triângulo ABC, selecionando o ponto médio de cada lado do triângulo com seu vértice oposto.
9. Obtenha o baricentro H (o ponto de encontro das medianas) a partir do botão **Interseção de dois objetos**.
10. Oculte as medianas, mantendo o baricentro destacado.
11. Estabeleça a reta definida pelos pontos C e H. Isto pode ser obtido com o botão **Reta definida por Dois Pontos**.
12. Modifique o triângulo, movendo seus vértices com o botão **Mover**. Observe o que acontece com os pontos C, G e H.
13. Existe alguma relaçao entre os pontos C, G e H?
14. Com a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** trace os segmentos HG e GC, exibindo suas medidas.
15. Modifique novamente o triângulo, movendo seus vértices. Compare novamente as medidas dos segmentos HG e GC. A relação anterior permanece? Qual é a sua conclusão?

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Antes do início das atividades sobre os conteúdos abordados sugerimos duas aulas para que os alunos familiarizem com o Geogebra. Recomendamos ainda alguns cuidados:

1. As atividades propostas não devem apresentar indicação de resposta.
2. A menos que tenha sido dito o contrário, que as medidas referenciadas nas atividades com o computador sejam mantidas com aproximação de duas casas decimais.
3. Solicitar o registro escrito das anotações observadas na pesquisa. Esse procedimento favorece uma análise mais rigorosa e permite ao aluno a possibilidade de comparar seus resultados. É interessante, sempre que possível, instigar os alunos sobre a validação dos resultados registrados pela turma ou a apresentação de contra-exemplos que provem que as conjecturas levadas na experimentação estavam equivocadas.
4. Ao final de cada atividade, discutir as conjecturas levantadas pelos estudantes, tendo em vista estabelecer a sistematização do raciocínio matemático dedutivo.

Cabe aqui uma observação: alguns resultados não foram demonstrados durante a realização das aulas na sala de informática porque o tempo programado para realização das atividades não foi suficiente, nestes casos precisamos escolher as propriedades consideradas mais importantes para apresentar sua prova formal. Porém, os alunos foram informados da importância de argumentos matemáticos para validar todas as conjecturas, e foram informados sobre as fontes em que poderiam encontrar tais demonstrações.

3.1 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Ao realizarem a primeira atividade, os alunos receberam instruções para mover o ponto C ao longo do círculo, tornando os segmentos AM e BM congruentes. A princípio, os estudantes encontraram dificuldades para fazer com que os segmentos AM e BM tivessem mesma medida; depois que conseguiram, na maioria dos grupos os aplicativos mostravam um ângulo aproximadamente igual a 90^o, em alguns havia centésimos a mais e em outros centésimos a menos. Foi necessário informá-los neste momento das limitações do software e de que em um experimento os resultados obtidos nem sempre são exatos, era necessário, portanto, fazer aproximações. Transcorrido certo tempo, alguns deles conjecturaram que quando $\overline{AM} = \overline{BM}$, o ângulo $A\widehat{M}O$ media 90°. Expandindo e contraindo o círculo verificaram que os resultados se mantinham. Ao final, apenas um aluno não registrou suas conclusões. Os demais conseguiram concluir corretamente o resultado. Quando questionado depois da aula sobre porque não registrou suas conclusões referentes à primeira atividade o aluno informou que foi apenas por displicência.

Em seguida, os alunos deveriam mover o ponto C sobre o círculo fazendo com que o ângulo $A\widehat{M}O$ fosse reto. Todos observaram que quando o referido ângulo media 90^o, ocorria sempre $\overline{AM} = \overline{BM}$. Variaram o tamanho do círculo verificando que a regularidade continuava.

A segunda atividade consistia de um aplicativo envolvendo um círculo e uma reta tangente a ele. O objetivo era observar a regularidade existente quando se movia o ponto de tangência. Depois de observado que havia um ângulo de 90º, modificaram o raio do círculo e constaram que o ângulo era invariável. A esta conclusão todos chegaram. Embora alguns tenham escrito "O ângulo entre o círculo e a reta tangente é sempre igual e 90º" (Figura 5). Sabemos que se trata do ângulo entre a reta tangente ao círculo e raio no ponto de tangência. Confusões entre os elementos geométricos são causados normalmente pela pouca experiência no estudo de geometria. Neste caso o professor deve estar atento para sugerir melhoras na redação do texto.

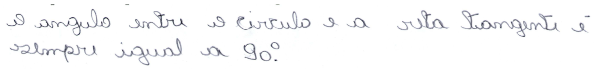


Figura 5 – Escrita de aluno

Na terceira atividade, os alunos deveriam observar o que ocorre quando uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade. Modificaram a posição do ponto de tangência, e constataram que a reta era tangente ao círculo. Ampliaram e reduziram o círculo percorrendo novamente o ponto sobre o círculo e perceberam que o padrão permanecia. Um aluno questionou porque quando a reta é tangente ao círculo parece haver um segmento comum entre a reta o círculo (Figura 6). Com intervenção do professor foram instruídos a ampliarem o círculo para constatarem que o mencionado "segmento" diminuía à medida que o raio do círculo aumentava, verificando que não se tratava de fato de um segmento de reta, mas era apenas uma visualização ilusória provocada pelas limitações do software. Este é um caso em que características da figura são incorporadas pelos estudantes com sendo propriedades do objeto geométrico, que é abstrato. Devemos lembrar que tanto o círculo quanto a reta não possuem espessura, fato que não ocorre qualquer de suas representações, sejam elas construídas manualmente ou com a utilização de recursos computacionais.

Foram demonstradas as proposições referentes às atividades. Os alunos acharam estranho a necessidade de prova formal, uma vez que haviam tirado suas conclusões através da utilização do software. Uma reação esperada, como ilustra Borba (BORBA; PENTEADO, 2012): "A imagem mostrada pelo computador tem um poder muito

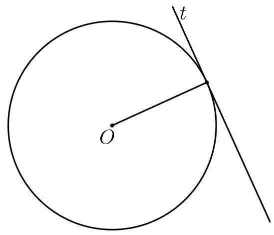


Figura 6 – Reta tangente a um círculo

grande de convencimento". Mencionamos que a janela de visualização fornecida pelo software não substitui o plano euclidiano, por ser apenas uma representação finita dele. Estas e outras limitações da máquina são motivos suficientes para observar que não devemos utilizar recursos tecnológicos para validar resultados matemáticos, mas sim para observar e conjecturar propriedades.

A quarta atividade tinha por objetivo determinar a relação entre um ângulo inscrito e o ângulo central correspondente. Com a manipulação do aplicativo, os alunos observaram que o ângulo inscrito possuía medida menor do que o ângulo central. Alguns disseram apenas que os ângulos eram diferentes. Para que os alunos atingissem o objetivo foi necessária e intervenção do professor. Depois de mais algum tempo conseguiram conjecturar de que a medida do ângulo inscrito era a metade da medida do ângulo central. Quatro deles mantiveram a resposta inicial, como podemos observar na Figura 7, a resposta de um deles.

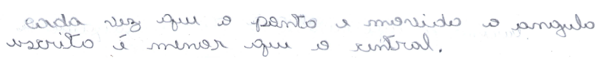


Figura 7 – Escrita de aluno

Um fator que certamente interferiu nas respostas desses alunos foi o fato do Geogebra estar configurado para operar com duas casas decimais de aproximação. Com efeito, quando o ângulo central tinha medida ímpar o software dava como resultado um ângulo inscrito que não correspondia à metade do ângulo central. Para corrigir essa diferença o professor tinha que interferir e solicitar aos alunos que aumentassem em uma casa decimal de aproximação e analisar os novos resultados.

Na quinta atividade, os alunos construíram um triângulo ABC marcando nele o circuncentro C, o baricentro G e o ortocentro H. Eles deveriam descobrir a relação existente entre os pontos C, G e H. Seguindo instruções, utilizaram os recursos do Geogebra para ocultar as retas, deixando visíveis apenas o triângulo e pontos C, G e H. Manipularam bastante a figura para observar que os pontos sempre estavam alinhados. Foram informados de que a reta que passa por estes três pontos é conhecida como *reta de Euler*.

Faltava concluir que $\overline{HG} = 2\overline{GC}$. Para que isto fosse possível foi necessário orientá-los a explicitar as medidas desses segmentos. Depois de modificaram o triângulo movendo seus vértices, quatro deles observaram apenas que $\overline{HG}$ era maior do que $\overline{GC}$ na Figura 8 temos um exemplo disso, os demais alunos da turma chegaram à conclusão esperada.

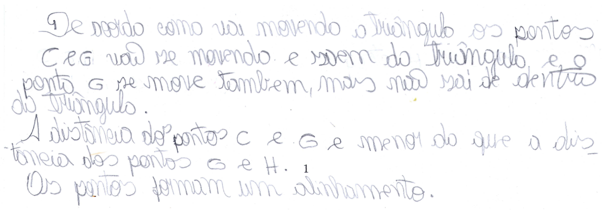


Figura 8 – Escrita de aluno

Durante a realização dos experimentos pudemos observar que os aplicativos servem para otimizar o tempo dedicado à realização das atividades, permitindo que se explore mais a capacidade de argumentação dos estudantes, enquanto as atividades de construção favorecem a familiarização deles com os conceitos geométricos e as propriedades intrínsecas das figuras planas. Dessa forma, o professor pode optar por utilizar um aplicativo ou uma atividade de construção, dependendo dos objetivos que pretende alcançar com a realização da atividade.

4 CONCLUSÕES

Durante a realização dos experimentos pudemos observar que os aplicativos servem para otimizar o tempo dedicado à realização das atividades, permitindo que se explore mais a capacidade de argumentação dos estudantes, enquanto as atividades de construção favorecem a familiarização deles com os conceitos geométricos e as propriedades intrínsecas das figuras planas. Dessa forma, o professor pode optar por utilizar um aplicativo ou uma atividade de construção, dependendo dos objetivos que pretende alcançar com a realização da atividade.

Muitas situações surgiram durante a pesquisa e algumas delas exigiram a intervenção do professor, sejam quando um aluno se afastava do resultado a que deveria chegar ou quando ele analisava apenas parte do problema. Mesmo tendo planejado as atividades, algumas situações inesperadas ocorreram. Borba (BORBA; PENTEADO, 2012) chama de zona de risco os caminhos incertos provocados pelo uso da tecnologia na sala de aula, momento em que até mesmo o professor sai da sua zona de conforto e necessita refletir sobre os acontecimentos observados. Mesmo que o professor procure evitar problemas técnicos durante o desenvolvimento de suas aulas, surgirão as perguntas imprevisíveis ocasionadas pela utilização de um comando errado ou devido à limitação do software, quando uma simples representação gráfica contraria nossa intuição, como àquela em que o aluno questionou porque no Geogebra uma reta e uma circunferência parecem ter mais de um ponto comum. Em situações dessa natureza, as características da figura plana podem ser incorporadas como sendo do objeto geométrico que elas representam.

A utilização do Geogebra como recurso didático apresentou múltiplas possibilidades tanto para a prática docente quanto para o processo de aprendizagem. Observamos que com esta ferramenta o professor tem a oportunidade de apresentar os tópicos de geometria plana de forma ágil e eficiente, com figuras em movimento que favorecem a visualização de propriedades e permitem desconstruir algumas ideias equivocadas consideradas verdadeiras pelos alunos, como a de que o circuncentro está sempre no interior do triângulo ou que os pontos de base das alturas estão sempre sobre os lados do triângulo, normalmente provocadas pela apresentação de figuras estáticas e particulares dos objetos geométricos apresentadas nos livros-texto. Além disso, os alunos sentem-se motivados a trabalhar com aplicativos que lhes apresentam as invariantes através do recurso visual interativo, onde têm a oportunidade de experimentar, levantar hipóteses e produzir argumentos para justificar suas conclusões, seguindo o caminho natural de descoberta dos resultados matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino - aprendizagem. **Revista Vertices**, http://essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/vertices/article/view/1809-2667.20080006/26, v. 10, n. 1, p. 64–71, 2008.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 104 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999. 364 p.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423 p.

OLIVEIRA, E. B. d. **Estudo das relações entre cordas no círculo a partir do GeoGebra**. 71 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Campina Grande, https://sca.profmat-sbm.org.br/sca$_{v}2/get_{t}cc3.php?id = 415, 2014$.

RÊGO, R. M. do; RÊGO, R. G. do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (Ed.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 1. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39–56.

Capítulo 7

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: UMA ANÁLISE COM ESTUDANTES DO ENSINO SUPERIOR

Antonio Alison Pinheiro Martins[1]
Antonio José da Silva[2]
Ana Gabriela Rodrigues Cardoso[3]

Resumo: Este artigo se propôs a analisar a os registros de estudantes do ensino superior sobre o conceito de vetor e sua relação com conceitos da Geometria Analítica. A estrutura metodológica consistiu na coleta e análise de resoluções de questões sobre Vetores. A pesquisa ocorreu em duas etapas. Na primeira os estudantes responderam um questionário contendo questões que envolvem os conceitos de vetores. Na segunda etapa foi realizada uma entrevista tomando por base as respostas obtidas na primeira etapa. A análise dos dados ocorreu mediante o exame das respostas, buscando identificar os conceitos da Geometria Analítica estudados na educação básica que fundamentam conceitualmente o estudo da Álgebra de Vetores. Os alunos apresentaram definições próprias e ao mesmo tempo embasadas na teoria. Verifica-se que conceitos matemáticos vistos no ensino médio são suscitados com frequência para fundamentar o estudo de vetores.

Palavras-chave: Ensino médio, Geometria Analítica, Vetores.

1 INTRODUÇÃO

O tema "Vetores" é constantemente estudado nos cursos superiores de Matemática e Física, sendo utilizado tanto para desenvolver conceitos, quanto para representar grandezas físicas. Com isso, este trabalho pretende fazer uma análise do conhecimento construído por alunos de graduação sobre geometria analítica e vetores.

Pretende-se conhecer como os alunos desenvolvem os conceitos relacionados a vetores a partir de temáticas estudadas na Geometria Analítica, ou seja, entender quais as contribuições da Geometria Analítica, estudada no ensino médio, para o estudo de vetores no nível superior. Assim, tem-se como objetivo geral, analisar os conhecimentos apresentados por discentes do ensino superior sobre geometria analítica e vetores, fazendo uma ligação dos conteúdos abordados desde os primeiros conceitos de geometria analítica, estudados na educação básica, até o estudo de vetores no plano e no espaço, estudados o Ensino Superior.

2 ALGUMAS PESQUISAS

Existem muitas grandezas que estão associadas a vetores, estas, são chamadas de grandezas vetoriais (WINTERLE, 2014). Geralmente, o conceito de vetor está no

1 IFPA, alison.martins@ifpa.edu.br
2 UFMA, antonio.silva@ufma.br
3 IFMA, ana.cardoso@ifma.edu.br

currículo vigente da Física na primeira série do Ensino Médio. Mas apesar do tema "Vetores", aparecer inicialmente nos livros didáticos da Física, o conceito de vetor é matemático. Sobre esse problema, é feita uma observação, no livro "Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio", lançado em 2001 pela SBM de autoria do professor Elon Lages Lima.

Em Lima (2001) são apresentadas as conclusões de uma análise sobre doze coleções de livros didáticos da matemática usados no ensino médio no Brasil. Segundo Lima (2001, p.130): "[$\cdots$] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para o ensino médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática". Sendo assim, constata-se que os conceitos matemáticos sobre vetores não são estudados em livros de matemática do ensino médio no Brasil, quando ocorre é por meio de apostilas.

Rigonatto (2018) apresenta uma proposta de inclusão do estudo de vetores no ensino médio, com o intuito de oferecer uma possibilidade mais ampla e clara para algumas demonstrações matemáticas em tal nível de estudo. O mesmo desenvolve todo o conceito de vetores no plano, desde a noção de segmentos equipolentes até a de autovalores e autovetores no R^2 e faz a demonstração de 11 exemplos de relações matemáticas estudadas no ensino médio usando as ideias de vetores apresentadas na sua fundamentação teórica.

Lucas (2017) apresenta uma proposta voltada para a inclusão de vetores no ensino médio a partir da elaboração de uma sequência didática na qual deverá ser aplicada no primeiro ano. Nesta proposta, o autor sugere a realização de sete atividades que envolvem os conceitos matemáticos de vetores, onde, ao aplicar em sala de aula o professor deverá fazer uso do software Geogebra junto à sequência Fedathi com intuito de favorecer o ensino e a aprendizagem. Objetiva-se permitir que os alunos abordem dados do problema, experimentem vários caminhos que podem levar à solução, analisem os possíveis erros, testem os resultados, e montem um modelo. Após cada atividade o professor deverá apresentar aos alunos as definições formais sobre os conceitos abordados na atividade.

Por fim, Cabral (2014) realiza uma análise dos conteúdos apresentados em doze livros didáticos destinados ao ensino médio. Nesse estudo o autor observa como os livros selecionados apresentam a Geometria Analítica e abordam a noção de vetores. Apresenta uma forma alternativa para o ensino de Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio, utilizando como ferramenta, o estudo de vetores no plano e no espaço, o que possibilitará uma melhor apresentação e compreensão dos conteúdos de geometria, bem como a facilitação na resolução de problemas.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para a realização desta pesquisa foi aplicado um questionário e em sequência as entrevistas exploratórias dos conceitos tratados sobre o tema vetores. Foi proposto conhecer a qualidade da relação dos conceitos da geometria analítica no processo de conceituação de elementos da álgebra de vetores e sua representação. Buscou-se compreender como os alunos do ensino superior apresentam os conceitos de vetores a partir de seus estudos realizados no ensino médio, em especial o estudou sobre Vetores e as contribuições da Geometria Analítica. Esta pesquisa foi realizada com nove estudantes do curso superior de Física de uma Instituição de Ensino Superior (IES) no Estado do Pará. A aplicação ocorreu durante a disciplina álgebra linear I. A participação foi por adesão.

Os processos de pesquisa e análise foram organizados em duas etapas. Na primeira etapa, um questionário foi aplicado em sala com estudantes. Os estudantes responderam as questões individualmente, eram questões conceituais e aplicações de conceitos. As respostas foram corrigidas e organizadas. Na segunda etapa, foi realizada uma entrevista individual com os discentes participantes da pesquisa. Nessa oportunidade os alunos foram questionados e puderam explicar e sustentar as argumentações sobre as respostas dadas no questionário. Nesta etapa alguns alunos se expressaram também por representação gráfica no quadro branco.

4 RESULTADOS

Foi solicitado aos discentes que respondessem um questionário contendo onze questões. Para cumprir os objetivos desta pesquisa, analisaremos as cinco primeiras questões. Os resultados apresentados correspondem às análises realizadas a partir das repostas dadas pelos estudantes, tanto no questionário quanto nas entrevistas individuais. Nas análises buscou-se compreender como os discentes expressavam suas compreensões sobre o conceito de vetor.

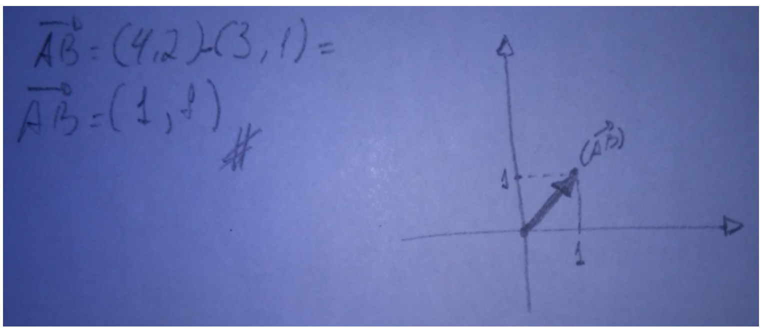
Questão 1: O que é um vetor? E1 desenvolve o conceito de vetor como um segmento de reta com sentido, módulo e direção. O mesmo compreende o que é o módulo, a direção e o sentido e representa corretamente um vetor. E2 desenvolve o conceito de vetor a partir de exemplos da física na qual é habituado a trabalhar. O mesmo não sabe dizer que o vetor é um segmento orientado, no entanto, desenha corretamente o vetor como um segmento orientado. O estudante compreende o que é o módulo de um vetor, porém, troca a direção com o sentido. E3 não sabe descrever o que é um vetor, porém, compreende que o vetor é representado por um segmento orientado e que o mesmo tem sentido, comprimento e orientação. E4 desenvolve o conceito de vetor como um segmento de reta com sentido, módulo e direção. O mesmo diz que o vetor é uma reta, no entanto, desenha como um segmento orientado de origem em A

e extremidade em B na qual dá orientação a um corpo em determinada condição. O estudante compreende o que é o módulo, a direção e o sentido de um vetor. Para E5, o vetor é formado por dois pontos que formam uma reta, no entanto, desenha como um segmento orientado. O mesmo compreende que a extremidade de um segmento orientado indica o sentido do vetor. Para E6, o vetor é uma reta que apresenta módulo, direção e sentido, no entanto, representa o vetor como um segmento orientado. O mesmo indica corretamente o módulo e o sentido de um vetor, porém não indicar corretamente a direção. E7 compreende que o vetor é uma grandeza que possui módulo, direção e sentido. O mesmo representa o vetor como um segmento orientado e apresenta o módulo como o comprimento do vetor, no entanto, entende que o vetor é uma reta e troca o sentido como a direção. E8 que o vetor é um segmento orientado que possui módulo, direção e sentido. E9 compreende que o vetor é uma orientação que indica sentido, direção e módulo. O mesmo representa o vetor como um segmento orientado e entende o que é o módulo, o sentido e a direção, no entanto, diz que o vetor é uma reta.

Na Questão 1 há sucesso nas respostas, mas fica evidenciada a dificuldade apresentada pelos discentes em diferenciar direção e sentido. Erroneamente é feita a associação do vetor como uma reta ou apresentam a noção de vetor como um segmento orientado, o que reforça a necessidade de se aprofundar os estudos no conceito matemático de vetor, bem como seu estudo de forma abstrata, em princípio dissociada de qualquer ideia geométrica.

Questão 2: Represente no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$, onde $A = (3,1)$ e $B = (4,2)$. E1 determina que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(1,1)$ e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(1,1)$. No entanto reconhece que o vetor pedido é o com origem no ponto A e extremidade no ponto B. O mesmo representa corretamente pontos no plano cartesiano. Inicialmente E2 determina que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(1,1)$ e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(1,1)$. No entanto, posteriormente, o mesmo representa no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B. O estudante conclui que o vetor de origem em $(0,0)$ e extremidade em $(1,1)$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, ver Figura (1).

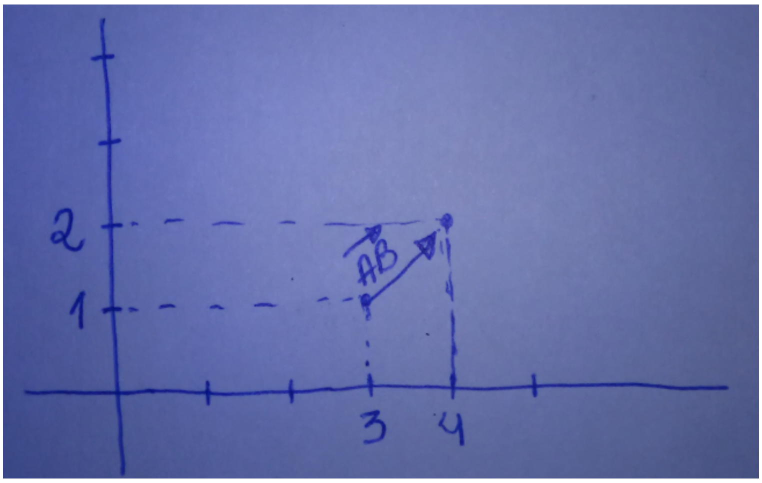
Figura 1 – Resposta da questao 2 do Estudante 2



Fonte: Autoria Própria.

E3 determina que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(1,1)$ e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(1,1)$. No entanto quando traça no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B conclui que os vetores de origem em $(0,0)$ e extremidade em $(1,1)$ e o vetor $\overrightarrow{BA}$ são iguais. Inicialmente E4 determinar que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(7,3)$, calcula a norma e representa no plano cartesiano o vetor com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade em um ponto na qual não define as coordenadas. Posteriormente, quando representa no plano os pontos A e B, traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem em A e extremidade em B e compreende que este é o vetor pedido na questão. E5 representa no plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B, ver Figura (2).

Figura 2 – Resposta da questao 2 do Estudante 5



Fonte: Autoria Própria.

Inicialmente E6 determina o o vetor usando as coordenadas dos pontos A e B. Posteriormente, quando representa no plano os pontos A e B, traça o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem em A e extremidade em B e compreende que este é o vetor pedido na questão. E7 representa o vetor $\overrightarrow{AB}$ como um segmento orientado que passa pelos pontos A e B. O mesmo entende que uma reta AB é o mesmo que B–A. Inicialmente E8 determina que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(1,1)$ e representa no plano cartesiano o vetor de origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(1,1)$. No entanto, posteriormente, o mesmo representa no plano o vetor $\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto B. Inicialmente E9 determina que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas iguais a $(1,1)$, com origem no ponto A e extremidade no ponto B.

Na Questão 2 é possível observar certa confusão ao representar o vetor e seu representante no plano como um segmento orientado. A maioria soube calcular e representar o vetor. Mas percebe-se ainda a dificuldade em compreender o conceito de vetor quando se analisa o sentido. Novamente ocorre a tentativa de conceituação de vetor como uma reta. De modo geral percebeu-se o entendimento de que o vetor tem sua origem em um ponto de coordenadas $(0,0)$.

Questão 3: Represente no plano dois representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$. E1 representa o vetor com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(2,2)$ e o vetor com origem no ponto $(0,0)$ e extremidade no ponto $(3,3)$. Posteriormente, determina que o vetor $B-A$ é um representante de $\overrightarrow{AB}$, com isso, concluiu que errou o tamanho do vetor. E2 representa no plano cartesiano o vetor $\overrightarrow{AB}$, e outro com origem no ponto $(1,1)$ e extremidade no ponto $(2,2)$. O mesmo compreender o que são vetores representantes, no entanto, ainda troca o sentido com a direção de um vetor. E3 compreende que o vetor de origem em $(0,0)$ e extremidade em $(1,1)$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, no entanto, não consegue fazer outros representantes no plano. E4 representa no plano cartesiano o vetor com origem em $(0,0)$ e extremidade em $(1,1)$ e compreende que este é um representante de $\overrightarrow{AB}$. O mesmo indica que o vetor é um conjunto de segmentos orientados equipolentes, no entanto, não relaciona estes segmentos equipolentes aos representantes de um vetor. O estudante não consegue fazer uma representação no plano cartesiano de conjunto de vetores equipolentes de um segmento orientado. E5 representa no plano cartesiano o vetor com origem no ponto $(3,3)$ e extremidade no ponto $(4,4)$ e o vetor com origem no ponto $(-3,2)$ e extremidade no ponto $(-2,3)$. O mesmo compreender o que são vetores representantes e que é possível fazer mais de dois vetores representantes no plano cartesiano. E6 representa no plano cartesiano o vetor com origem no ponto $(1,3)$ e extremidade no ponto $(2,4)$ e o vetor com origem no ponto $(1,1)$ e extremidade no ponto $(2,2)$. No entanto, não sabe o que são vetores representantes. E7 compreende que vetores representantes são vetores iguais e que é possível representar mais de um representante de um vetor no plano cartesiano. O mesmo indica que o vetor com origem no ponto $(4,1)$ e extremidade no ponto $(5,2)$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. E9 entende que para determinar os representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$ basta deslocar este vetor no plano. O mesmo indica que o vetor com origem no ponto $(1,1)$ e extremidade no ponto $(2,2)$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

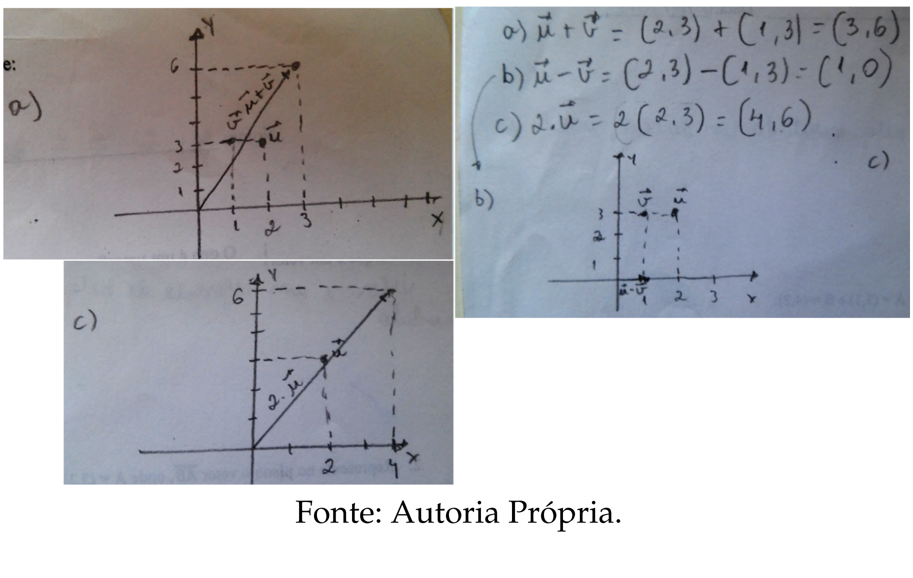
Na questão 3 em geral as representações ocorreram de forma correta, havendo em um caso ou outro, erros conceituais sobre o sentido do vetor, havendo ainda que não soubesse representar o vetor a partir de seus representantes no plano, o que demonstra ainda dificuldade ao tentar conceituar vetor.

Questão 4: Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{u} = (-3,2,1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,3,2)$. E1 não sabe representar pontos no espaço, com isso não fez corretamente a questão. E2 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, e como não apresenta dificuldades em localizar pontos no espaço, representa corretamente o vetor de origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$ e o vetor de origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto $(1,3,2)$. E3 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, e representa corretamente o vetor de origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$ e o vetor de origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto $(1,3,2)$. E5 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, representa o vetor $\overrightarrow{u}$ corretamente com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$, no entanto, representa o vetor $\vec{v}$ com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto $(1,3,0)$ sendo que tal vetor tem origem no ponto $(0,0,0)$ e extremidade no ponto $(1,3,2)$. O mesmo sabe identificar nos eixos Ox,Oy e Oz as coordenadas de um vetor, porém, apresenta dificuldades ao traçar o segmento orientado. E6 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$. E7 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$ e o vetor $\vec{v}$ com o com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(1,3,2)$. E8 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, representa o vetor $\vec{u}$ corretamente com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(-3,2,1)$ e o vetor $\vec{v}$ com o com origem no ponto $(0,0,0)$ e extremo no ponto $(1,3,2)$. E9 constrói corretamente o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, indica corretamente as coordenadas do vetor nos eixos x,y e z, no entanto, não sabe representar vetores no espaço.

Na Questão 4 é possível notar que os erros ao tentar representar os vetores no $\mathbb{R}^3$ ocorreram devido à dificuldade apresentada pelos discentes ao representar pontos no eixos Ox, Oy e Oz, ou ainda, relacionar esses pontos no sistema de eixos ortogonais de modo a obter a extremidade do vetor, uma falta conceitual, cuja origem reside nas primeiras aulas de Geometria Analítica.

Questão 5: Dado os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Determine: a) $\vec{u} + \vec{v}$ e sua representação no plano; b) $\vec{u} - \vec{v}$ e sua representação no plano; c) $2\vec{u}$ e sua representação no plano. E1 desenvolve as operações de $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ e $2\vec{u}$ corretamente. O mesmo compreende como as operações entre os vetores são representadas no plano cartesiano e como se dá a representação geométrica de $\vec{u} + \vec{v}$. No entanto, não sabe fazer a representação geométrica do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ e tais representações no plano cartesiano usando as coordenadas dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, ver Figura (3).

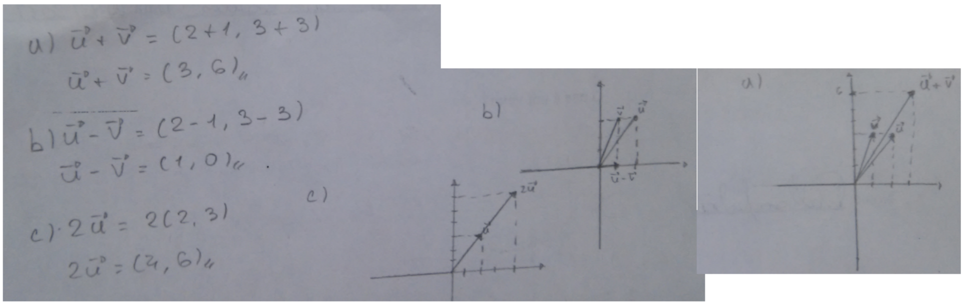
Figura 3 – Resposta da questao 5 do Estudante 1



Fonte: Autoria Própria.

E2 desenvolve corretamente as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, quando acompanhados dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não representa corretamente $\vec{u}-\vec{v}$. Para o estudante os vetores de $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ têm o mesmo módulo e direção, no entanto sentidos opostos. E3 desenvolve corretamente as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não desenvolve corretamente a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$, assim como no plano cartesiano usando as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$, ver Figura (4).

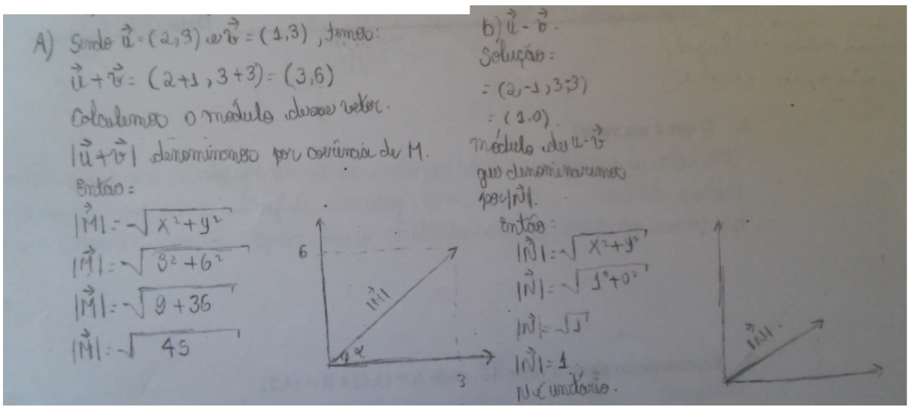
Figura 4 – Resposta da questao 5 do Estudante 3



Fonte: Autoria Própria.

E4 desenvolve corretamente as operações de $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$. O mesmo compreende como o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é representado no plano cartesiano e como se dá a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$, no entanto, não consegue realizar no plano cartesiano tal representação geométrica usando as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$. O estudante não localiza corretamente no plano o vetor $\vec{u}-\vec{v}$ e nada apresenta sobre o vetor $2\vec{u}$, ver Figura (5).

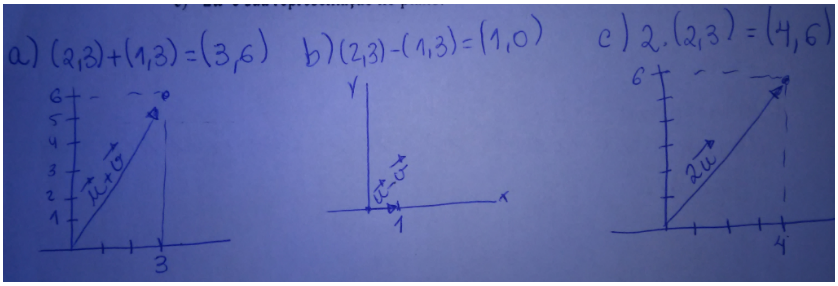
Figura 5 – Resposta da questao 5 do Estudante 4



Fonte: Autoria Própria.

E5 desenvolve corretamente as operações de $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ e $2\vec{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não desenvolve corretamente a representação geométrica de $\vec{u}+\vec{v}$, assim como no plano cartesiano usando as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}$, ver Figura (6).

Figura 6 – Resposta da questao 5 do Estudante 5



Fonte: Autoria Própria.

E6 desenvolve corretamente as operações de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. E7 desenvolve corretamente as operações de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. E8 desenvolve corretamente as operações de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$. O mesmo compreende como os vetores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$ são representados no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação geométrica de $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$. E9 desenvolve corretamente as operações de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$. O mesmo compreende como o vetor $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é representado no plano cartesiano. Porém, não sabe fazer a representação de $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{u}$ no plano e a representação geométrica de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.

Ao observar as respostas dadas para a Questão 5, nota-se que os discentes realizam corretamente as operações algébricas de soma de vetores e produto por escalar, ambas no $\mathbb{R}^2$. Mas nota-se que a dificuldade ainda é a representação dos vetores no sistema $\mathbb{R}^2$, da mesma forma como ocorreu nas representações de vetores no sistema $\mathbb{R}^3$. Essa dificuldade se manifesta não somente na representação de vetores já identificados no preâmbulo da questão, mas também nas formas: Soma de dois vetores, diferença entre dois vetores e produto de um vetor por um escalar.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da realização deste trabalho, procurou-se apresentar uma análise dos conhecimentos sobre vetores e geometria analítica em estudantes de um curso superior. Fez-se um estudo de sobre a relevância de conceitos da geometria analítica, abordados na educação básica, para o estudo de vetores no plano e no espaço.

Os conhecimentos observados se mostraram bem diversos, alguns posicionamentos acertados pelo espectro conceitual, mas outros em tanto. Os alunos apresentaram por ora, definições próprias e ao mesmo tempo embasadas na teoria. Verifica-se que conteúdos matemáticos vistos no ensino médio são suscitados com frequência para fundamentar conceitos de vetores. Conceitos como: representação de pontos sistemas coordenados, distâncias, e até mesmo função, são de grande relevância para a construção de conceitos matemáticos sobre vetores. Fica evidente a importância de conceitos da Geometria Analítica para a construção desse conceito tão importante não só para a matemática, mas para as ciências de um modo geral.

De forma despretensiosa, este trabalho, buscou também reunir, conceitos e relações entre a Geometria Analítica e os fundamentos da Álgebra Vetorial. Reunimos também formas de expressão dos conhecimentos oriundas de discentes, o que com certeza direciona a ação docente, de modo a identificar possíveis entendimentos e dificuldades conceituais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

CABRAL, Raquel Montezuma Pinheiro. **Introdução do Estudo de Vetores no Ensino Médio:** Um Ganho Significativo para o Estudo da Geometria Analítica. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 3**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LUCAS, César Marcos do Nascimento. **Elaboração de uma Sequência de Ensino de Vetores por Meio da Sequência Fedathi e Exploração de suas Representações com Uso do Geogebra**.2017. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2017.

RIGONATTO, Marcelo. **Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio**. 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: PEARSON, 2014.

Capítulo 8

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO E LEMA DE KAPLANSKY APLICADOS EM PROBABILIDADE

Ana Gabriela R. Cardoso[1]
Josenildo de Souza Chaves[2]
Anselmo B. Raposo Jr.[3]

Resumo: Apresentamos neste trabalho técnicas de contagem que são fundamentais na solução de muitos problemas de probabilidade. Destacamos aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão e os Lemas de Kaplansky. Os exemplos explorados motivam o uso desses métodos de contagem no Ensino Médio.

Palavras-chave: Métodos de Contagem, Princípio da Inclusão e Exclusão, Probabilidade, Ensino Médio.

1 INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática Discreta que inclui outras técnicas de contagem além daquelas comumente apresentadas no Ensino Médio. Em sala de aula é muito frequente a pergunta dos alunos, "O que é Combinatória?". Observamos que a abordagem desenvolvida em sala de aula, na maioria das vezes, é feita com a aplicação de definições e resolução de problemas com raciocínios repetitivos. Este tema envolve outras técnicas que contribuem no desenvolvimento de ideias capazes de levar a soluções de problemas de contagem em diversas áreas da Matemática. Por exemplo, em Probabilidade, Teoria dos Números, Teoria dos Conjuntos e Geometria.

Apesar de termos como principal ferramenta na solução de problemas de contagem, os Princípios Básicos de Contagem, outras técnicas relacionadas a estes princípios são de extrema importância. Elas permitem soluções de diversos problemas, por exemplo, em probabilidade sob espaços amostrais finitos.

Uma dessas técnicas, o Princípio da Inclusão e Exclusão (MERRIS, 2003; MORGADO et al., 2016) trata da contagem do número de elementos da união finita de n conjuntos. Sendo também utilizado para determinar o número de permutações caóticas ou desarranjos de um conjunto com n elementos, o número de ordenações onde nenhum elemento desse conjunto fica em sua posição de origem.

Neste trabalho, motivamos o uso das técnicas de contagem em problemas de probabilidade sob espaços amostrais finitos com aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão e o Primeiro Lema de Kaplansky (ZEITZ, 1999; ROSS, 2010; MORGADO et al.,

1 Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT - UFMA), anagabicardoso@yahoo.com
2 Universidade Federal do Maranhão, chavesjs@yahoo.com.com
3 Universidade Federal do Maranhão, araposinhojr@gmail.com

2016). Os problemas que abordamos são frequentemente explorados em olimpíadas nacionais e internacionais de matemática de nível médio, o que mostra a grande relevância do ensino dessas técnicas de contagem no Ensino Médio.

2 METODOLOGIA

Nesta Seção, estamos interessados na apresentação e demonstração do Princípio da Inclusão e Exclusão. Baseado em de Oliveira Santos et al. (2007) e Morgado (2012), um resultado apresentado fornece o número de elementos da união finita de n conjuntos. Em seguida, aplicamos o Princípio da Inclusão e Exclusão para obtermos o número de Permutações Caóticas. Além disso, definimos os Lemas de Kaplansky (MORGADO, 2016), que fornecem o número de conjuntos com uma quantidade finita de elementos que não sejam consecutivos.

2.1 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Teorema 1 (Princípio da Inclusão e Exclusão) *O número de elementos da união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é dado pela expressão*

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i) \; &- \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \sum_{1 \le i < j < k < p \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n). \qquad (1)\end{aligned}$$

Prova: Precisamos mostrar que um elemento que pertença a p dos conjuntos A_i's, para $p = 1, 2, 3, ..., n$, é contado pelo Teorema 1 exatamente uma vez. Considere um elemento pertencente a exatamente p conjuntos, digamos $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$. Este elemento será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^{n} \#(A_i).$$

Em

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j)$$

será contado $\binom{p}{2}$, em

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$\binom{p}{3}$, e assim sucessivamente até o termo $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p})$, que será contado uma única vez. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição.
A somo destas contribuições resulta em

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}. \tag{2}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned}\binom{p}{0} - \left[\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}\right] &= \binom{p}{0} + \binom{p}{1}(-1)^1(1)^{p-1} \\ &\quad + \binom{p}{2}(-1)^2(1)^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} \\ &= (1-1)^p = 0.\end{aligned}$$

Isto implica que a soma em (2) é igual a 1, uma vez que $\binom{p}{0} = 1$, o que conclui a prova. ■

Uma alternativa a prova do Teorema 1 é obtida por indução finita, no entanto, podemos observar que é menos frequente na literatura.

2.1.1 Permutações Caóticas

As permutações caóticas ou desarranjos contabilizam todas as reordenações de n elementos, com $n \in \mathbb{N}$, onde nenhum deles ocupe a sua posição original.

O número de Permutações Caóticas ou desarranjos do conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ formado por n elementos distintos é

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dentro de um conjunto com n elementos distintos temos exatamente $n!$ permutações ao todo. Pertencem a ele as permutações caóticas e as não caóticas. Fazendo uso do Princípio da Inclusão e Exclusão e separando as permutações originais em conjuntos os quais seus elementos permaneçam em sua posição de origem, chegaremos ao total de permutações caóticas procuradas pelo problema. Considerando n conjuntos, onde em cada um deles teremos a quantidade de permutações em que cada um de seus elementos estará em sua posição original. O conjunto A_1 é formado por todas as permutações em que o primeiro elemento ocupa o seu lugar de origem, o conjunto A_2 é formado por todas as permutações onde o segundo elemento ocupa a segunda posição e assim por diante até o conjunto A_n que é formado por todos as permutações em que o último elemento ocupa a n-ésima posição. A cardinalidade dos conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ é calculada fixando um elemento em sua posição de origem e permutando os $n-1$ elementos restantes, resultando em $1 \times (n-1)! = (n-1)!$ permutações por conjunto. Sendo n a quantidade de conjuntos com a mesma característica teremos $(n-1)! \times n = n!$ permutações onde cada um dos elementos do conjunto X estão em pelo menos uma de suas posições de origem. As permutações procuradas são as caóticas, logo o número encontrado de permutações onde pelo menos um elemento se mantém em seu lugar de origem deverá ser retirado do total $n!$ de permutações, ficando $n! - n!$. Da mesma forma iremos calcular a quantidade de permutações onde pelo menos dois elementos do conjunto X ocupam o seu lugar de origem. Neste caso devemos escolher dentre um dos n elementos quais dois irão se fixar, e isso pode ser feito de $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!2!}$ maneiras. Em seguida, determinamos através do princípio multiplicativo a quantidade de permutações com dois elementos fixados, que será de $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)! = \dfrac{n!}{2}$. Estas permutações foram todas subtraídas em dobro da contagem inicial. Sendo assim, agora devem ser acrescentadas novamente, totalizando até o momento $n! - n! + \dfrac{n!}{2!}$ permutações. Esta contagem ainda não nos mostra a quantidade total de permutações caóticas procuradas. Devemos retirar da expressão $n! - n! + \dfrac{n!}{2!}$ a quantidade de permutações que têm pelo menos três elementos em sua posição de origem, o que nos dá o número $n! - n! + \dfrac{n!}{2!} - \binom{n}{3}(n-3)! = n! - n! + \dfrac{n!}{2!} - \dfrac{n!}{3}$. Usando a mesma ideia aplicada no Princípio da Inclusão e Exclusão, devemos prosseguir somando a cardinalidade do conjunto que tem pelo menos 4 elementos fixos, em seguida subtrair a cardinalidade do conjunto que tem pelo menos 5 elementos fixos até chegar ao conjunto que terá todos os seus elementos em sua posição de origem. Em relação ao último conjunto, que sabidamente possui um único elemento, tem-se que a sua cardinalidade será acrescida ou retirada dependendo da paridade do n. Assim, iremos reescrever a expressão que fornece o número de permutações caóticas utilizando as potências do número (-1):

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^0 \frac{n!}{0!} - (-1)^1 \frac{n!}{1!} + (-1)^2 \frac{n!}{2!} + (-1)^3 \frac{n}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$D_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

2.2 LEMAS DE KAPLANSKY

Os Lemas de Kaplanky são utilizados em problemas de contagem que têm como objetivo formar sequências númericas ou subconjuntos onde não há elementos consecutivos.

2.2.1 Primeiro Lema de Kaplansky

Lema 1 (Primeiro Lema de Kaplansky) *O número de subconjuntos com p elementos de $\{1,2,3,\cdots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é* $\binom{n-p+1}{p}$.

Prova: Para inferir o Primeiro Lema de Kaplansky iremos considerar os símbolos "$+$" para representar os elementos que fazem parte das sequências de números desejadas e os símbolos "$-$" para representar os elementos que não farão parte de tais sequências. Como desejamos sequências de p elementos, utilizaremos p sinais de "$+$" e $n-p$ sinais "$-$", assim teremos

$$-+-++--+\cdots-+-++--+.$$

Sendo assim, usaremos n sinais, com p deles positivos, de tal forma que os p sinais de "$+$"estejam intercalados, ou seja, que entre quaisquer sinal de positivo tenha pelo menos um negativo. Fixando os sinais de "$-$", teremos:

$$\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc-\cdots-\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc-\bigcirc.$$

Para colocar os sinais "$-$"temos um modo e para colocar os p sinais "$+$"em $n-p+1$ espaços vazios temos

$$\binom{n-p+1}{p}$$

modos. ■

2.2.2 Segundo Lema de Kaplansky

O Segundo Lema de Kaplansky se distingue do Primeiro Lema de Kaplansky pelo fato de que o primeiro e o último elemento são considerados consecutivos.

Lema 2 (Segundo Lema de Kaplansky) *O número de subconjuntos com p elementos de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a* $\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$.

Prova: Para inferir o Segundo Lema de Kaplansky iremos separar o problema em dois casos, onde iremos fixar um dos elementos: o elemento n.

1º caso: n pertence a lista.

Fixando o elemento n como um dos p elementos escolhidos para a sequência de números não consecutivos, teremos $n-3$ opções restantes para formarmos o conjunto de p elementos proposto. Fazendo uso do Primeiro Lema de Kaplansky, temos que,

$$\begin{aligned}\binom{(n-3)-(p-1)+1}{p-1} &= \binom{n-p-1}{p-1}\\ &= \frac{(n-p-1)!}{(n-2p)!(p-1)!}.\end{aligned}$$

2º caso: n não pertence a lista.
Excluindo o elemento n das escolhas possíveis, teremos uma "fila"de $n-1$ elementos onde serão selecionados p elementos para formar as sequências de números não consecutivos. Fazendo uso do Primeiro Lema de Kaplansky, temos que,

$$\begin{aligned}\binom{(n-1)-p+1}{p} &= \binom{n-p}{p}\\ &= \frac{(n-p)!}{(n-2p)!p!}.\end{aligned}$$

A solução do problema é dada pela soma entre as soluções dos dois casos abordados. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{(n-p-1)!}{(n-2p)!(p-1)!}+\frac{(n-p)!}{(n-2p)!p!} &= \frac{p(n-p-1)!+(n-p)!}{(n-2p)!p(p-1)!}\\ &= \frac{p(n-p-1)!+(n-p)(n-p-1)!}{(n-2p)!p(p-1)!}\\ &= \frac{n(n-p-1)!}{(n-2p)!p!}\times\frac{(n-p)}{n-p}\\ &= \frac{n}{n-p}\times\binom{n-p}{p}.\end{aligned}$$

■

3 RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos algumas aplicações do uso dos métodos de contagem em Probalilidade com espaços amostrais finitos. O objetivo é destacar a importância do que foi apresentado na Seção 2, como proposta de motivar alunos e professores na introdução desses métodos de contagem no currículo e em salas de aula do Ensino Médio.

3.1 APLICAÇÕES

Exemplo 1 *Determinar a probabilidade de uma permutação dos números* $(1,2,3,\ldots,n)$, *com* $k<n$, *ter exatamente k elementos no seu lugar primitivo.*

Solução: Devemos escolher os k elementos que ficarão em seus lugares originais e isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos e terão apenas 1 modo de se posicionarem em seus lugares de origem. Os $n-k$ números restantes se acomodarão de D_{n-k} modos. Assim, a probabilidade pedida é de:

$$\frac{\binom{n}{k}\times 1\times D_{n-k}}{n!},$$

onde $n!$ é o total de permutações entre o conjunto dado. Uma vez que

$$D_{n-k} = (n-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right].$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}\times 1\times D_{n-k}}{n!} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\times(n-k)!\times\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right]\times\frac{1}{n!}\\ &= \frac{1}{k!}\times\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right].\end{aligned}$$

□

Exemplo 2 *Um mágico fará em uma de suas apresentações um número com n bolas de cores distintas e as distribuirá em p chapéus. Determinar a probabilidade de que todos os chapéus terminem o número com pelo menos uma bola?*

Solução: Se $n < p$, segue do Princípio das Gavetas que ao menos um chapéu ficará vazio e portanto a probabilidade desejada é nula. Se $n \geq p$, através do princípio multiplicativo o número de casos possíveis é

$$\#(\Omega) = \underbrace{p\times p\times\cdots\times p}_{n \text{ vezes}} = p^n.$$

Separando o número de casos favoráveis em conjuntos, onde X_1 é o conjunto que representa todas as distribuições de bolas que deixam o primeiro chapéu vazio, X_2 o conjunto que representa as distribuições onde o segundo chapéu estará vazio e assim sucessivamente até o conjunto X_p que representa as distribuições onde o chapéu p ficará vazio. Podemos observar que,

$$\begin{aligned}
\#(X_1) = \#(X_2) = \cdots = \#(X_p) = (p-1)^n \\
\#(X_1 \cap X_2) = \#(X_1 \cap X_3) = \cdots = \#(X_{p-1} \cap X_p) = (p-2)^n \\
\vdots \\
\#(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_p) = 0\cdot
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão,

$$\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p) = \binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}$$

$$P[\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p)] = \frac{\binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}}{p^n}$$

$$P[\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p)]^c = 1 - \frac{\binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}}{p^n}.$$

□

Exemplo 3 *Considere uma caixa com n bolas idênticas numeradas de 1 a n. Suponha que duas bolas sejam retiradas aleatoriamente. Determine a probabilidade de se obter dois números consecutivos quando o processo de retiradas das bolas for:*

(*a*) *Com reposição.*

Solução: O espaço amostral pode ser escrito na forma $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Sendo que $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, \cdots, n\}$.
Seja, A = {dois números consecutivos}. Note que,

$$A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots,(n-1,n)\} \cup \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),\ldots,(n,n-1)\}.$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2(n-1)}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\cdot$$

□

(*b*) *Sem reposição.*

Solução: Note que, se o processo de retiradas das bolas é sem reposição, o número de elementos do espaço amostral é $n^2 - n$ e $\#A = 2(n-1)$.
Então,

$$P'(A) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}\cdot$$

Podemos observar que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P'(A)}{P(A)}=1\cdot$$

Estatisticamente, isto significa que para n suficientemente grande a extração de duas bolas da caixa com ou sem reposição são procedimentos equivalentes.

□

Outra forma de resolução do Exemplo 3 *(b)*, como mostra o Exemplo 4, é dada fazendo uso do Primeiro Lema de Kaplansky.

Exemplo 4 Continuação do Exemplo 3 (b). *Considere uma caixa com n bolas idênticas numeradas de 1 a n. Suponha que duas bolas sejam retiradas aleatoriamente sem reposição. Determine a probabilidade de se obter dois números consecutivos.*

Solução: O Primeiro Lema de Kaplansky determina o número de subconjuntos de $\{1,2,3,\cdots,n\}$, com p elementos, nos quais não há números consecutivos. O número de subconjuntos pode ser encontrado por:

$$f(n,p)=\binom{n-p+1}{p}.$$

Como queremos determinar o número de subconjuntos com dois elementos, teremos $p=2$ e assim o número de elementos que não farão parte das sequências será $n-2$. Assim,

$$\begin{aligned} f(n-2,2)=&\binom{n-2+1}{2}\\ =&2\times\binom{n-1}{2}=n^2-3n+2. \end{aligned}$$

Através do Primeiro Lema de Kaplansky determinamos o número de sunconjuntos com dois elementos não consecutivos. O número total de sequências é n^2-n, como iremos determinar as sequências formadas por dois números consecutivos, então

$$(n^2-n)-(n^2+3n-2)=2n-2.$$

Assim, a probabilidade procurada é

$$P'(A)=\frac{2n-2}{n^2-n}=\frac{2}{n}.$$

□

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo mostramos aplicações dos métodos de contagem em Probabilidade. Estes métodos são vistos por muitos alunos como um assunto complicado e mecanizado. Isto pode estar relacionado a ideia, transmitida ao estudante, que problemas de contagem se restringem à meras aplicações de fórmulas, o que não é verdade. A falta de contextualização e estratégias alternativas para resolução de determinados problemas produzem este cenário.

Sem dúvida, o Princípio da Inclusão e Exclusão e o Lema de Kaplansky, geralmente cobrados em vestibulares para acesso ao Ensino Superior e em olimpíadas de matemática de âmbito nacional, são assuntos que não devem ser desprezados no Ensino Médio. Acreditamos que os exemplos de aplicações apresentados são relevantes para motivar a introdução desses métodos de contagem em salas de aula.

Finalmente, devemos ressaltar que a utilização de técnicas de contagem mais sofisticadas devem ser recomendadas após o Princípio Multiplicativo estar bem fundamentado para os estudantes.

REFERÊNCIAS

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. Introdução à análise combinatória. Ed. Ciência Moderna, 2007.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORGADO, Augusto César Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; FERNANDEZ, Pedro. 10ª Edição. Análise Combinatória e Probabilidade, SBM, 2016.

MERRIS, Russell. Combinatorics. John Wiley & Sons, 2003.

ROSS, Sheldon. Probabilidade: um curso moderno com aplicações. Bookman Editora, 2010.

ZEITZ, Paul. The art and craft of problem solving. New York: John Wiley, 1999.

Capítulo 9

MODELOS PEDAGÓGICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Daniela Sales Oliveira Guimarães[1]
Antonio José da Silva[2]

Resumo: Neste capítulo trataremos das concepções dos docentes que ensinam matemática, sobre o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nos processos de ensino e aprendizagem. Busca conhecer quais os modelos pedagógicos são utilizados pelos docentes que lecionam no ensino básico e no ensino superior. Um questionário e uma entrevista foram utilizados para obter os dados. O uso foi caracterizado conforme registro feito pelo docente, a identificação dos modelos pedagógicos foi possível a partir da literatura disponível em textos científicos. Os resultados encontrados demonstram que as TDIC estão cada vez ais presentes nas ações docentes. Foi constatado que o modelo pedagógico mais frequente é diretivo, fundamentado nas epistemologias aprioristas..

Palavras-chave: Modelos Pedagógicos, TDIC, Ensino de Matemática, Modelos Epistemológicos.

1 INTRODUÇÃO

Quando se falou em informática na educação, professores, gestores da educação e a própria sociedade civil já repousaram em diversas opiniões sobre usar ou não os recursos da informática nos processos educativos. Debateram ainda sobre "quando usar", mas à medida que os dias se passaram as tecnologias digitais, fruto do avanço da informática e da ciência, e suas diversas aplicações, ocuparam espaço em nosso convívio social, profissional e pessoal, tornou-se obsoleta qualquer discussão que não considere a utilização de recursos tecnológicos digitais para fins educacionais como uma ação benéfica à aprendizagem e ao ensino. O debate que se estabelece é como incorporar os diversos recursos tecnológico disponíveis para a melhoria dos processos de ensino e da aprendizagem (MACHADO, 2011).

Valente (2002, p. 19) situa o computador no que chama de ciclo de ações: "Ele [O computador] está sendo um elo importante no ciclo de ações descrição-execução-reflexão-depuração, que pode favorecer a aprendizagem". Esse ciclo de ações se localiza no que chama de "espiral de aprendizagem", utilizado pelo autor para explicar o processo de aprendizagem que parte da interação entre homem e máquina com fortes elementos da epistemologia genética e da teoria sócio-histórica.

Se observarmos com cuidado, perceberemos que a informática processa dados, configura novos tipos de relações sociais, novas formas de gerir conhecimentos e de difundi-los. Relacionada com a educação, pode-se dizer que a informática é um

[1] PPECEM - UFMA, danielasalesguimaraes@gmail.com. Recebeu financiamento da Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA
[2] UFMA, antonio.silva@ufma.br

fenômeno social. Nos últimos anos, ela colocou à disposição da sociedade diversos instrumentos de comunicação e de apoio à construção de conhecimento. A informática na educação é uma área de pesquisa que cada vez mais ganha espaço, e no ensino de matemática não é diferente.

Segundo Valente (2002, p.19), "Pela interação com uma máquina, é possível gerar novos conhecimentos". São bem diversos os processos cognitivos que se desencadeiam e seus métodos próprios de criar, resultantes dessa relação entre o homem e a máquina. Segundo esse autor, nesse processo ocorre o desenvolvimento cognitivo do sujeito e "[...] à medida que tarefas são solucionadas em níveis cada vez mais complexos e, assim, o sujeito passa de um nível inicial de compreensão para um outro mais elaborado"(VALENTE, 2002, p. 20).

Nesta investigação buscou-se conhecer quais as concepções dos docentes, que ensinam matemática, sobre o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nos processos de ensino e aprendizagem. Intentou-se conhecer também, quais os modelos pedagógicos, e os modelos epistemológicos que se revelam nas falas e registros de docentes que lecionam no ensino básico e no ensino superior. As TDIC envolvem técnicas, instrumentos e métodos desenvolvidos nos meios digitais que permitem a transmissão e reprodução de informação (KENSKI, 2003; 2012; 2013; MACHADO, 2011; COSTA, 2017). São tecnologias presentes na vida de docentes e discentes, geralmente são utilizadas no meio social em larga escala, mas com o passar do tempo, desde o seu surgimento mais rudimentar, essas tecnologias, as TDIC, vêm sendo introduzidas nos espaços educativos com mais frequência e abrangência.

2 FUNDAMENTOS

Para Lorenzato (2010, p.3): “Dar aulas é diferente de ensinar. Ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento[...]”. Isso não significa deixar o aluno por conta e muito menos regrar o processo da aprendizagem. Significa agir com finalidade nos processos de aprendizagem.

No processo de ensino não é possível ensinar sem conhecer. E mesmo conhecendo o que se pretende ensinar (matemática), mesmo se apropriando de um modo de ensinar (didática), não há garantia que ocorra uma aprendizagem significativa. (LORENZATO, 2010).

Uma epistemologia e uma didática constituem uma relação fecunda, que permite ao seu utilizador lançar-se sobre a reflexão e a significação sobre as concepções e as ações (MACHADO, 2011). As ações se voltam sobre esses dois aspectos, didáticos e epistemológicos ou pelo menos deveriam. As concepções de conhecimento que subjazem aos discursos presentes no ambiente escolar são decorrentes de epistemologias presentes nesse espaço e que ditam a organização e o desempenho da instituição escolar.

Nossas concepções sobre o conhecimento têm influência nas nossas ações como docentes, e assim: “Todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, elementos naturalmente não contraditórios entre si e que influenciam uns aos outros.” (ARANTES; D’AMBRÓSIO; MACHADO, 2014, p. 79).

Por outro lado, a aprendizagem tem relação com o desenvolvimento cognitivo do sujeito. A aprendizagem é provocada por situações externas, enquanto o desenvolvimento é um processo espontâneo. Sendo assim, o desenvolvimento pode ser entendido como um processo de equilibração progressiva; uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior (PALANGANA, 2001, p. 81). A aprendizagem tem essa característica intermitente “[...] O processo extremamente dinâmico e jamais finalizado, está obviamente sujeito a condições muito específicas de estímulo e de subordinação ao contexto natural, cultural e social [...]” (ARANTES; D’AMBRÓSIO; MACHADO, 2014, p. 79), descrevendo assim o ciclo de aquisição individual e social de conhecimento. Para Dolle (2011, p. 09), “[...] aprender é uma atividade e, como toda atividade, ela envolve estruturas”. Ou seja, o desenvolvimento ou a ampliação das estruturas do pensamento dá-se à medida que novos conhecimentos são construídos pelo sujeito.

Becker (2012, p.26) realiza uma análise sobre a relação dos modelos epistemológicos e sua relação com os modelos pedagógicos. Na figura 1, o autor apresenta as relações entre modelos epistemológicos e modelos, apresentando, pelo ponto de vista das ações, como sujeito e objeto ou discente e docentes interagem entre si, ou não.

Figura 1 – Modelos Epistemológicos e Modelos Pedagógicos

QUADRO 1.1
Comparação dos modelos pedagógicos e epistemológicos

Epistemologia		Pedagogia	
Teoria	**Modelo**	**Modelo**	**Teoria**
Empirismo	S ← O	A ← P	Diretiva
Apriorismo	S → O	A → P	Não diretiva
Construtivismo	S ← → O	A ← → P	Relacional

Fonte: Becker (2012, p.26)

Becker (2012, p.26) realiza uma análise sobre a relação dos modelos epistemológicos e sua relação com os modelos pedagógicos. Na figura 1, o autor apresenta as relações entre modelos epistemológicos e modelos, apresentando, pelo ponto de vista das ações, como sujeito e objeto ou discente e docentes interagem entre si.

Becker (2012) afirma existirem três formas de representar as relações entre ensino e aprendizagem nos espaços escolares, são elas a pedagogia diretiva, a pedagogia não diretiva e a pedagogia relacional ou construtivista. O uso dessas terminologias deu-se em razão das análises serem feitas a partir da relação entre o exercício da docência e as atividades da sala de aula. Assim como Machado (2011), Becker (2012) afirma que os modelos pedagógicos listados se sustentam por concepções epistemológicas, e vai além ao demonstrar que nos modelos pedagógicos diretivo e não diretivo, incidem epistemologias do senso comum, epistemologias empiristas e aprioristas respectivamente. Já a o modelo pedagógico relacional ou construtivista se vale de epistemologias críticas como a Epistemologia Genética ou a relacional de base interacionista, "[...] capaz de realizar a necessária critica as epistemologias do senso comum e apontar para novos caminhos pedagógicos e didáticos" (BECKER, 2012, p. 13).

Para a pedagogia diretiva o conhecimento como conteúdo conceitual pode ser transmitido para a aluno. Diz Becker (2012, p.15): "Segundo a epistemologia que subjaz a prática desse professor, o indivíduo, ao nascer, nada tem em termos de conhecimento: e uma folha de papel em branco; e *tabula rasa*". O professor considera que seu aluno é *tabula rasa* à frente a cada novo conteúdo enunciado a partir da matriz curricular do nível de ensino. Na visão epistemológica do docente que concebe o modelo diretivo, o conhecimento (conteúdo) e sua capacidade de conhecer (estrutura) vem do meio físico ou social, influenciado pelo meio. Nesse modelo pedagógico, o professor (P), age de modo que o aluno (A) assuma posição passiva no processo. O ensino e a aprendizagem são polos dicotômicos, quando deveriam ser compreendidos como polos complementares (BECKER, 2012).

No modelo pedagógico não diretivo, que pode (mas não deveria) ser confundido com o modelo relacional, "[...] o professor se posiciona como um auxiliar do aluno, um facilitador. O aluno já traz um saber ou uma capacidade de conhecer que ele precisa, apenas, trazer à consciência, organizar, ou, ainda, rechear de conteúdo." (BECKER, 2012, p.17).

Nesse modelo pedagógico o professor renuncia a ação docente intencional, a intervenção no processo de aprendizagem do aluno. O professor acredita que o aluno aprende por si próprio. O professor acredita que sua tarefa seja despertar no aluno o conhecimento já existente, intervindo o mínimo possível de modo que o aluno encontre o caminho da aprendizagem. O modelo epistemológico aprioristas, frequentemente inatista, fundamenta o modelo pedagógico não diretivo. (BECKER, 2012).

"Apriorismo vem de a priori, isto é, aquilo que é posto antes como condição do que vem depois. [...] Essa epistemologia acredita que o ser humano nasce com o conhecimento já programado na sua herança genética, no seu genoma. [...]" (BECKER, 2012, p.18). No modelo pedagógico não diretivo, o aluno (A), determina a ação (ou omissão) do professor (P), justificado pelas condições prévias no sujeito (aluno). A relação entre ensino e aprendizagem inexiste neste modelo à medida que a aprendizagem busca autossuficiência, se sobrepondo ao ensino, desautorizando-o.

No modelo pedagógico relacional ou construtivista, o professor acredita que o aluno só aprenderá, construirá algum conhecimento novo, se "[...] agir e problematizar a própria ação, apropriar-se dela e de seus mecanismos íntimos. A condição prévia para isso é que consiga assimilar o problema proposto [..]". (BECKER, 2012, p. 21). O modelo epistemológico que serve de base para a construção do modelo pedagógico relacional ou construtivista é o modelo relacional, em especial a Epistemologia Genética.

O professor construtivista não acredita no ensino por transmissão, "[...] não acredita que um conhecimento (conteúdo) e, menos ainda, uma condição previa de conhecimento (estrutura) possam transitar, por forca do ensino [...] [da cabeça do professor para a cabeça do aluno]". (BECKER, 2012, p. 21). O professor construtivista nega a transmissão de conhecimento como conteúdo.

O professor construtivista compreende a transmissão social quando ocorre a ação mútua transformadora entre o polo transmissor e o polo receptor necessariamente ativo; o professor "[...] acredita que tudo o que o aluno construiu até hoje em sua vida serve de patamar para continuar a construir e que alguma porta se abrira para o novo conhecimento - e só questão de descobri-la; ele descobre isso par construção." (BECKER, 2012, p. 21). A aprendizagem no modelo relacional é uma construção viabilizada no plano do desenvolvimento pela construção de estruturas cognitivas, é um processo construtivo sem início e sem fim entre a aprendizagem e o desenvolvimento.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Esta pesquisa aborda qualitativamente os dados obtidos. Quanto à natureza da pesquisa, é aplicada. Quanto aos objetivos é descritiva. Quanto aos procedimentos é um estudo de caso (PRODANOV; FREITAS, 2013). Esta pesquisa realizada durante um curso de formação continuada para professores do Ensino Médio (**Etapa 1**), a participação foi por adesão voluntária. A entrevista foi realizada com docentes de uma Instituição de Ensino Superior sediada no município de São Luís – MA (**Etapa 2**), a participação foi por adesão voluntária. A pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2018 entre os meses de julho e outubro. São docentes atuantes nos ensinos básico superior.

Para alcançar os objetivos da pesquisa, foram estabelecidas duas etapas:

Etapa 1: Professores de matemática durante uma formação em uma universidade pública de forma espontânea responderam um questionário (Formulários Google) que tratava de diversos temas relacionados à matemática, seu ensino e suas relações com outras disciplinas e áreas. Nesta etapa 18 professores participaram, sendo 11 (onze) com atuação exclusiva no ensino básico e 7 (sete) docentes que já lecionaram ou lecionam no Ensino básico, mas exercem a docência com maior frequência no Ensino Superior. Nesta etapa serão analisadas as respostas buscando compreender como cada docente relaciona sua prática com o uso das TDIC.

Etapa 2: Foi realizada uma entrevista aberta em que buscou-se conhecer a relação possível entre a matemática e TDIC, em especial os softwares utilizados no espaço escolar. Foi investigado também os processos de ensino realizados no exercício da docência exclusiva no Ensino Superior, com foco nas epistemologias do conhecimento e metodologias aplicadas. Nesta etapa foram 5 (cinco) professores entrevistados. As conversas foram realizadas por telefone e gravadas com o consentimento dos entrevistados.

Os dados serão apresentados conforme as etapas, da primeira para a segunda. A análise ocorrerá com base na identificação de modelos pedagógicos propostos em Becker (2012). Na **Etapa 1** serão identificadas as práticas docentes com uso das TDIC; se ocorrem e como ocorrem (metodologia aplicada). Na **Etapa 2** serão analisadas algumas falas transcritas. Nessas falas e na intenção delas, serão investigadas as epistemologias associadas, identificando os modelos pedagógicos presentes nas falas relatadas. Nesta etapa busca-se compreender as concepções dos professores sobre o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação no ensino de matemática e os modelos pedagógicos executados.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Apresentaremos os dados coletados. A aquisição dos dados ocorreu em duas etapas: Aplicação de Questionário e Entrevista. O questionário apresenta duas perguntas. Para registrar as falas dos docentes e manter sua identidade no anonimato, utilizamos códigos de identificação, referentes ao nível de ensino em que exerce sua docência. O código EB de 1 a 11 será utilizado para docentes do Ensino Básico. O código ES de 1 a 7 será utilizado para docentes do Ensino Superior. Para registrar as falas dos docentes do Ensino Superior entrevistados, utilizaremos o código DS de 1 a 5.

Etapa 1 - Questão 1: Profissionalmente (em sua prática) quais tecnologias digitais de informação e comunicação tu utilizas com certa regularidade para preparação de aulas e realização de estudos?

Esta primeira pergunta reflete a análise que o docente deveria fazer sobre sua prática, de maneira individualizada, íntima, com seu olhar distanciado do ambiente escolar. Para esta pergunta, houve uma predominância das respostas apontando para a utilização de *notebooks*, *tablets*, *softwares* gráficos e de cálculo matemático, *software* de edição de texto e calculadoras científicas, o destaque maior foi para o uso de *notebooks* e computadores de mesa, presente nas respostas de (EB3, EB6, EB7, EB8, EB9, EB10 e EB11). Dentre os *softwares* citados destaca-se o *Mathtype* (editor de texto) e o Geogebra, *software free* que atende diversas áreas da matemática. Dos onze professores da educação básica, quatro (EB1, EB2, EB4 e EB5) informaram que não utilizam recurso algum.

Dentre os professores do ensino superior, além do uso de computadores, ressalta-se que quase a totalidade expressou a preferência pela utilização de alguns *softwares* como Power Point, Winplot, Matlab, R, Mathematica, WxMaxima, emuladores de calculadoras científicas e o Geogebra. Apenas um docente declarou não utilizar TDIC em sua prática profissional. Relataram também o uso de plataformas virtuais para captura, armazenamento e compartilhamento de vídeos e textos.

O uso do dispositivo móvel *smartphone* não foi citado, assim como não houve menção às redes sociais mais acessadas (Facebook, Tweeter e Whatsapp), exceto o servidor de vídeos Youtube, que possui arquitetura de redes sociais. Fica evidente que o docente já introduziu computadores na sua prática. Usa para elaborar aulas, textos, realizar pesquisas, utiliza como um recurso para a execução de suas aulas. Dentro do ensino básico o docente já faz uso de aplicações com o Geogebra, que é *free* e está disponível também para dispositivos móveis, diminuindo assim, a distância entre os alunos e a aplicação computacional. A organização do texto matemático por meio de editores científicos permite ao docente que reflita sobre os temas que irá abordar.

No ensino superior há uma diversidade maior de aplicações e softwares utilizados para o ensino de matemática, mas há quem não use e não faça questão. A ação de repetir as práticas estabelecidas e não buscar inovações culmina, como resultado para o docente, pela impossibilidade de refletir sobre sua prática, e a consequência disso é também o estabelecimento de um modelo pedagógico pautado na repetição, um modelo diretivo. Isso não significa que ao adotar o uso de TDIC ou mudar a metodologia da aula executada, esse professor usufrua de um modelo pedagógico diferente do já estabelecido, mas permite a ele a chance de pensar o ensino como algo dinâmico e intencional, cujo propósito da ação docente se materializa nas aprendizagens de alunos e turmas diferentes.

Etapa 1 - Questão 2: Costuma utilizar algum tipo de recurso tecnológico para o desenvolvimento das aulas de matemática? Se sim, destaque qual e como costuma utilizar.

A segunda pergunta versou sobre a prática docente em sala de aula e a utilização de TDIC. Dentre os professores da educação básica, quatro (EB1, EB2, EB4 e EB5) deles afirmam não utilizar nenhum tipo de TDIC. Três desses professores não utilizam nenhum tipo de recurso TDIC devido à ausência de um espaço apropriado, "[...] na escola onde trabalho não há um laboratório que eu possa levar os alunos para fazer atividades complementares" (EB2). Um outro professor demonstra indiferença, afirma ser imprescindível o desenvolvimento de raciocínio lógico. Para ele, não tendo raciocínio lógico, não há porque ter as TDIC "Não adianta se ter recursos se não desenvolver o raciocínio lógico" (EB4). O restante dos docentes afirma que constantemente utilizam computadores, projetores, slides e softwares nas aulas de matemática, o intuito seria o de sistematizar os conteúdos escolares. (EB9) diz utilizar um laboratório de informática.

Dentre os docentes do ensino superior que declararam utilizar as TDIC para o desenvolvimento de aulas, a referência predominante é a utilização de *softwares* em sala para demonstração de resultados e apresentação gráfica. Utilizam o Matlab, o Geogebra e outros programas de construções dinâmicas, geradores de gráficos e calculadoras científicas. "Sempre utilizo. Existem diversos softwares educacionais muito úteis: Mathematica, Maple, GeoGebra, etc. Além disso, existem outras construções matemáticas no Youtube, Wikipedia, etc, que podem ajudar a entender certos conceitos físicos/matemáticos" (ES4). Outra predominância neste nível de ensino é o uso de slides nas aulas para apresentar e sistematizar os conteúdos em favor do ensino; outro destaque é a utilização de vídeos para complementar as aulas e apoiar os estudos extra complementares.

A utilização do recurso tecnológico em sala de aula, seja pelo Datashow, pelo computador, pelo software, pelo aplicativo do smartphone; não é garantia de aula inovadora, não garante novos processos cognitivos, não garante aprendizado, mas permite sim o estabelecimento de novas práticas, novas formas de pensar, novas formas de se comunicar, e consequentemente novas formas de aprender. O simples gesto de não replicar o comportamento adotado por influência de um modelo pedagógico diretivo, já permite ao docente pensar com o aluno, seus lugares nos processos de ensino e aprendizagem. Foram encontrados nos registros de respostas, traços de um modelo pedagógico diretivo quando o docente declara que usa os slides para sistematizar e ordenar a disciplina ministrada. Ora, se o esforço realizado pelo docente considera a ação do objeto sobre o sujeito, então o modelo epistemológico é o empirista. Esse modelo pedagógico pratica a transmissão de conteúdo escolar pela exposição visual e emissão oral.

Apresentaremos um extrato das principais falas obtidas por meio de entrevistas. Para analisar melhor as falas, dividimo-las em duas categorias: O uso das TDIC e Organização e Metodologias aplicadas.

Uso de TDIC

(DS1) costuma utilizar TDIC "Já utilizei recursos. Na [turma] atual eu utilizo, na [turma] anterior eu não utilizei tanto". Esse docente costuma utilizar os softwares Mupad e Geogebra. Geralmente utiliza aplicações do Geogebra para explicar teoremas e encontrar resultados. Na visão do docente, o uso constante de aplicações tem melhorado o ambiente pois "os alunos chegam dizendo que testaram o resultado, conseguiram ver a função".

(DS2) usa o Geogebra, "[...] a utilização é boa para a disciplina, ajuda na visualização, o gráfico". No entanto acredita que para um bom uso do *software* em sala por parte dos alunos, seria necessário um curso, e por isso só apresenta o software no projetor, pois "[...] como num curso de cálculo só se vê matemática pura seria necessário aprender a usar o *software*, e isso pode atrapalhar na disciplina". Acredita que a utilização de um *software* ou recurso computacional ajuda na aprendizagem, "[...] sobretudo pela parte gráfica, pela visualização, mas o maior acréscimo à aprendizagem ocorre pela aula, no quadro". Acredita ser difícil estabelecer um conhecimento teórico a partir do computador ou *software*, e isso sem a explicação no quadro não é possível.

(DS3) faz uso do projetor e do computador em sala. Para esse docente "O conceito não é suficiente, precisa ter técnica, exercitar [...] preparo no Datashow, as coisas andam mais rápidas, o aluno não copia nada. Tem mais tempo para pensar, treinar.

(DS4) utiliza o Winplot e o Matlab com frequência. Segundo esse docente o aspecto visual ajuda muito. Acredita que há um proveito maior da disciplina com o uso dos *softwares*.

(DS5) costuma indicar *software* aos alunos. Usa projetor tipo Datashow para fazer as apresentações em slides. Só usa slide para apresentar o software. Além do Winplot utiliza também o Geogebra, o Maxima, o Matlab e o Scilab. "O *software* ajuda para ver as superfícies, no quadro fica um horror, no giz ainda ficava mais fácil. A figura gira".

Quando (DS1) diz que usa o Geogebra para explicar e encontrar, notadamente há uma ação docente sobre o discente, cuja intenção é informar. Na visão epistemológica o objeto age sobre o sujeito, a intenção de usar o software é uma ação do tipo $A \leftarrow P$ ou ainda $O \leftarrow S$. A fala seguinte não deixa claro o modelo pedagógico adotado pelo docente, mas ao dizer que "conseguiram ver a função", revela que o aluno agiu com o objeto, podendo ter se modificado e modificado o próprio objeto, ou não, mas ainda faltam elementos que caracterizem a interação entre o sujeito e o objeto para classificar o modelo epistemológico com construtivista. Não se descarta, nessa fala do docente, que haja a manifestação de um pensamento forjado em epistemologias aprioristas com modelo pedagógico não diretivo, visto que a ação relatada pelo docente tem origem no próprio discente, como se ao apresentar o *software*, o docente naturalmente esperasse que o aluno utilizasse o *software* e aprendesse, sem que houvesse coordenação de ações objetivas. Em (DS2) se vê clara manifestação de um modelo pedagógico diretivo. Para esse docente o foco está na disciplina. Das falas se destaca quando diz que utiliza o Geogebra para a disciplina, ajuda na visualização, quando manifesta a necessidade de aprender a usar um *software* para a disciplina. O foco está no processo de transmissão de conteúdo. (DS3) não é diferente, apresenta o modelo pedagógico diretivo, foca na técnica, no exercício e na memorização. Para (DS3), (DS4) e (DS5), a utilização do slide está associada à rapidez com que apresenta os conteúdos, a incidência de informação visual é importante para a aquisição de conhecimento nesse modelo pedagógico manifestadamente embasado numa epistemologia empirista.

Organização e Metodologias aplicadas

Quanto à forma como concebem o conhecimento, organizam as aulas e sua finalidade didática, destacamos:

(DS1) Costuma apresentar a teoria no quadro, e por vezes usa a projeção de slides também para apresentar teoria. Projeta a tela de softwares para plotar figuras, construções e curvas "Usei desenho e estavam com dificuldade, daí procurei um programa com dinâmica na imagem para melhorar essa compreensão". A respeito do processo metodológico aplicado em sala, "Exposição oral e slides, e dependendo uso software. [...] o recurso computacional dá a resposta mais imediata. Os alunos participam mais".

(DS2) desenvolve a aula no quadro, apresentando a teoria e exercícios. Quando usa o Datashow, o faz para algum exercício ou para utilizar o Geogebra "às vezes tem uma figura difícil no exercício, aí eu apresento. Quando não é isso, sempre que posso apresento os gráficos no Geogebra".

Quanto ao desenvolvimento metodológico (DS3) diz: "A organização da aula consiste em expor conceito e tomar a maior parte do tempo com exercícios, teóricos e ainda mais práticos, os alunos gostam de aplicação". A parte teórica está pronta, [o aluno] avança na parte teórica". Para (DS3), "O aluno bom consegue desenrolar o resto. O aluno que não vai aprender, não aprende nunca. O aluno para aprender não depende do professor [...]".

(DS4) - "Uso data show de duas em duas aulas. [...] uso aulas já prontas, e posso acrescentar algo, ocorre a exposição e debate". (DS4) observa que os alunos do primeiro período da graduação têm rejeição ao uso do de livros no formato de arquivos PDF, preferem livros físicos. Quando utiliza gráficos e curvas plotados por meio de *softwares*, (DS4) afirma "[...] ganho muito tempo usando Datashow. Dá para terminar a matéria. muito bom para mostrar as formas". Sobre o perfil dos alunos (DS4) registra: "Os alunos mais antigos têm mais resistência em usar tecnologias. Os mais novos aceitam melhor".

(DS5) costuma utilizar software: "[...] uso no final da disciplina, quando o aluno já sabe calcular, usa para plotar os gráficos". Foi perguntado porque não usa software no início das disciplinas. Segundo (DS5), "Os alunos demonstram desinteresse para compreender os conceitos e construir os gráficos por estar mais fácil no Winplot". Não usa TDIC no início das disciplinas porque segundo suas observações, "[...] eles não se aplicam, não se esforçam para aprender por já ter a resposta pronta [...] Quando já sabe calcular e chega nos gráficos aí eu uso em sala". Quando perguntado da sua observação quanto à preferência dos alunos sobre a utilização do quadro ou projeção para a visualização dos gráficos e resultados, declarou: "[...] geralmente meus alunos de cálculo I não gostam de slides, gostam mais do quadro".

Nota-se que reina a exposição oral e visual, por intermédio da projeção de slides ou telas de *software*, a aplicação de exercícios de técnicas e memorização. Vislumbra-se até uma pressão social para não abandonar o modelo de exposição tradicional caracterizado pela verbalização e exposição teórica no quadro, e quando isso ocorre em favor do uso de TDIC, ações ainda reproduzem a exposição oral e teórica visual, mas com um agravante, a apresentação da teórica ocorre de maneira mais rápida, e em muitas das vezes pode não considerar o tempo necessário à reflexão. No docente (DS3) nota-se traços de epistemologias aprioristas quando expressa "O aluno bom consegue desenrolar o resto. O aluno que não vai aprender, não aprende nunca. O aluno para aprender não depende do professor [...]", uma condição *a priori*, algo já presente antes da ação docente e independe dela, é o deixar fazer, o docente se coloca como auxiliar, manifestado a ação do sujeito sobre o objeto $S \rightarrow O$, já o modelo pedagógico é o não diretivo, o docente se abstém de intervir na aprendizagem, representado por $A \rightarrow P$. O modelo pedagógico que norteia as ações metodológica desenvolvidas pelos docentes é notadamente um modelo pedagógico diretivo. Busca-se reproduzir uma ideologia do exercício e a prática da memorização em desfavor das práticas reflexivas. Há uma crença no mito da transferência, e toda a alteração metodológica feita, quando ocorre, só ocorre porque acredita que por mais complexo que seja esse conhecimento, de alguma forma o conhecimento será transmitido, e na visão dos docentes basta se submeter à fala, ao que é apresentado, e mais uma vez ressalta-se, sem espaço para atividade reflexivas, construtivas, instigadoras, desafiadoras.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A relação entre um modelo pedagógico e um modelo epistemológico foi apresentado em Becker (2012). Um professor age conforme suas convicções e crenças. Em sala de aula e na docência de um modo geral, é possível perceber um modelo empirista conforme análise das falas dos 5 entrevistados. Em suas falas são observados elementos que caracterizam um processo de transmissão e que por mais que haja outro elemento auxiliar à prática nas aulas de matemática, este auxilia o processo de exposição. O uso do gráfico a partir de software, por vezes se resume a poupar tempo para não desenhar e poder explorar os demais conteúdos.

É possível afirmar que os 5 professores entrevistados possuem um modelo pedagógico diretivo, aquele que a aprendizagem se dá pela transmissão, por uma ação direta do docente para o aluno. São novos instrumentos para velhas práticas.

O propósito desta pesquisa não se revela pela depreciação da atividade docente, pelo contrário, visa contribuir para o processo de reflexão profunda das ações produzidas em sala, por docentes, por discentes e as relações estabelecidas com o conhecimento. Instigamo-nos a debater a como os modelos epistemológicos incidem sobre os modelos pedagógicos adotados nas práticas docentes. Este estudo revela que o uso das TDIC pode depender de condições socioeconômicas, mas seu uso também é pautado por concepções epistemológica. Nesse sentido, vale ressaltar a forte influência dos modelos epistemológicos de base aprioristas nos docentes entrevistados; esses modelos epistemológicos alimentam o modelo pedagógico diretivo, predominante na pesquisa. Evidente que cabe ao professor a decisão de quais procedimentos didáticos e quais recursos fundamentarão as práticas de ensino, no entanto, se faz necessária a consciência de que esses processos fruto de modelos pedagógicos, são resultados de uma complexa e rica modelagem epistemológica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

ARANTES, Valéria A. D'AMBRÓSIO, Ubiratan. MACHADO, Nilson José. **Ensino de Matemática**. São Paulo: Sumus, 2014. 175 p.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.

COSTA, Letícia Perez da. **O uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) na prática pedagógica do professor de matemática do ensino médio**. 2017. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós- Graduação em Educação: Teoria e Prática do Ensino, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/49344. Acesso em: 12 nov. 2018.

DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica**. Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.

KENSKI, Vani Moreira. **Aprendizagem Mediada pela Tecnologia**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 10, n. 4, p. 1-10, set. 2003. Disponível em: http://www2.pucpr.br/reol/pb/index.php/dialogo?dd1=786&dd99=view&dd98=pb. Acesso em: 4 out. 2018.

KENSKI, V. M.. **Tecnologias e tempo docente**. Coleção Papirus Educação. Campinas, SP: Papirus, 2013.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da educação. São Paulo: Papirus,2012.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender Matemática**. Coleção Formação de Professores. 3. ed. Campinas, SP: Editores Associados, 2010. 141 p.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didatica :** as concepcoes de conhecimento e inteligencia e a pratica docente. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

PALANGANA, Isilda Campanen. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky:** a relevância do social. 3. ed. São Paulo: Summus Editorial, 2001. 171 p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book Metodologia do Trabalho Cientifico.pdf . Acesso em 06 de mar de 2017.

VALENTE, José Armando. **Espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação:** repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. Cap. 1. p. 15-37.

Capítulo 10

O GEOGEBRA NO *SMARTPHONE*: FERRAMENTAS DINÂMICAS NO ENSINO BÁSICO NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Joel Félix Silva Diniz [1]
Valeska Martins de Souza [2]

Resumo: Este artigo propõe o resgate do ensino das construções geométricas no Ensino Básico com o uso do *software* livre GeoGebra. Substitui-se à forma estática da régua e do compasso no desenvolvimento dos conceitos, das propriedades e dos teoremas de geometria, fundamentais para a compreensão das etapas de construções geométricas. Apresenta-se um estudo do *software* GeoGebra para *Smartphones* em sala de aula. A metodologia utilizada foi de pesquisa experimental usando o *software* GeoGebra nas versões 5.0 e *Grapher 3D*. Atividades teóricas e práticas foram aplicadas em duas turmas: 7º e 9º ano do Ensino Fundamental e em uma turma do 3º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Geogebra. Geometria. Softwares livres. Ensino.

1 INTRODUÇÃO

Em nossa prática docente nos deparamos com a seguinte situação: os alunos elegem a Matemática como sendo uma das disciplinas de maior dificuldade de aprendizagem. As raízes desse problema podem estar na formação dos profissionais que conduzem essa disciplina ao longo do tempo. A investida na melhoria no processo de ensino passa pela investigação de novos métodos que possam favorecer a busca pelo conhecimento matemático, salienta-se aí ênfase na história da matemática, utilização de materiais concretos, laboratórios de matemática, jogos, e sobretudo as novas tecnologias, como o *software* de geometria dinâmica: o GeoGebra Mobile para *smartphones*.

De acordo com Kenski (2007), o ser humano apoia-se no conceito de tecnologia para viver mais e em condições mais favoráveis: “ela (a tecnologia) está em todo lugar, já faz parte de nossas vidas”. Segundo Ponte et al. (2003), o uso dessas tecnologias nas práticas educacionais permite perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador. De acordo com Almeida (1998), a tecnologia é uma alternativa e o problema está em como os jovens buscam novas formas de pensar, como buscam novos significados para o aprendizado.

Para exemplificar alguns trabalhos relevantes nessa área podemos destacar Ferreira (2013), Zulatto (2002), Kopke (2006) e Lopes (2010) que sugerem os aplicativos de geometria dinâmica, como por exemplo o GeoGebra, como ferramenta motivadora do aluno na investigação, construção e resolução de problemas.

1 Mestre em Matemática pelo PROFMAT na Universidade Federal do Maranhão (Ufma). Professor da Aeronáutica no Centro de Lançamento de Alcântara - MA. Endereço para correspondência: Rua Paulo VI, 13 - Pindaí - CEP: 65110-000 - São José de Ribamar - MA. E-mail: joelfelixprata@gmail.com.

2 Doutora em Matemática. Professora da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). E-mail: valeskam@terra.com.br.

A motivação da elaboração deste artigo está centrada na ideia de que os *softwares* livres, como o GeoGebra, nos permitem ir muito além do que nos dá a escrita convencional. Os *smartphones* já constituem uma realidade na vida de professores e alunos, e isso se revela também na sala de aula, pois às vezes o uso dessa tecnologia causa desconforto no exercício da docência. Nesse sentido, propõe-se aqui uma alternativa para o ensino de Geometria com o uso do *software* GeoGebra nos *smartphones*. Objetiva-se otimizar o uso do celular em sala de aula no processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista a inexistência ou precariedade de laboratórios de informática nas escolas públicas e, segundo a Unesco (2013), não deve-se restringir o uso do *Smartphone* na sala de aula, deve-se então acolher a tecnologia para um melhor aprendizado.

2 O SOFTWARE GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter[3] no ano de 2001, o GeoGebra é um *software* livre e de fácil aquisição na versão para computadores comuns, em *sites* de buscas ou no endereço: *www.geogebra.org/download*. O GeoGebra é de fácil aquisição também para *Smartphones* em várias plataformas. Para adquirir o *software* para Android, o sistema mais comum entre os *Smartphones*, usa-se o *Play Store* e digita-se Geogebra Calculadora Gráfica.

Neste caso, o GeoGebra pode ser usado com facilidade pelos alunos no *smartphone* para a aprendizagem. Além disso, pelos professores como ferramenta de facilitação do ensino da matemática.

A versão para *Smartphones* não difere muito da usada em computadores comuns, com a vantagem da tela ser *Touch Screen*, facilitando assim o manuseio devido à familiaridade dos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio com esse tipo de mídia.

A Figura 1 mostra um pouco do ambiente no *Smartphone*.

Muitos são os fatores que convergem para um bom aprendizado da Geometria com o uso dessa tecnologia, especificamente no que tange à visualização geométrica e a criação de conceitos a partir destas visualizações. De acordo com Montenegro (2005), nos ensinos Fundamental e Médio, os alunos devem trabalhar com modelos sólidos e com material visual. À medida que são fornecidos materiais didáticos eficientes do objeto geométrico em estudo as habilidades de visualização podem, e devem, ser desenvolvidas.

3 METODOLOGIA

Para desenvolver esta prática pedagógica, inicialmente foi solicitado a instalação dos módulos do GeoGebra para *smartphones*. Uma apostila foi organizada e distribuída

[3] Markus Hohenwarter é docente do Departamento de Matemática na Universidade de Salzburgo, Áustria.

Figura 1 – Ambientação do GeoGebra na versão para *Smartphone*.

Fonte: O próprio autor.

para que os alunos, em grupos, pudessem conhecer e operacionalizar o GeoGebra em seus aparelhos.

Foram propostas atividades distintas, em três turmas, sendo uma do 7º e outra do 9º ano do Ensino Fundamental, finalizando com uma turma do 3º ano do Ensino Médio. O procedimento adotado foi o mesmo nas três turmas, abordou-se o assunto com exposição oral e dialogada, em seguida foram propostas situações problema em que resolveu-se do modo tradicional, utilizando quadro e pincel e, finalmente, esta mesma atividade foi resolvida com os alunos utilizando o GeoGebra. Salientado que algumas atividades foram resolvidas apenas com o uso do GeoGebra. Verificou-se ainda que, depois da figura construída no *smartphone*, esta poderia ser modificada com facilidade e dinamismo.

3.1 EXPERIÊNCIAS COM O GEOGEBRA EM UMA TURMA DO 7° ANO DA ECE

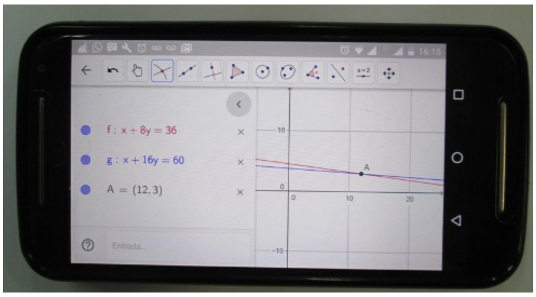
Na Escola Caminho das Estrelas (ECE), localizada no Centro de Lançamento de Alcântara, desenvolveu-se atividades em uma turma com 14 alunos, utilizando como base o livro didático, More (2012), e o banco de questões da OBMEP 2011.

Levando-se em consideração que os alunos desta turma ja conheciam o GeoGebra, tendo em vista que algumas aulas já eram ministradas com a utilização do *software* pelo professor, e que todos já tinham em seus *smartphones* o aplicativo, então o uso do software GeoGebra no ensino da álgebra tornou-se mais dinâmico, eficiente e instigante. Considerando-se que o aluno já esteja familiarizado com esta tecnologia, em pouco tempo ele pode construir diversas figuras geométricas diferentes, medir seus ângulos internos e verificar que a soma é sempre a mesma quando deformadas as figuras. Pode-se verificar que as construções com régua e transferidor, dificulta o entendimento com medidas de ângulos diferentes das dos números inteiros e, por fim, verificou-se com extrema facilidade que, com o uso do *software*, a relação entre a álgebra e a geometria se dão de forma mais clara, que uma equação gera uma figura. Para tanto, estabeleceu-se o seguinte problema extraído do banco de provas das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):

> (Exercício 12)[4]. Oito vasos iguais, encaixados, formam uma pilha de 36 cm de altura. Dezesseis vasos iguais aos primeiros, também encaixados, formam outra pilha de 60 cm de altura. Qual é a altura de cada vaso?

Esta atividade requer a seguinte solução: dividindo cada vaso em duas partes, sendo a parte de baixo com altura x e a parte de cima com altura y, ou seja, a altura de cada vaso é a soma $x+y$. No caso de n vasos empilhados, a altura da pilha é $x+ny$. Assim, obtém-se um sistema linear formado pelas equações: $x+8y=36$ e $x+16y=60$. Resolvendo o sistema, segue que $y=3$ e $x=12$. Portanto, cada vaso tem 15 cm de altura.

Figura 2 – Interseção: $A(12,3)$.



Fonte: O próprio autor.

A Figura 2 mostra a tela do *smartphone* com a solução encontrado pelos alunos, que é a interseção das duas retas: solução geométrica do problema.

3.2 EXPERIÊNCIAS COM O GEOGEBRA EM UMA TURMA DO 9° ANO DA ECE

Desenvolveu-se com esta turma de 15 alunos da Escola Caminho das Estrelas (ECE), localizada no Centro de Lançamento de Alcântara, no município de Alcântara, algumas aulas de Geometria Plana e construção de gráficos de uma função do 2º grau de forma interativa, usando como base o livro banco de questões da OBMEP 2015, sempre observando a realidade do aluno, utilizando-se de recursos tradicionais (régua e compasso) e de um recurso não convencional ao ensino para sala de aula, que é o *Smartphone*, nas plataformas Android ou IOS.

Objetivou-se com estas aulas a construção de elementos geométricos estudados como: ponto, reta, coordenadas, segmento, semirreta, ângulos e plano. Também foram explorados os polígonos: côncavos, convexos e regulares e, por fim os círculos. Utilizando primeiramente a aula expositiva e dialogada com o uso da régua e do compasso, em seguida foram apresentadas aos alunos as facilidades das novas tecnologias, entre elas

[4] Disponível em: < *http://www.obmep.org.br/provas_static/sf1n1 − 2011.pdf* > acesso em 12 de setembro de 2016.

o *software* GeoGebra em uma tela de *datashow*. Para melhor acompanhamento das aulas, foi impresso e entregue aos alunos uma apostila com os passos iniciais do GeoGebra, como texto pra melhor acompanhamento das aulas.

Trabalhou-se nesta turma de 9º ano os conteúdos de Geometria Plana, a princípio, utilizando-se de aulas dialogadas, na busca do estímulo à curiosidade dos alunos, na tentativa de uma percepção mais crítica do conteúdo no embate com a realidade, fazendo assim com que os alunos contestem o professor, gerando um clima mais e mais instigante na exploração dos conteúdos. Em um segundo momento fez-se a apresentação do GeoGebra pra *Smartphones* e mostrou-se aos alunos que as barreiras se minimizam quando buscamos o conhecimento, enfatizou-se também que podemos adquirir conhecimentos sistemáticos das mais diversas formas e meios, inclusive aqueles o qual não parecem fornecer um conhecimento formal à primeira vista, que é o caso do *Smartphone*, o qual pode surpreender como um veículo eficiente de aprendizagem. O trabalho em grupo foi bem explorado neste momento, buscou-se entre os alunos a interatividade, a competição e a troca de conhecimentos, tanto da Geometria quanto do aprendizado do *software*. Utilizou-se avaliação contínua no decorrer das aulas com atividades e testes para nortearem as aulas de acordo com resultados.

3.2.1 Aulas sem o uso do *smartphone*

Utilizando-se do livro didático - **Matemática: ideias e desafios**, usado na turma, More (2012), definiu-se nesta primeira aula os conceitos de elementos geométricos (ponto, reta, coordenadas cartesianas, segmento, semirreta e plano) e, em uma interdisciplinalidade com a Geografia, trabalhou-se algumas atividades cartográficas. Ainda sem o uso do *Smartphone* enfatizou-se a utilização de réguas e compasso, para que os alunos se prendam na utilização da construção livre e com medidas definidas, assim estarão melhor preparados para lidarem com diferentes situações. Adotou-se nesta aula as atividades individuais trabalhando-se com ângulos, onde foi observado a soma dos ângulos internos de um polígono, foi também questionando o tamanho máximo de um ângulo de um triângulo; de um quadrilátero; de um pentágono; de um hexágono, entre outros. Ensinou-se a medição dos ângulos internos e discutiu-se a necessidade de medir estes ângulos. Ainda nestas aulas trabalhou-se os gráficos das funções do 1º e do 2º grau; os conceitos de polígonos côncavos e convexos, individualmente, partindo de que os triângulos só podem ser convexos e os outros polígonos podem ter uma das duas características. Trabalhou-se as definições de acordo com a medida dos ângulos internos dos polígonos; enfatizamos a proporção entre segmentos de reta (MORE, p. 113). Por fim, informou-se aos alunos que as próximas aulas serão trabalhadas em grupos e de forma diferente, e que neste momento seria instalado um aplicativo (o GeoGebra Mobile) em seus *Smartphones*. Verificou-se que poucos não possuíam o aparelho, o que não prejudicou o trabalho, este fora feito em grupos.

3.2.2 Aula com o uso do *smartphone*

Nesta aula desenvolveu-se uma atividade de reconhecimento do GeoGebra para *Smartphones*, onde utilizou-se as ferramentas de construção, sempre consultando a apostila distribuída anteriormente, refazendo-se as construções da aula anterior com régua e compasso, depois comparando-se os resultados finais de suas construções individuais. Já familiarizados com o *software*, dividiu-se a turma em grupos onde fez-se a primeira competição de construções. Nesta aula ensinou-se o conceito de polígonos com o uso do *Smartphones*; como calcular o ângulo interno de um polígono utilizando o GeoGebra Mobile; foram construídos pontos, retas, semi-retas, segmentos de reta, ponto médio de um segmento; trabalhou-se as medições dos lados e dos ângulos de um polígono com o *software* e as definições de côncavo, convexo e regular; desenvolveu-se construções geométricas como triângulos e quadriláteros diferentes, observou-se a relação entre uma função de forma algébrica e sua visualização geométrica. No final os alunos entregaram seus relatórios junto com as construções. Passou-se uma atividade para cada grupo visando-se a aula do dia seguinte: uma construção geométrica utilizando os dois meios, a régua e o compasso e o *Smartphone*, para que os alunos percebessem e comentassem as diferenças e as vantagens de cada instrumento na construção.

Por fim, fez-se uma atividade norteadora, no objetivo de avaliar como tem sido o uso do *Smartphone* no ensino de geometria com o uso do GeoGebra; perguntou-se também algumas definições e a forma que alguns desenhos foram confeccionados com o uso de réguas e compasso, e também os feitos com o uso dessas novas tecnologias. Assim os alunos colocaram seus pontos de vista de como tem sido o uso do *Smartphone* no ensino de geometria em sala de aula, e o que as aulas com o GeoGebra Mobile trouxeram de benefícios às aulas.

> Obmep[5] 2014 (Nível 2): Questão 9 - O polígono ABCDEF é um hexágono regular. Os ponto H e G são pontos médios dos lados AF e BC, respectivamente. O hexágono ABGKJH é simétrico em relação à reta que passa por G e H. Qual é a razão entre as áreas dos hexágonos ABGKJH e ABCDEF?

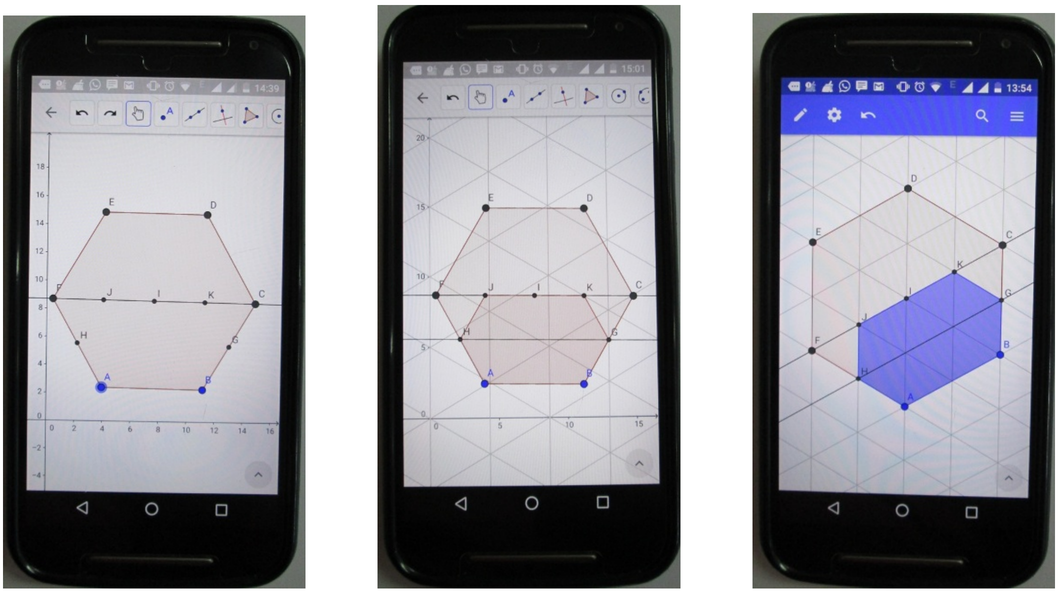
Esta questão foi resolvida apenas com o uso do *Smartphone*:

Pediu-se aos alunos que abrissem o aplicativo GeoGebra em seus *Smartphones*, os que não tinham compartilharam com os colegas que o possuíam. Utilizando-se do ícone Polígono Regular e, clicando em dois pontos na tela geométrica escolhe-se a quantidade de lados construindo-se o hexágono *ABCDEF*. Marcou-se o ícone Ponto Médio ou Centro e criou-se os pontos médios *G* e *H* respectivamente clicando em *BC* e *AF*. Ainda com o botão Ponto Médio acionado, encontrou-se o ponto central *I* clicando em *FC*, em seguida marcou-se o ponto médio *J*, clicando em *FI* e o ponto médio *K*, clicando

[5] Disponível em: < *http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2014.pdf* > acesso em 22 de setembro de 2016.

em IC; com o botão Segmento construiu-se o polígono $ABGKJH$, simétrico ao $ABCDEF$, neste caso o hexágono $ABCDEF$, como mostra a Figura 3. Faltava somente achar a razão entre as áreas pedidas. Para isso apertou-se na tela por alguns segundos e apareceu a opção malhas, escolheu-se a Isométrica, com triângulos, em seguida apertou-se no botão Mover e moveu-se a figura completa até que se encaixasse perfeitamente na malha, então verificou-se que o hexágono $ABGKJH$ tinha apenas 10 triângulos e o hexágono $ABCDEF$ tinha uma área com 24 triângulos, logo uma razão de 10 para 24, ou seja: $\frac{5}{12}$.

Figura 3 – Hexágono Regular, usando-se: Pontos Médios, Malhas Isométricas e Razão entre os hexágonos, por contagem.



Fonte: O próprio autor.

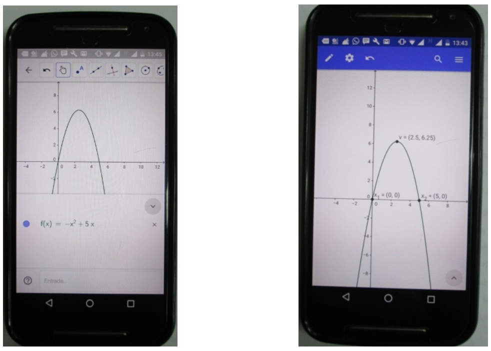
A ECE é uma escola da Aeronáutica, implantada dentro do Centro de Lançamento, sempre seus alunos são convidados para assistirem aos lançamentos, em uma sala onde são mostrados em telões os gráficos com a trajetória do foguete lançado, portanto os alunos vivenciam esta realidade. Para tanto, lançamos uma atividade em que os alunos pudessem trabalhar o gráfico de funções usando-se dos recursos do GeoGebra, o qual permite encontrar raízes e extremos (máximo e mínimo) de uma função polinomial de forma similar aos gráficos mostrados nos lançamentos dos foguetes neste Centro.

> Suponha um foguete sendo lançado do Centro de Lançamento de Alcântara e sua trajetória formando uma parábola, determinada pela função $f(x) = -x^2 + 5x$, sabendo que o ponto de partida e de impacto são exatamente as coordenadas de suas raízes x_1 e x_2, respectivamente. Encontre, em km, o ponto de impacto do foguete e a altura máxima por ele alcançada?

A solução deste problema foi obtida apenas usando o GeoGebra no *smartphone*, com os seguintes passos:

1º) Digita-se na caixa de texto a função do 2º grau $f(x) = -x^2 + 5x$, em seguida aperta-se no ENTER;
2º) Digita-se na caixa de entrada $x = raiz(f)$ e aperta o ENTER. Mostrará no gráfico as raízes x_1 e x_2 da função;
3º) Encontra-se os valores reais dessas raízes clicando em cada ponto delas, em seguida clicando-se na ferramenta Estilo das Legendas (engrenagem) e em “nome & valor";
4º) Encontra-se o Vértice (V) dessa função, ou seja, o ponto máximo atingido, digitando-se na caixa de entrada: $V = Extremo(f)$ e apertando-se no ENTER aparecerá o ponto de máximo. Faz-se o mesmo procedimento anterior para que as coordenadas desse ponto apareça no gráfico.

Figura 4 – Gráfico, Raízes e o Vértice da função f.



Fonte: O próprio autor.

A Figura 4 exibe, respectivamente, o gráfico de f, suas raízes e o seu vértice. Pode-se também nesta turma do 9º ano verificar, de forma dinâmica usando o controle deslizante do GeoGebra, o comportamento do gráfico de acordo com seus coeficientes. Verificou-se que a concavidade da parábola da função $f(x) = ax^2 + 5x$ altera conforme o valor do coeficiente a, ilustrado nos gráficos da Figura 5.

Figura 5 – Quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo; quando $a = 0$, o gráfico é uma reta e quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Fonte: O próprio autor.

3.3 EXPERIÊNCIAS COM O GEOGEBRA EM UMA TURMA DO 3° ANO NO CAIC

Problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos e as soluções algébricas são interpretadas geometricamente, isto foi constatado em sala de aula no 3º ano matutino do Ensino Médio da Escola CAIC (Centro de Atenção Integral à Criança) na cidade de São José de Ribamar no Estado do Maranhão.

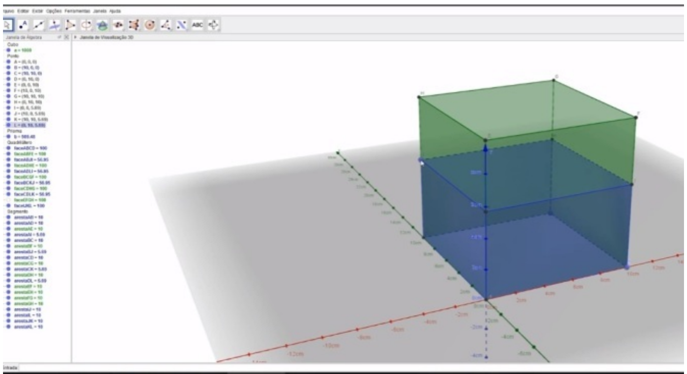
Iniciou-se aula expositiva apresentando o *software* GeoGebra Grapher na versão 3D, em aparelho multimídia *datashow*, acompanhado de apostilas e dos *smartphones* dos alunos. Apresentou-se seus principais botões, os seus eixos e suas janelas. Deixou-se livre para manuseio e por fim fez-se a seguinte atividade:

> (ENEM 2015, Questão 174) - Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, $0,08\ m^3$ de água. Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser:

a) 16. *b*) 800. *c*) 1600. *d*) 8000. *e*) 16000.

A *priori*, resolveu-se o problema em sala de aula usando o pincel e quadro branco. Sabendo-se que cada uma das 10 pessoas dessa família consome uma quantidade diária de $0,08\ m^3$ de água, isso significa que o consumo mínimo, em 20 dias, deverá ser de $20 \times 10 \times 0,08\ m^3 = 16\ m^3$.

Figura 6 – Reservatório com o líquido.



Fonte: O próprio autor.

Em sala de aula, utilizando o GeoGebra no *Smartphone*, construiu-se um cubo de lado 1 m, consequentemente com volume igual a 1 m^3 e inseriu-se neste um prisma de base igual ao do cubo; mudou-se a cor do prisma para diferenciá-lo. O volume do prisma ficou em destaque na tela, tendo seu valor alterado conforme variação da altura, variando de zero até 1000 litros, igual ao volume do cubo, o que permite visualizar essa equivalência, como ilustra a Figura 6.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A atividade pedagógica desenvolvida em sala de aula, com os alunos do 7º ano, utilizando o GeoGebra, permitiu a eles compreender que a solução do sistema linear, resolvido algebricamente, também é a solução geométrica do problema.

Os alunos do 9º ano experimentaram com mais intensidade a construção do conhecimento matemático através de aulas expositivas, culminando com atividades construtivas que os levaram a compreender melhor os polígonos regulares e também as funções do 2º grau e seus gráficos, através do *software* GeoGebra.

A construção geométrica utilizada na prática com os alunos do 3º ano permitiu a eles constatarem que, alterando a altura do prisma, seu volume é modificado.

Foi possível observar que os alunos, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, utilizaram-se do módulo GeoGebra com o propósito de uma aprendizagem mais dinâmica, prazerosa e de fácil compreensão. Observou-se ainda que o uso do *software* GeoGebra no *Smartphone* deu um ar de facilidade no desenvolvimento das aulas e na compreensão das atividades propostas, tendo em vista que o *software* é uma ferramenta atrativa e de interesse dos alunos, principalmente pela inovação, possibilitando uma maior e melhor inserção dos discentes com o conteúdo abordado, proporcionando, de forma evolutiva, a capacidade de abstração, discussão em grupo e visualização de formas e conceitos geométricos em geral. Além disso, todos os alunos construíram figuras, exploraram propriedades, visualizaram e reconheceram padrões geométricos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tratou-se neste artigo uma prática pedagógica no ensino da geometria, usando-se como ferramenta principal o *software* GeoGebra em aparelhos *smartphones*. Desenvolveu-se uma prática pedagógica que possibilitasse aos alunos a utilização de seus próprios aparelhos na construção de um saber matemático, focalizado na geometria.

Escolheu-se essa forma de ensinar pela variedade de aplicações e pelas dificuldades que os alunos têm em aplicar, no cotidiano, as teorias estudadas na geometria. As mesmas dificuldades são sentidas usando-se régua e compasso em suas atividades que necessitam do uso de desenhos geométricos de forma geral.

Pode-se afirmar que este trabalho tem finalidades diversas na área do conhecimento geométrico como um todo e sua aplicabilidade pode ser estendida e adaptada para outras áreas do conhecimento matemático, levando-se em consideração que as ferramentas digitais aqui expostas são de fácil acesso e compreensão e que as mesmas exercem um fascínio em toda a comunidade estudantil, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais eficiente e atrativo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**: técnicas e jogos pedagógicos. Loyola: 9. ed. São Paulo, 1998.

FERREIRA, José França. **Estudo dos ângulos formados por retas paralelas e transversais, usando o software geogebra, analisando sua proficiência no ensino médio**. (TFC: Especialização). Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas: Editora Papirus, 2007.

KOPKE, Regina Coeli Moraes. **Geometria, Desenho, Escola e Transdisciplinaridade**: abordagens possíveis para a Educação. (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2006.

LOPES, M. M. **Construção e Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o software GeoGebra**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2010.

MORE, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática**: ideias e desafios - 7º ano. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

MONTENEGRO, Gildo A.**Inteligência visual e 3-D**. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

PONTE, João Pedro da. et al. **O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional**. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

UNESCO. **Diretrizes de políticas da UNESCO para a aprendizagem móvel**. Publicado pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. Paris 07 SP, France, v. 1, n. 1, fevereiro, 2013. Disponível em: $< http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002196/219641E.pdf >$. Acesso em: 16 set. 2018.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam Softwares de Geometria Dinâmica**: suas características e perspectivas. 2002. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Capítulo 11

RESOLVENDO PROBLEMAS DE CONTAGEM NO GEOGEBRA

Pablo Silva Império[1]
Valeska Martins de Souza[2]

Resumo: Neste trabalho é utilizado o software GeoGebra (versão classic 5) como ferramenta para resolução de problemas de contagem, onde o mesmo é de fundamental importância visto que facilita a visualização e conjecturas a cerca da estratégia de resolução. Busca aqui mostrar que o aplicativo ajuda a compreender os conceitos, uma vez que trabalha a dinamicidade, o que possibilita enxergar um objeto de várias perspectivas.

Palavras-chave: GeoGebra, Contagem e Problemas.

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de contagem são estudados no conteúdo de Análise Combinatória, muito presentes no dia-a-dia. É de suma importância que o mesmo seja trabalho de forma clara e eficiente, no sentido de ter certeza que o que estar sendo pedido no problema seja de fato a solução dada. Desta maneira, faz-se necessário um recurso que ajude o aluno a desenvolver o pensamento construtivo em busca da solução correta. Assim, indo de encontro ao que diz os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Médio (Parte III, pág. 50), "É preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, Ciências Humanas, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto"Sendo a Análise Combinatória um conteúdo difícil de ser trabalhado, pois requer um certo cuidado na interpretação do enunciado do problema, é importante que o aluno possa enxergar com clareza e ter segurança para poder resolvê-lo. O que torna a tarefa menos dura é se ele contar com alguma ferramenta que possibilite facilitar. Neste sentido, o software GeoGebra aparece como um aliado.

O GeoGebra é um software de Matemática que reúne geometria, álgebra e cálculo. Por outro lado, o GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica e permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas seções cônicas como funções que podem ser modificadas dinamicamente (SÁ, 2010).

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns problemas de contagem resolvidos com o auxílio do GeoGebra e mostrar o quanto este aplicativo pode ser útil para com o ensino da matemática.

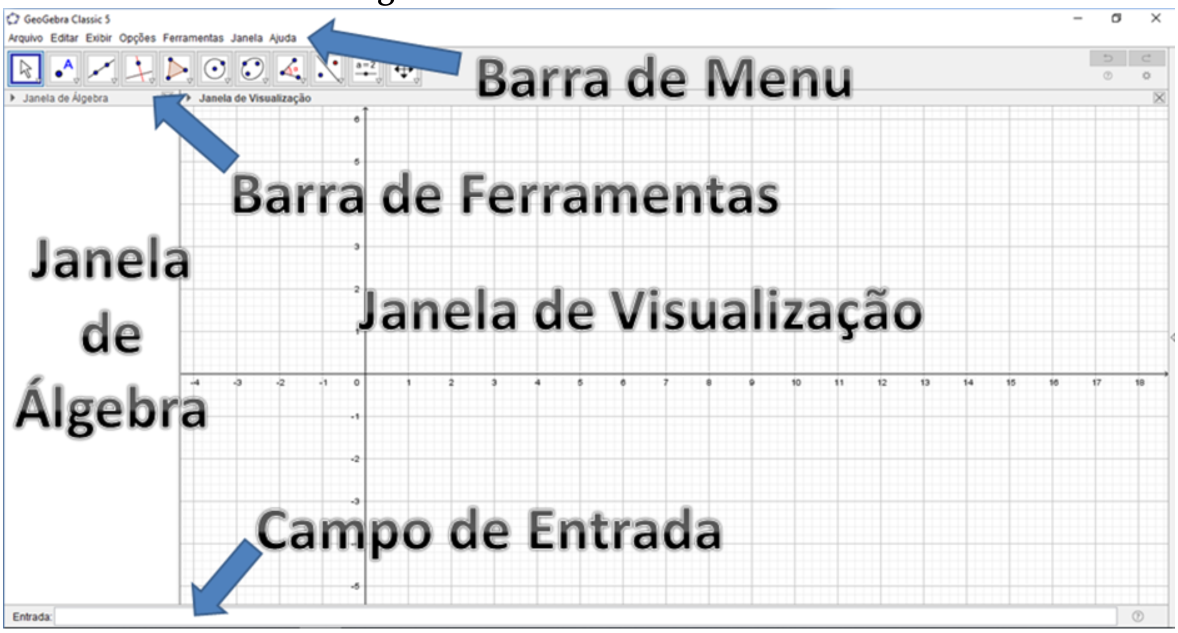
1 IFMA, pablo.imperio@ifma.edu.br
2 UFMA, valeska.martins@ufma.br

2 METODOLOGIA

GeoGebra foi criado em 2001 como tese de mestrado de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg na Áustria, desde então sua popularidade tem crescido. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, possui mais de 300.000 (trezentos mil) downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

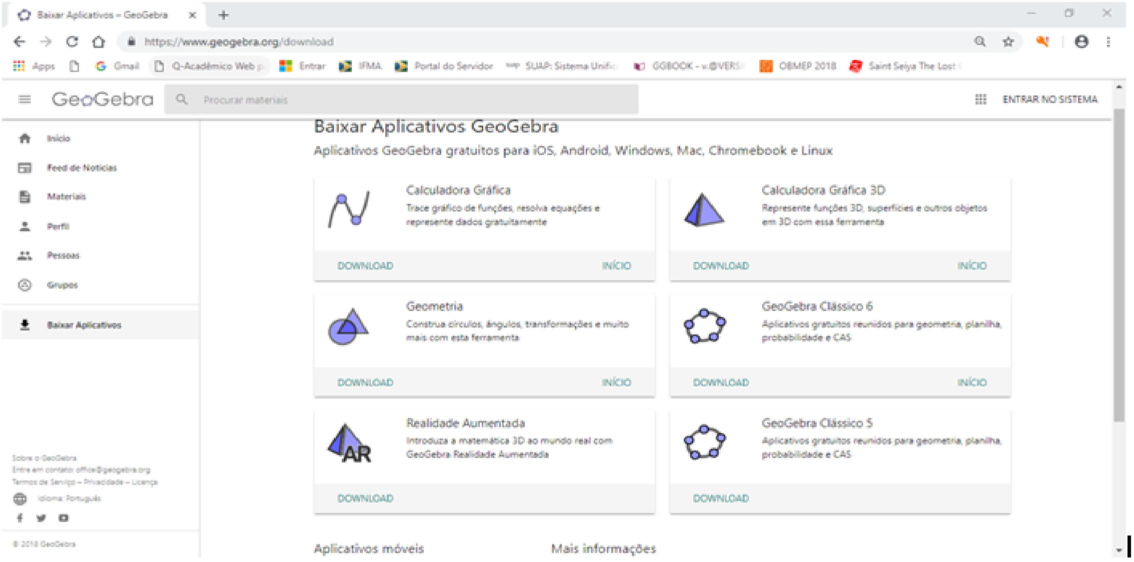
A Figura 1 mostra o aplicativo GeoGebra (versão Classic 5) com a indicação de suas janelas, barras e campo de entrada.

Figura 1: Tela inicial do GeoGebra



Outro fator a ser destacado é que o software pode ser adquirido em várias plataformas (tablets, celulares/smartphones e computadores). Desta maneira, o usuário pode usá-lo sempre que sentir necessidade. A Figura 2 traz a página de downloads do site https://www.geogebra.org , onde é possível baixar as versões do aplicativo.

Figura 2: Página de downloads do site https://www.geogebra.org

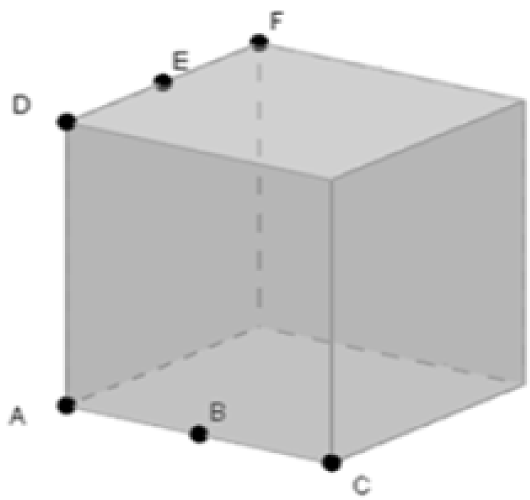


O software, assim como outros aplicativos populares presentes no mercado, mantém um sistema de atualização constante de sua plataforma. Desta maneira, novos recursos são disponibilizados no aplicativo bastando para isso o usuário fazer o download da sua versão mais atual do programa.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados alguns problemas de contagem que foram resolvidos com o auxílio do GeoGebra.

Problema 1. (ENQ-2016.1/ADAPTADA) Considere os pontos A, B, C, D, E e F de um cubo distribuídos como na figura abaixo.



Determine o número de planos que passam em pelo menos três desses pontos.

Solução:

Inicialmente, nota-se que os pontos A,B e C são colineares, da mesma forma que os pontos D, E e F. Toma-se $r = AC = AB = CB$ e $s = DE = DF = EF$.

Usando o axioma da existência (Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles) e o teorema da determinação (Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertença à reta, então eles determinam um único plano que os contém), pode-se resolver este problema de contagem.

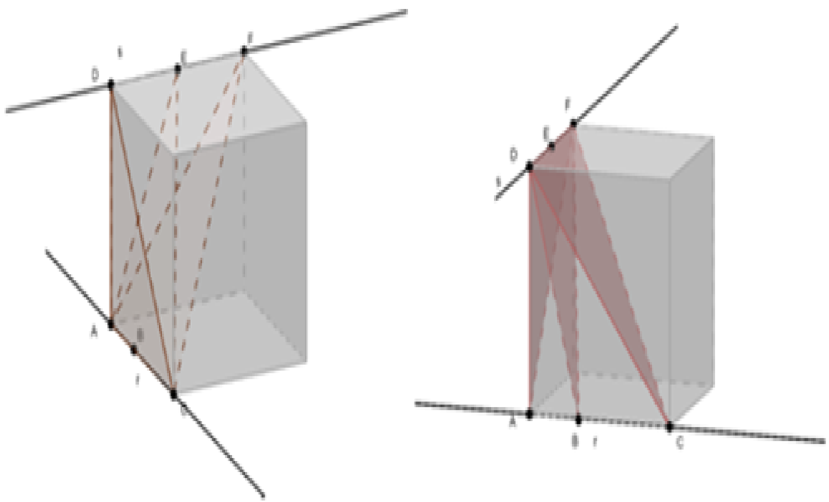
Seja $\alpha_i, i = 1,2,3,4,5,6$ um dos planos determinados por pelo menos três dos pontos A, B, C, D, E e F da figura.

$$\alpha_1 = (r, D), \alpha_2 = (r, E), \alpha_3 = (r, F), \alpha_4 = (s, A), \alpha_5 = (s, B) \text{ e } \alpha_6 = (s, C).$$

Afirmação: não existe outro plano, além dos citados acima, que passe por pelo menos três dos pontos A, B, C, D, E e F. De fato, supondo que existe um plano 4β, diferente de $\alpha_i(1,2,3,4,5,6)$ que contém a reta $t = AE$ e que passe por B. Assim, $\beta = (A, B, E)$.

Ora, $r = AB$. Portanto, $\beta = (r, E) = \alpha_2$. Seguindo este raciocínio, mostra-se que existe apenas seis planos determinados pelos pontos dados. Para uma melhor visualização, será utilizada uma região triangular para representar um plano determinado por três pontos não colineares. A Figura 3 mostra os seis planos determinados pelos pontos A, B, C, D, E e F.

Figura 3: Planos determinados pelos pontos A, B, C, D, E e F



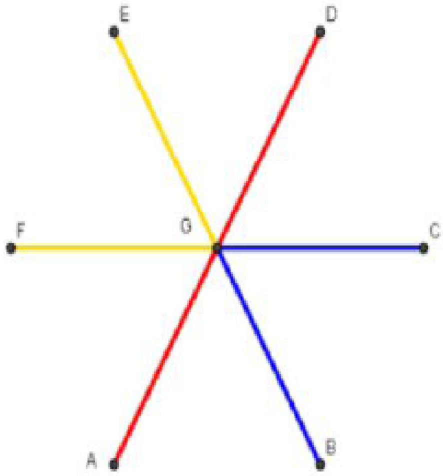
Problema 2. (OBMEP/Banco de Questões 2014). Pedrinho está brincando de fazer arranjos com palitos. Ele dispõe seus palitos formando triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo:

Pedrinho quer pintar cada palito de seu arranjo de tal forma que cada triângulo tenha seus lados pintados de exatamente duas cores diferentes. Para isso, ele dispõe de tintas na cor vermelha, azul e amarela. De quantos modos ele pode pintar o arranjo?

Solução:

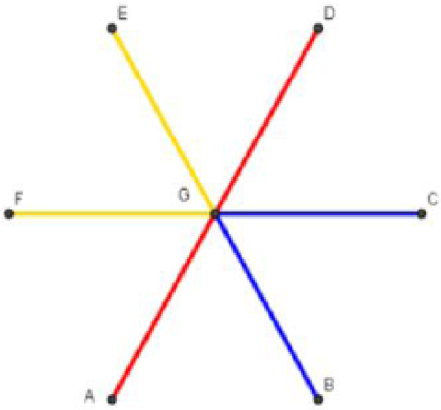
Lançando mão do Princípio Multiplicativo (Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy), há 3^6 maneiras de colorir os segmentos AG, BG, CG, DG, EG e FG. Um possível arranjo de cores é mostrado na Figura 4.

Figura 4: Arranjo de cores de dentro do hexágono

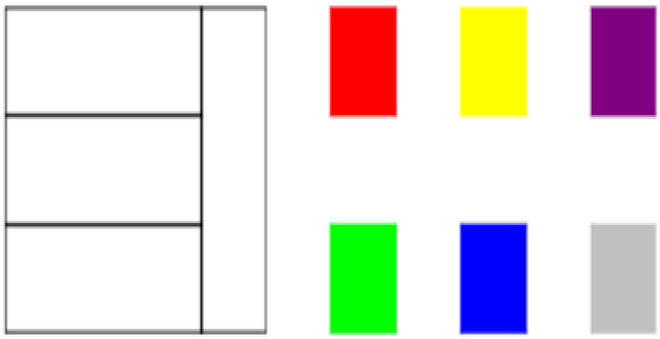


Para completar a solução do problema, nota-se que independentemente de como os palitos do centro foram pintados, há sempre duas possibilidades para se pintar os palitos que formam os lados do hexágono, como mostrado na Figura 5. Assim, tem-se 2^6 maneiras de pintar os lados do hexágono. Como são 3^6 modos de pintar os palitos de dentro, pelo Princípio Multiplicativo se chega ao resultado de $3^6 \cdot 2^6 = 46656$.

Figura 5: Um arranjo de cores para os palitos



Problema 3. Para pintar a bandeira da figura estão disponíveis as seis cores dadas, sendo que regiões adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes.



a) Qual é o número mínimo de cores a serem usadas?
b) De quantos modos a bandeira pode ser pintada?

Solução:

Um problema típico em que se faz necessário o uso de alguma ferramenta que auxilie o professor na resolução do mesmo. Por se tratar de um problema que envolve combinações de cores, usa-se o GeoGebra e com poucos passos confeccionam-se algumas bandeiras, conforme Figura 6, e em seguida se conjectura o resultado.

Figura 6: Algumas possibilidades de cores para a bandeira

Inicialmente, observa-se que as listras horizontais não podem ser pintadas com a mesma cor da listra vertical e que a primeira listra horizontal e a última podem ter a mesma cor. Assim, para o item a, o número mínimo de cores é 3. Com a restrição de não poder ter listras adjacentes de mesma cor e com as observações feitas quando são criadas algumas bandeiras, tem-se:

1. Para primeira e terceira listras horizontais de mesma cor tem-se $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ possibilidades;
2. Para primeira e terceira listras horizontais de cores diferentes tem-se $6 \cdot 5 \cdot 43 = 360$ possibilidades.

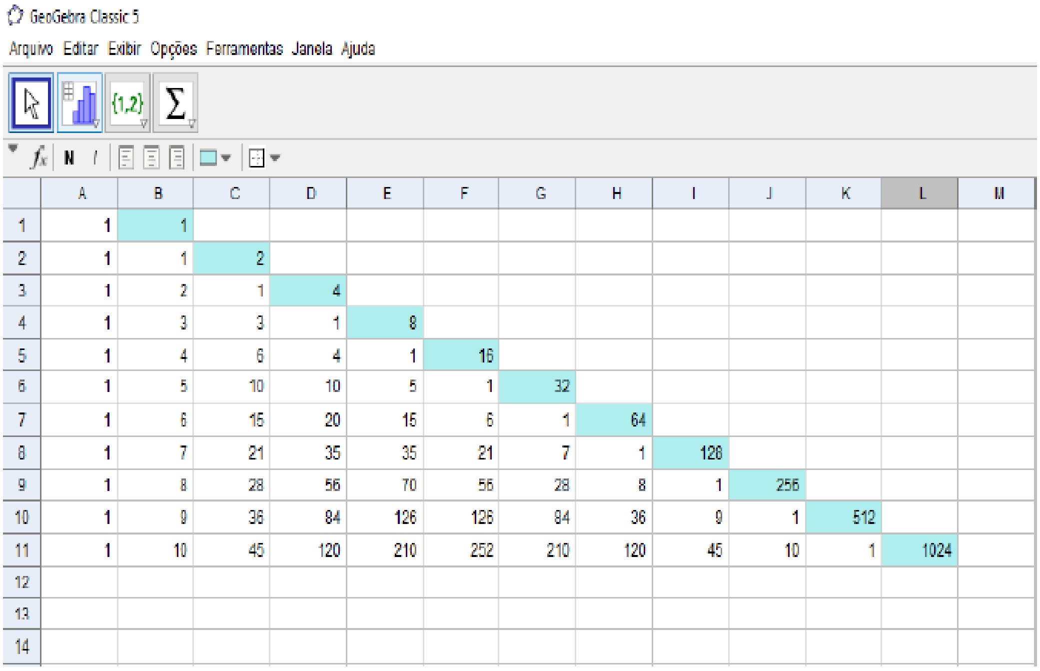
Logo, tem-se $120 + 360 = 480$ maneiras de pintar a bandeira.

Problema 4. (Teorema das Linhas) Mostre que $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Solução:

Com o auxílio da planilha eletrônica monta-se o Triângulo de Pascal, visto na figura 7. Em seguida, faz-se uma conjectura para as somas. Obtendo assim, como resultado para as somas, potências de base 2.

Figura 7: Triângulo de Pascal confeccionado na planilha do GeoGebra



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1	1											
2	1	1	2										
3	1	2	1	4									
4	1	3	3	1	8								
5	1	4	6	4	1	16							
6	1	5	10	10	5	1	32						
7	1	6	15	20	15	6	1	64					
8	1	7	21	35	35	21	7	1	128				
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256			
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512		
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1024	
12													
13													
14													

Lançando-se mão do princípio de indução finita:
Seja $P(n)$ a afirmação $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, para todo n natural.
$P(0)$ é verdade. De fato, $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1 = 2^0$.
Supondo que $P(n)$ seja válido para todo n natural.
Verificando a validade para $P(n+1)$,

$$\begin{aligned} & C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} \\ &= C_{n+1}^0 + C_n^0 + C_n^1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n + C_n^n + C_n^{n+1} \\ &= 2(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n) + 0 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

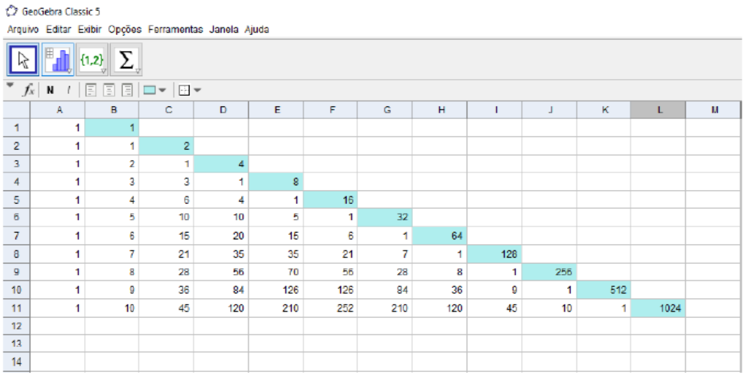
Logo, $P(n)$ é válida para todo n natural.

Problema 5. Em uma reta r estão assinalados 5 pontos distintos e na s estão assinalados 4 pontos distintos. Se r e s são paralelas, quantos triângulos podem ser formados com vértices nesses pontos assinalados?

Solução:

Para formarmos os triângulos pedidos, temos que ter três pontos não alinhados. Assim, devemos escolher dois pontos de uma reta e um da outra, conforme figura 8 abaixo, temos os triângulos ABE, AGI e BCH.

Figura 8: Triângulos com vértices nas retas r e s



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1	1											
2	1	1	2										
3	1	2	1	4									
4	1	3	3	1	8								
5	1	4	6	4	1	16							
6	1	5	10	10	5	1	32						
7	1	6	15	20	15	6	1	64					
8	1	7	21	35	35	21	7	1	128				
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256			
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512		
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1024	
12													
13													
14													

Podemos escolher dois pontos da reta r e um ponto da reta s ou dois pontos da reta s e um ponto da reta r. Assim, temos:

Se forem dois pontos de r e um ponto de s, tem-se, pelo Princípio Multiplicativo,

$$C_5^2 \cdot C_4^1 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{1!3!} = 10 \cdot 4 = 40$$

De forma análoga para dois pontos de s e um de r,

$$C_4^2 \cdot C_5^1 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Portanto, podemos formar $40 + 30 = 70$ triângulos com vértices nos pontos assinalados das retas r e s.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como foco a resolução de problemas de contagem com ajuda do software GeoGebra. Para isso, mostrou-se alguns problemas resolvidos com auxílio do aplicativo.

O GeoGebra, como ferramenta no auxílio na resolução de problemas de contagem, constrói um aspecto muito importante dentro da análise combinatória: o raciocínio construtivo. Pois, ao se fazer conjectura para um problema, infere-se sobre o caminho e técnica a serem usados para se chegar ao resultado correto. Para isso, o GeoGebra dispõe de um aspecto importante que é sua dinamicidade, permitindo analisar um problema de várias maneiras. O que o torna um aplicativo de destaque entre as tecnologias usadas por professores em vários países do mundo.

Ao fazer conjecturas de um problema utilizando o GeoGebra, o aluno constrói sua linha de raciocínio, fazendo com que, mesmo que erre, seja capaz de analisar o problema como um todo e de várias perspectivas. Pois o aplicativo apresenta essa possibilidade de analisar um objeto de vários ângulos e formas. Desta maneira, “aprenda, e faça com que os alunos aprendam, com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada"(LIMA et al., 2016).

É imprescindível que o professor se disponha a trazer para sala de aula essa tecnologia, que requer uma preparação e planejamento para fazer um bom uso. Senão, o professor corre o risco de dificultar o aprendizado do aluno, pois ao fazer a manipulação sem o planejamento, o aluno se dispersa, uma vez que o foco no problema passará para o manuseio do aplicativo.

Por se tratar de um software livre (disponível em várias plataformas, como exemplo: windows, linux), de fácil manipulação, que pode ser instalado em celulares, computadores ou tablets, fazendo com que o software tenha facilidade de acesso para o usuário, acredita-se que o aplicativo seja uma ferramenta de grande ajuda no processo de ensino-aprendizagem. Além de ser uma novidade no estudo de matemática e proporcionar uma abordagem diferente e inovadora, que tira o professor da sua zona de conforto, saindo da metodologia tradicional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília (DF): Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto aplicações**. v. 2. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial posição e métrica. v. 10. 5 ed. São Paulo: Atual, 1999.

FONSECA, Jairo Simon; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Curso de estatística**. 6 ed.São Paulo: Atlas, 1996.

GEOGEBRA INSTITUTES NETWORK. **GeoGebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 27 out. 2018.

INSTITUTO SÃO PAULO GEOGEBRA. **Sobre o GeoGebra**. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia - PUC=SP. Disponível em: <http://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html>. Acesso em: 14 jul. 2016.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**. v 2. 7 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas elementares**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise combinatória e probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SÁ, Ilydio Pereira de. **Primeiros passos com o software livre**: introdução ao GeoGebra: apostila: curso de matemática. Teresópolis, RJ: UNIFESO, 2010.

Capítulo 12

PROBLEMAS VIVENCIADOS NA INDÚSTRIA RESOLVIDOS COM MATEMÁTICA BÁSICA

Aline Fuzaro Lopes[1]
Jesuino Martins de Souza Neto[2]

Resumo: O presente artigo abordará três problemas práticos vivenciados na indústria que podem ser resolvidos utilizando matemática básica.
São problemas interessantes, que à primeira vista podem parecer complexos, mas são relativamente simples. Tais problemas serão explicados de forma que alunos do ensino médio tenham condições de ler e compreender.

Palavras-chave: Área, Volume, Lei dos Cossenos, Fórmula de Heron, Progressão Aritmética.

Abstract: This paper presents three pratical problems experienced in the industry which can be solved using basic mathematics. These are interesting problems, which at first seem to be complex, but are relatively simple. Such problems will be explained in a form that high school students will be able to read and understand.

Keywords: Area, Volume, Cosine Law, Heron Formula, Arithmetic Progression.

1 INTRODUÇÃO

A melhor forma de estimular o interesse de alunos em determinadas disciplinas é tentar mostrá-los a aplicação dos conteúdos no seu dia a dia. Serão explicados ao longo deste artigo três problemas práticos vivenciados na indústria, em particular na indústria *offshore*, que podem ser resolvidos utilizando matemática básica. São eles:

- Como calcular o volume de líquido em um cilindro posicionado horizontalmente;
- Como calcular o comprimento de um cabo de espessura significativa enrolado em um tambor sabendo a quantidade de voltas;
- Como determinar a posição de um objeto, sabendo a distância deste até dois pontos de referência (sistema de posicionamento).

Não será utilizado conhecimento do ensino superior, mesmo sabendo que este traria uma resolução mais sucinta de alguns dos problemas propostos. O objetivo é mostrar que ferramentas matemáticas ministradas no ensino médio, por vezes são suficientes para resolver problemas do cotidiano de maneira satisfatória.

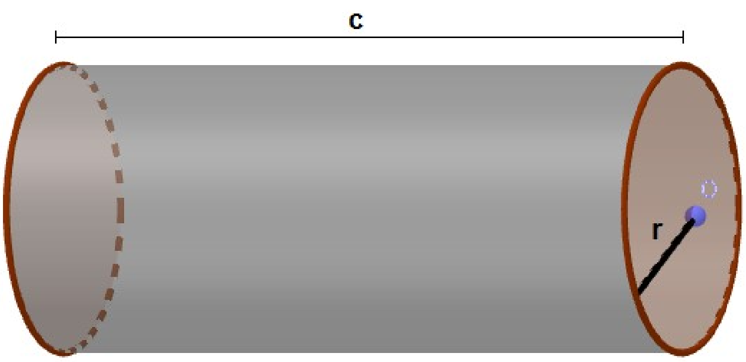
[1] UFES,
[2] UFES, jesuinomartins@gmail.com

2 PROBLEMA 1: CALCULAR O VOLUME DE LÍQUIDO EM UM CILINDRO POSICIONADO HORIZONTALMENTE

Suponha que em uma indústria haja um recipiente cilíndrico que possua um determinado líquido (óleo residual, combustível, água potável...), mas não é salutar deixar este recipiente na posição vertical por conta das questões construtivas do local para o qual este foi designado. Se a quantidade de líquido precisa ser monitorada, qual deve ser o procedimento para calcular o valor exato do volume sabendo apenas a altura do nível do líquido?

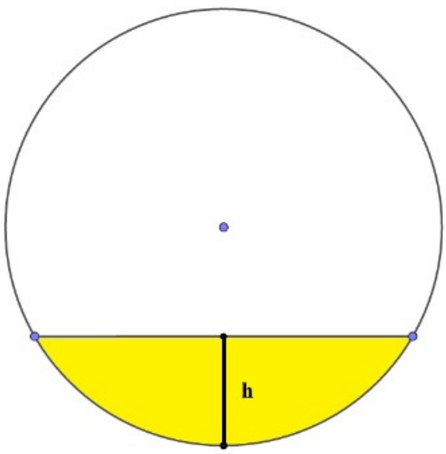
O raio do cilindro r e o comprimento longitudinal c são conhecidos. A Figura 1 ilustra a situação descrita.

Figura 1 – Cilindro posicionado horizontalmente.



Basta, então, calcular a área marcada em amarelo que representa a quantidade de líquido, mostrada na Figura 2, e multiplicar pelo comprimento c. Mas calcular essa área requer um pouco de conhecimento de geometria, e será necessário calcular um arco cosseno.

Figura 2 – Vista frontal do cilindro com nível de líquido abaixo da metade.



O problema será divido em duas partes: quando a volume estiver abaixo da metade ($h < r$), e quando o volume estiver acima da metade ($h > r$).

Se $h = r$, o volume de líquido será igual à metade do volume total do cilindro, ou seja:

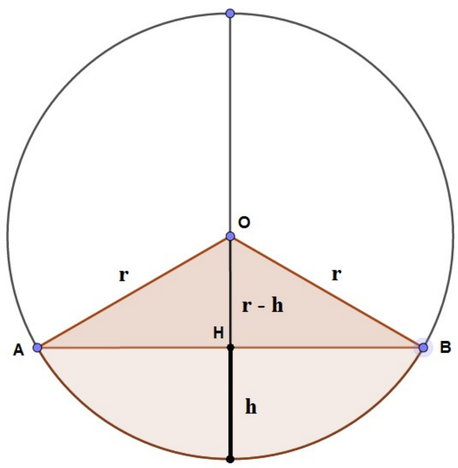
$$Volume = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot c}{2}.$$

- $h < r$:

Sejam de A e B as extremidades do arco ao qual o líquido determina.

Ao desenhar o raio r do círculo na direção dos pontos A e B, obtém-se um setor circular (Figura 3).

Figura 3 – Representação dos parâmetros para cálculo do nível de líquido ($h < r$).



Note que o setor pode ser dividido em duas outras figuras conhecidas pelos alunos de ensino médio: um triângulo e um segmento circular.

É possível calcular a área do segmento circular como a diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo isósceles OAB.

Ao desenhar um raio perpendicular ao segmento AB, divide-se a corda AB em dois segmentos congruentes.

Tome por H o encontro do raio e da corda AB.

Os triângulos OAH e OBH são retângulos e congruentes pelo caso LAL.

Portanto, o ângulo α, dado em radianos, formado entre os segmentos OH e OB pode ser calculado por razões trigonométricas:

$$\cos\alpha = \frac{c.a.}{hip.}$$

onde $c.a.$ é o valor do cateto adjacente e $hip.$ é o valor da hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{r}$$

Consequentemente:

$$\alpha = \arccos(1 - \tfrac{h}{r})$$

Uma vez que a medida do raio r é conhecida, a área da face do cilindro é calculada facilmente:

$$A = \pi \cdot r^2.$$

Consegue-se, então, calcular a área do setor circular definido pelo arco AB, utilizando regra de três. A medida do ângulo AOB será igual a $2 \cdot \alpha$.

Área		Ângulo
$\pi \cdot r^2$	–	$2\ \pi$ rad
A_{setor}	–	$2 \cdot \arccos(1 - \frac{h}{r})$

Logo, a área do setor será dada por:

$$A_{setor} = r^2 \cdot \arccos(1 - \tfrac{h}{r})$$

Para calcular a área do triângulo OAB será necessário a medida da corda AB.

Mas $AB = AH + HB$. Como $AH = HB$, então, $AB = 2 \cdot HB$. Como o triângulo OHB é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se a medida de HB:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + HB^2 \\ r^2 &= (r-h)^2 + HB^2 \\ r^2 &= r^2 - 2 \cdot h \cdot r + h^2 + HB^2 \\ HB &= \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)} \end{aligned}$$

Assim, a área do triângulo OAB será dada por:

$$\begin{aligned} A_{triangulo} &= \tfrac{AB \cdot OH}{2} \\ A_{triangulo} &= \tfrac{2 \cdot HB \cdot OH}{2} \\ A_{triangulo} &= \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)} \cdot (r-h) \end{aligned}$$

Com isso, a área do segmento é dada por:

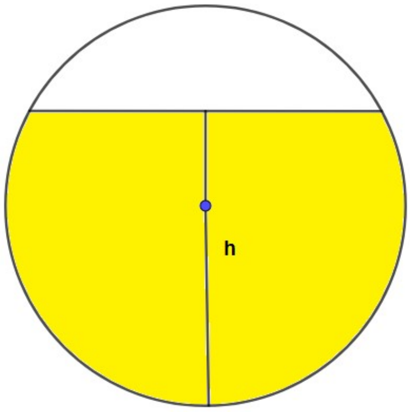
$$\begin{aligned} A_{segmento} &= A_{setor} - A_{triangulo} \\ A_{segmento} &= r^2 \cdot \arccos(1 - \tfrac{h}{r}) - \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)} \cdot (r-h) \end{aligned}$$

Logo, o volume em questão será dado por:

$$Volume = A_{segmento} \cdot c$$

- $h > r$:

Figura 4 – Vista frontal do cilindro com nível de líquido acima da metade.

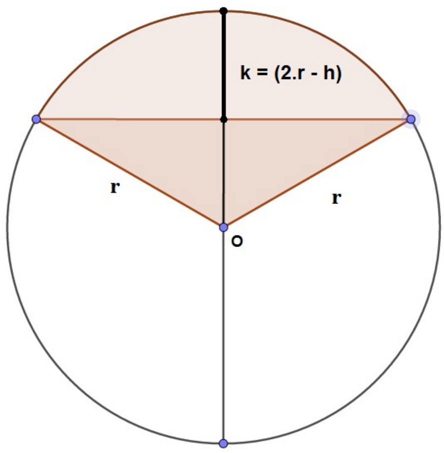


Novamente, basta calcular a área representada em amarelo na Figura 4 e multiplicar pelo comprimento do cilindro c.

No entanto, para este caso, será mais simples calcular a área total da face do cilindro e subtrair da área representada em branco na Figura 4, pois o procedimento será análogo ao caso anterior.

Considere a Figura 5 a seguir:

Figura 5 – Representação dos parâmetros para cálculo do nível de líquido ($h > r$).



Como representado na figura, o valor de k é dado por:

$$k = (2 \cdot r - h)$$

Logo, a área do segmento vazio poderá ser calculada pela seguinte fórmula:

$$A_{vazia} = r^2 \cdot \arccos(1 - \tfrac{k}{r}) - \sqrt{k \cdot (2 \cdot r - k)} \cdot (r - k)$$

Portanto, a área que o líquido representa será:

$$A_{segmento} = A_{total} - A_{vazia}$$
$$A_{segmento} = \pi \cdot r^2 - [r^2 \cdot \arccos(1 - \tfrac{k}{r}) - \sqrt{k \cdot (2 \cdot r - k)} \cdot (r - k)]$$

E o volume novamente é calculado por:

$$Volume = A_{segmento} \cdot c$$

3 PROBLEMA 2: COMO CALCULAR O COMPRIMENTO DE UM CABO DE ESPESSURA SIGNIFICATIVA ENROLADO EM UM TAMBOR

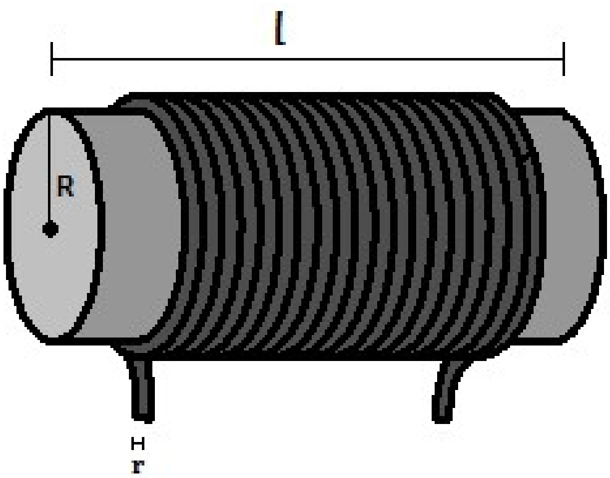
O segundo problema é calcular o comprimento de um cabo de espessura significativa enrolado em um tambor sabendo a quantidade de voltas deste cabo sobre o tambor.

Como aplicação prática de tal situação, pode-se citar uma embarcação ancorada em alto mar que possui guinchos através dos quais as âncoras ficam presas. Devido às forças que agem sobre a embarcação (ventos, correntes marítimas, abalroamentos com outras embarcações...), a mesma pode sofrer deslocamento da sua posição original. Além disso, pode ocorrer uma variação do nível de água do local onde a embarcação se encontra. Dessa maneira, a quantidade de cabo nos guinchos deve ser ajustada.

O ajuste que deve ser feito é calculado por pessoas especializadas que analisam a catenária dos cabos abaixo da água e fornecem os valores de quanto deve ser prolongado ou recolhido em cada um dos guinchos.

Um tambor com cabo enrolado sobre ele é mostrado a seguir.

Figura 6 – Cabo de espessura significativa enrolado em um tambor.



Sejam R o raio do tambor, r o raio do cabo e l o comprimento dos extremos do tambor.

É fácil perceber que à medida que o número de camadas aumenta, é necessário uma maior quantidade de cabo para preencher o tambor de uma extremidade à outra.

Note que a quantidade de cabo necessário para fechar a primeira volta (c) será dada por:

$$c = 2 \cdot \pi \cdot (R + r)$$

É considerado o centro do cabo. Isso ocorre pois, como o cabo possui espessura significativa, a parte externa teria naturalmente um valor maior do que a parte interna; é como se a parte interna se deformasse um pouco para acomodar o cabo. Portanto, considerar o valor do raio do cabo é uma boa aproximação do que ocorre na realidade.

O cabo ocupará um espaço de $2r$ na extensão do tambor em cada volta.

Seja n o número total de voltas ao longo da extensão total do tambor, que será o mesmo independentemente da quantidade de camadas. Sabendo que ao longo do tambor haverá um número inteiro de voltas, conclui-se que $n \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$\frac{l}{2 \cdot r} - 1 < n \leq \frac{l}{2 \cdot r}$$

Sendo assim, será necessário para completar a extensão do tambor na primeira camada um comprimento de cabo:

$$c_1 = 2 \cdot \pi \cdot (R + r) \cdot n$$

No entanto, isso não será mais uma verdade a partir da segunda camada, visto que houve um aumento do perímetro do círculo a ser preenchido.

Perceba que o raio do círculo do tambor passou a ser o raio anterior $(R + r)$ mais a espessura do cabo $(2r)$. Portanto, tem-se um novo raio na segunda volta $(R + 3r)$. No comprimento, permanecem as mesmas n voltas, e portanto, será necessário para preencher a segunda camada uma quantidade de cabo:

$$c_2 = 2 \cdot \pi \cdot (R + 3r) \cdot n$$

De maneira análoga, na terceira camada tem-se uma nova medida de raio, que é o raio anterior acrescido da espessura do cabo, ou seja, $(R + 3r) + 2r = R + 5r$. E ainda de maneira análoga, a quantidade de voltas sobre o tambor permanece constante n.

Portanto, é possível concluir que a quantidade de cabo utilizado na terceira camada será de:

$$c_3 = 2 \cdot \pi \cdot (R + 5r) \cdot n$$

Analisando a medida dos raios ao longo das voltas pode-se notar que, na primeira volta o raio era $(R + r)$, na segunda, $(R + 3r)$, na terceira, $(R + 5r)$, e assim, sucessivamente, visto que a cada camada o raio aumenta a espessura do cabo. O que representa uma progressão aritmética.

Portanto, na k-ésima camada tem-se um raio de $R + (2k - 1)r$.

Consequentemente, o comprimento total do cabo por camada pode ser representado pela soma da quantidade de cabo gasto em cada camada. Assim, considerando k camadas completas tem-se uma quantidade de cabo C igual a:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot (R + r) \cdot n + 2 \cdot \pi \cdot (R + 3r) \cdot n + 2 \cdot \pi \cdot (R + 5r) \cdot n + \ldots + 2 \cdot \pi \cdot (R + (2k - 1)r) \cdot n$$

Ou ainda, colocando $2 \cdot \pi \cdot n$ em evidência:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot n(R + r + R + 3r + R + 5r + \ldots + R + (2k - 1)r)$$

Note que, como há uma soma de k termos, pode-se agrupar os R e colocar o r em evidência. Assim,

$$C = 2 \cdot \pi \cdot n(kR + r(1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1)$$

Como $(1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1)$ é uma soma de Progressão Aritmética (PA), cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2, conclui-se que:

$$(1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1) = \frac{(1 + (2k-1)) \cdot k}{2} = k^2$$

Desta forma, para k camadas completas tem-se a seguinte quantidade de cabo enrolado no tambor:

$$C_k = 2 \cdot \pi \cdot n(kR + rk^2)$$

Caso a última camada não esteja completa, basta calcular o quanto de cabo é gasto em uma volta e multiplicar pela quantidade de voltas específicas, em lugar de multiplicar por n.

Logo, sendo p a quantidade de voltas parciais na última camada, pode-se generalizar assim:

Dadas k camadas completas e uma com p voltas, a quantidade de cabo total utilizada no tambor será:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot n(kR + rk^2) + 2 \cdot \pi \cdot (R + (2k + 1)r) \cdot p$$

4 PROBLEMA 3: COMO DETERMINAR A POSIÇÃO DE UM OBJETO, SABENDO A DISTÂNCIA DESTE ATÉ DOIS PONTOS DE REFERÊNCIA

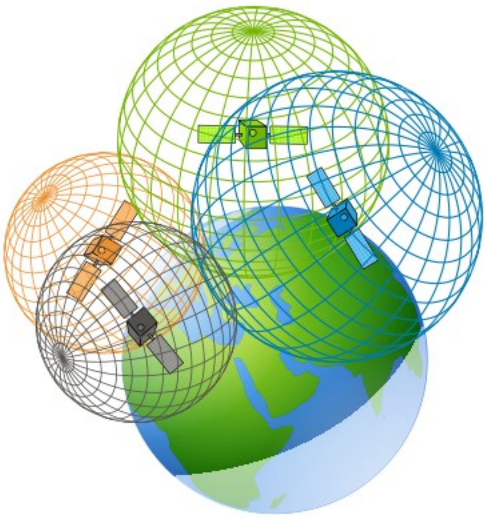
Considere agora uma embarcação que está próxima a um porto e precisa realizar transporte de mercadorias para uma outra embarcação por meio de guindastes. Como as embarcações não estão ancoradas, ambas sofreriam deslocamento da posição inicial ao longo do tempo, e isso não pode ocorrer durante as manobras, já que são transportadas cargas pesadas. Sendo assim, tais embarcações deverão tomar providência para manter suas posições. Como isso pode ser feito, sabendo que não há demarcação no mar sobre o local onde as embarcações devem ficar?

A resposta intuitiva é: "basta utilizar um *GPS* (*Global Positioning System*)". Mas como o *GPS* funciona?

Não é difícil explicar o princípio de funcionamento de um *GPS*. Apesar de saber que o sistema necessita de alguns cálculos não tão óbvios, o mais importante deles é feito por um transmissor/receptor com intuito de determinar a posição de um objeto. Os satélites enviam um sinal de rádio na direção do objeto e, com base no tempo que o sinal leva para chegar até o referido, calcula-se a distância entre os dois. Em seguida, localizam-se todos os pontos no espaço cuja distância até o satélite seja, exatamente, a mesma encontrada nesse primeiro momento, formando uma esfera.

Mais três satélites realizam este mesmo processo, e através da intersecção das quatro esferas, o ponto é determinado. Na Figura 7, está representada a dinâmica deste processo.

Figura 7 – Representação do localização de um ponto por meio de *GPS*.



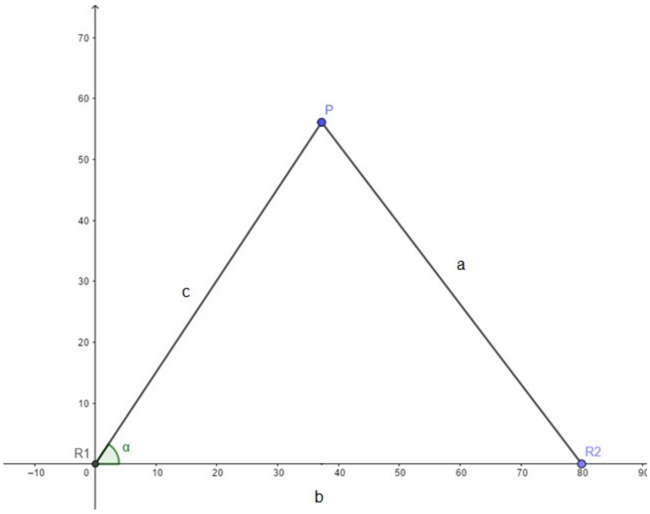
FONTE: https://pt.kisspng.com/kisspng-xhf9bw/preview.html

Entretanto, pode não ser trivial para alunos de ensino médio entenderem as equações das esferas no espaço e calcularem suas intersecções.

O problema será resolvido de uma maneira mais simples: como as embarcações estão próximas a um porto, a superfície da terra será considerada plana. É uma aproximação razoável para distâncias pequenas.

Considere dois pontos de referência ($R1$ e $R2$) na terra, que possuem uma distância conhecida entre si (b). Sabendo a distância de uma embarcação até $R1$ e $R2$, pode-se identificar a posição da mesma. Considerando a terra como um plano cartesiano, com o ponto $R1$ sobre a origem, e $R2$ sobre o eixo das abcissas, cria-se um triângulo ao representar as distâncias do ponto P até $R1$ (c) e $R2$ (a). A figura abaixo ilustra a situação:

Figura 8 – Triângulo representado pela distância entre os pontos.



Utilizando a Fórmula de Heron, calcula-se a área do triângulo formado pelos três pontos.

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Onde p representa o semiperímetro do triângulo de lados a, b e c:

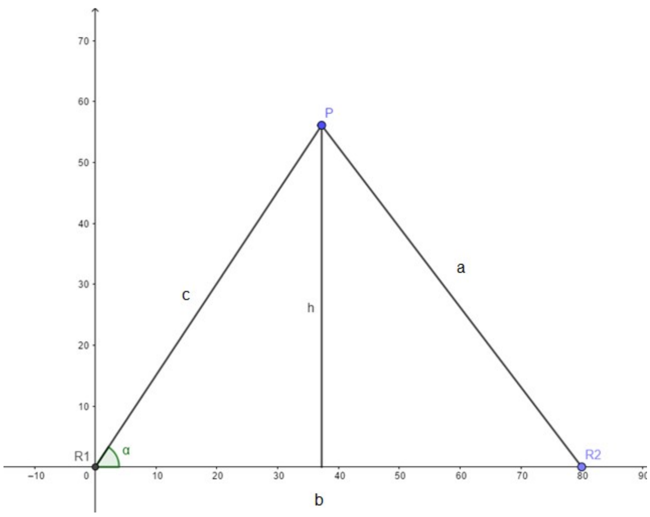
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Mas a área do triângulo também pode ser calculada pela fórmula:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Onde h representa a altura do triângulo de base b, como representado na figura a seguir:

Figura 9 – Representação da altura h do triângulo formado pelo pontos.



Logo,

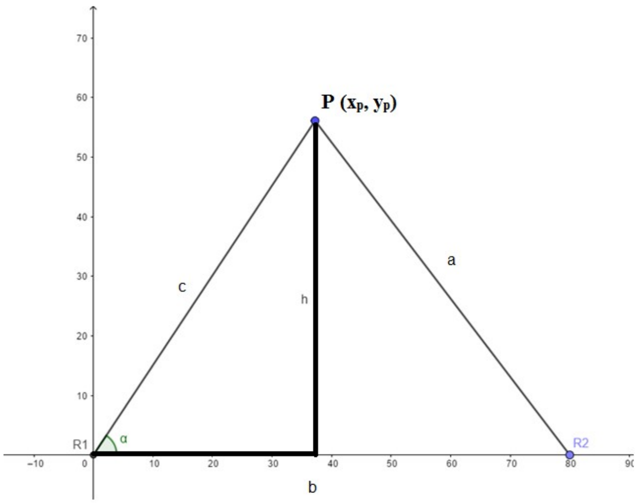
$$h = \frac{2 \cdot A}{b}$$

Seja α o ângulo formado entre os lados c e b do triângulo proposto. Pela lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

E assim, determina-se a posição do ponto $P(X_P, Y_P)$:

Figura 10 – Representação da localização da embarcação com as coordenadas calculadas.



$$Y_P = h = \frac{2 \cdot A}{b} \longrightarrow Y_P = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}{b}$$

$$X_P = c \cdot \cos(\alpha) \longrightarrow X_P = c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \longrightarrow X_P = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b}$$

Utilizando o procedimento descrito para as embarcações, são definidas as coordenadas que determinam os pontos em que as mesmas devem permanecer paradas $P_1(X_1, Y_1)$ e $P_2(X_2, Y_2)$.

O cálculo da posição real deve ser feito continuamente, e à medida que a posição muda, devem ser tomadas as devidas providências (motores de propulsão são acionados) para corrigir a posição.

Para auxiliar neste processo, é interessante utilizar um programa gráfico que mostra a posição definida e a posição em que a embarcação se encontra, de forma que ao visualizar o operador possa realizar a correção (se o processo não for feito automaticamente).

No caso de uma situação real, além da posição da embarcação, deve ser levado em consideração o aproamento da mesma. O problema se torna um pouco mais complexo. Nesse caso, além do sistema de posicionamento, deve ser utilizado uma bússola que indicará a direção e sentido para os quais embarcação está aproada, e sabendo o aproamento correto, alguns motores são acionados para realizar as correções.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim conclui-se o artigo que mostra como resolver três possíveis problemas vivenciados em uma indústria utilizando matemática básica.

É importante frisar que tais soluções não são únicas. Ao longo do desenvolvimento os autores propuseram diferentes soluções para os problemas, que obtinham o mesmo resultado. Foram apontadas as soluções que concluíram ser mais didáticas.

Uma das maiores belezas da matemática está no fato de que é possível chegar a uma mesma conclusão por meio de caminhos diferentes.

Espera-se ao término deste que as palavras escritas incentivem os leitores a buscarem o conhecimento da matemática, pois ela está presente em nosso cotidiano, mesmo que imperceptivelmente.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MARTINS, Elaine. **Como funciona o GPS?** Disponível em <https://www.tecmundo.com.br/gps/2562-como-funciona-o-gps-.htm> Acesso em: 03 de outubro de 2018

TAKARA, Enzo Marcon. **GEOMETRIA PLANA** Disponível em <https://docplayer.com.br/22201866-Geometria-plana-prof-enzo-marcon-takara.html> Acesso em: 28 de setembro de 2018

Capítulo 13

CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM À LUZ DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: uma investigação com estudantes do 1° ano do ensino médio de uma escola pública do município de Imperatriz – Maranhão

Raimundo J. Barbosa BRANDÃO[1]
João Coelho SILVA FILHO[2]
Rafael Chaves da LUZ[3]

Resumo: Neste artigo apresenta-se uma pesquisa realizada com enfoque no conceito de função afim à luz de registros semióticos numéricos e algébricos. O estudo, que possui abordagem quantitativa, foi realizado em uma escola pública estadual no município de Imperatriz, estado do maranhão. O objetivo deste estudo foi investigar a aprendizagem dos alunos no uso didático da conversão e tratamento de registros. Os dados constaram de observações e das análises das atividades propostas, que mostram que ainda há muita dificuldade, por parte dos alunos na interpretação da linguem matemática para linguagem algébrica, no caso no estudo de funções do primeiro grau.

Palavras-Chave: Função afim. Registros Semióticos. Apendizagem. Conversão e tratamento

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como pressupostos a inquietação dos pesquisadores, que ao longo de suas práticas docentes, têm observado os obstáculos que alguns alunos ingressantes nas licenciaturas em matemática, principalmente os egressos de escolas públicas, e para se apropriarem do conceito formal de função, como também para fazerem interpretações gráficas de funções.

Diante das dificuldades de compreensão do conceito de função pelos ingressantes nas licenciaturas, principalmente por estudantes egressos das escolas públicas, os pesquisadores buscaram responder a seguinte questões de pesquisa: como se desenvolve os processos de aprendizagem do conceito de função afim pelos alunos do ensino médio, tendo como enfoque teórico metodológico os registros de representação semiótica? Quais as contribuições que os

[1] Doutor em Educação Matemática. Professor Adjunto II da Universidade Estadual do Maranhão, vinculado ao Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática - Rede Nacional – PROFMAT. professorbranndao@bol.com.br; Professorbrandao.uema@yahoo.com.br

[2] Doutor em Engenharia Elétrica, Professor Adjunto IV, Coordenador do Mestrado profissional em Matemática/PROFMAT. Coordenador do Grupo de Pesquisa de Teoria dos Números e da Codificação. Coordenador na Área de Matemática do Programa de Iniciação à Docência - PIBID-CAPES.

[3] Licenciado em Matemática. Professor da rede pública da educação Básica. Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT NA Universidade estadual do Maranhão/UEMA.

registros de representação semiótica poderiam corroborar no processo de ensino e aprendizagem de função afim?

Este estudo teve como objetivo investigar a aprendizagem dos alunos no uso didático da conversão e tratamento de registros. Justifica-se esta investigação, dado que nas últimas décadas o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, no estado do Maranhão, tem sido motivo de preocupação e estudos por parte dos governantes, professores e pesquisadores em virtude dos estudantes, em geral de todos os níveis de escolaridade, terem demostrado dificuldades de compreensão de conteúdos relacionados a esse componente curricular e desta forma, chegam às licenciaturas em matemática com certas dificuldades de compreensão de determinados conceitos de funções, em especial a função de 1° grau que é alvo do estudo.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Compreensão do Conceito de Função

O estudo de função afim, bem como de qualquer outro objeto matemático, dada a sua a sua abstração, e fundamental que as diversos formas de representação esteja presente nas atividades de ensino para uma melhor compressão do conceito e naturalmente apreensão do mesmo.

Compreender o conceito é [...] concebido como o ato de apreender o seu significado. Tal ação provavelmente será uma ação de generalização e de síntese de significados particulares de "estrutura" do conceito (a "estrutura" do conceito é a rede de significações dos enunciados que foram considerados). Esses particulares significados devem ser apreendidos com ações de compreensão [...] A metodologia dessas ações de compreensão preocupa-se principalmente com o processo da construção do significado dos conceitos. (D'AMORE, 2005, pp.24-25 apud BRANDÃO, 2012, p. 71).

As dificuldades encontradas no processor de ensino e aprendizagem mediadas pelo professor precisa, precisa ser investigada para encontrar-se novas maneiras de ensinar e aprender matemática com visão critico social dos conceitos e seus significados.

Na teoria figurativa, segundo Batanero e Godino (1994, apud D'AMORE, 2005), o significado consiste numa relação convencional entre signos e entidades concretas ou ideias, existindo independente dos signos linguísticos que possam ocorrer; logo, esses signos e entidades pressupõem um realismo conceitual; enquanto a teoria pragmática e as expressões linguísticas vão possuir significados diferentes, dependendo do contexto em que são utilizados. A grande questão que se coloca agora na compreensão do significado dos conceitos, independentemente de qualquer teoria, é o tipo de linguagem utilizada, pois todos nós sabemos, ao enunciarmos qualquer problema, que o seu conceito e seu significado terão uma forte relação com os tipos diversos de representação linguística (BRANDÃO, 2012, p. 71).

É, por tanto necessário, que no estudo de um objeto matemático se explore os diversos tipos de representação, pois segundo Duval (20130 a compreensão desse objeto se dará efetivamente pela mobilização de pelo menos dois registros de representação.

Um sistema para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, de acordo com Neres (2010) deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiósis: a formação de uma representação identificada como uma representação de um registro dado, como por exemplo, o desenho de uma figura geométrica; o tratamento de uma representação e a conversão de uma representação em outra.

Para Kammi (1995) inovar o ensino da Matemática tem relação com o desenvolvimento de novas metodologias contemplando os conteúdos programáticos com o propósito de favorecer o desenvolvimento da habilidade, criatividade e autonomia do aluno contribuindo dessa forma, para a construção do conhecimento e tornando o estudante um ser pensante crítico e reflexivo.

Baseado nesse contexto, entende-se que o estudo de funções favorece todas essas prerrogativas elencadas por Kammi, pois os conteúdos relacionados a funções se fazem presentes em grande parte da Matemática e em outras Ciências e a compreensão do conceito e seu significado, se faz necessário para a apreensão do objeto matemático. Este objeto de estudo faz parte da natureza e frequentemente é utilizado para modelagem dos fenômenos naturais, que de acordo com Gómez e Vilela (2007, p. 78), estão intimamente ligadas às origens da Matemática e têm aparecido direta ou indiretamente nos grandes passos do desenvolvimento da Ciência.

Em geral, os fenômenos naturais são descritos e modelados matematicamente e as funções de maneira geral são muito importantes para representar e estimar as ações da natureza. Dada a sua importância no cotidiano profissional e do cidadão, o conteúdo de função é um objeto matemático inserido na disciplina de Matemática nos documentos oficiais da educação brasileira, assim como no mundo em geral.

No Brasil, esta inserção deve-se, em grande parte, aos acontecimentos oriundos do ano de 1929. O processo de inserção do tema função entre os conteúdos da Matemática do secundário (hoje ensino médio) está diretamente vinculado à criação, concretizada no ano letivo de 1929, de uma nova disciplina escolar do ensino brasileiro denominada Matemática, resultante da unificação de três outras, até então independentes: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria (BRAGA, 2006, p. 25 apud ABREU, 2011, p. 19).

De acordo com os PCNEM, o estudo de funções é importante na formação acadêmica, pois facilita o aluno no processo de compreensão dos fenômenos naturais e sociais. Encontra-se em Brasil (2002) que o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das Ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo fazer várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p.121).

O estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras relações funcionais e que, de início, esbocem gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento. (BRASIL, 2006, p.72). Dessa forma, para melhor apreender as concepções do objeto matemático função é preciso compreender os diversos tipos de linguagens presentes na educação matemática.

2.2 Sistema de Representação Semiótica

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, de acordo com Neres (2010) deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semioses: a formação de uma representação identificada como uma representação de um registro dado, como por exemplo, o desenho de uma figura geométrica; o tratamento de uma representação e a conversão de uma representação em outra.

Segundo Neres (2010) a passagem de um sistema de representação a outro, ou seja, a mobilização simultânea de vários sistemas de representação, no decorrer do mesmo percurso, usado em atividade matemática, em geral, para a maioria dos alunos, não se apresenta assim de forma tão evidente, visto que a passagem espontânea de uma representação semiótica a outra só acontece quando as mesmas são congruentes. Essa passagem, segundo Duval (2009), só ocorre de forma espontânea, quando:

a) Existe uma correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.

b) Há a mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações.

c) Há conversão de uma unidade significante da representação de saída em uma só unidade significante de chegada. Ele afirma ainda que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e não está sujeita às atividades de tratamento.

Do ponto de vista matemático, na representação de registros, o uso de conversão, segundo Freitas (2003), desempenha um papel importante, do ponto de vista cognitivo. Dessa forma, para Neres (2014) a originalidade da atividade matemática, em termos cognitivos, para cada situação problema está relacionada aos processos de conversão, pois é a conversão que leva a uma melhor compreensão.

Por outro lado, Neres (2017) também afirma que, quando o professor utiliza novos recursos didáticos e procura representar o conteúdo ministrado de várias formas, a perspectiva de aprendizagem poderá ter o resultado desejado.

Portanto, a atenção para com a linguagem Matemática é fundamental, pois tanto ela pode ser instrumento para a discussão racional de conceitos altamente matematizados, como pode veicular metáforas realistas, pretensamente didáticas, que obstaculizam o conhecimento científico. O descaso para com as rupturas existentes na linguagem científica apenas tende a reter o aluno no conhecimento comum, e fazê-lo desconsiderar que a Ciência sofre constantes mudanças e retifica seus erros (LOPES, 2007).

Todo e qualquer tipo de linguagem tem sua representação e em Matemática não é diferente. Todo objeto matemático pode ser representado de diversas maneiras. Quando numa situação de aprendizagem um aluno tem a capacidade de transitar entre diferentes tipos de registros de representação de um mesmo objeto, num problema do mesmo tipo, mas em ambiente diferente, espera-se, segundo D'Amore (2005), que ele transferirá o saber de uma situação para outra, de um modo natural, implícito, espontâneo, sem exigências cognitivas específicas para a nova situação de aprendizagem.

Os diversos tipos de representação de um objeto matemático, são fundamentais para a aprendizagem conceitual e compreensão do significado deste objeto. O aluno ao desenvolver a capacidade de representar e identificar um objeto em diferentes representações pode facilitar para que ele possa verificar mais facilmente as relações existentes entre os objetos de estudo.

Sendo assim, entende-se que no estudo das funções, é necessário promover a distinção entre o conceito de função, seu significado e os seus diferentes tipos de representação algébrica, gráfica e linguagem natural, entre outras.

A distinção entre um objeto e sua representação semiótica é um ponto estratégico para a compreensão da Matemática. (DUVAL, 1993, p.37). Para ele, a Semiótica é uma ciência que tem por objeto de investigação a utilização da linguagem por meio dos diferentes signos, denominados de registros de representações semiótica. Para Peirce (2010), qualquer coisa que represente algum (objeto) para alguém, evocando uma ideia, o seu interpretante, é um signo, ou representâmen.

De acordo com Brandão (2009) saber a distinção entre um objeto e sua representação é fundamental para a compreensão de conteúdos da Matemática. Este ponto é tão essencial para aprendizagem que na concepção de Deledieq e Lassavel (1979) é o objeto representado que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis.

Um signo é tudo aquilo que está relacionado com uma segunda coisa, seu objeto, com respeito a uma qualidade, de modo a trazer uma terceira coisa, seu interpretante, para uma relação com o mesmo objeto, e de modo que traga uma quarta coisa para uma relação com aquele objeto da mesma forma, ad infinitum (PEIRCE, 2010, p. 28).

A semiósis implica três atividades cognitivas de representação: a formação de representações num registro semiótico, o tratamento e as conversões. Para Duval (2009, p. 53) essa formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos' representar", seja para "exprimir" uma representação mental, seja para "evocar" um objeto real.

A atividade de tratamento consiste na transformação de uma representação dentro do mesmo registro, já a atividade de conversão ocorre quando a transformação produz uma representação em outro registro.

Segundo Almouloud (2007) o tratamento pode ou não resultar em algoritmo. Aquele que resulta em algoritmo apresenta regras operatórias para resolução de uma equação qualquer. Já os tratamentos que não se reduzem a algoritmos, segundo Andrade Filho (2013) são aqueles puramente figurais ou visuais, como as figuras geométricas. Para o autor, os objetos que se enquadram no segundo caso geralmente não se tornam objetos de ensino, por serem classificados como de segunda importância.

A conversão é, ao contrário, uma transformação (DUVAL, 2008) que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. Como exemplo de conversão pose-se considerar a passagem do registro gráfico para o algébrico.

3 MATERIAIS

O instrumento utilizado para coleta de dados foram três situações problemas, aplicados aos alunos de uma escola pública de Imperatriz (MA). As questões visam informar ao pesquisador sobre a capacidade do aluno em realizar uma conversão partido do registro língua natural para o algébrico e a realização de tratamento. Conforme Lakatos (2010, p. 107), "o questionário é constituído por uma série de perguntas que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do pesquisador, quer dizer sem interferências ou qualquer forma de persuasão”, no caso, as situações problemas.

As perguntas foram elaboradas pelos próprios autores. Para coletar os dados, foi levando em consideração a autorização da instituição, onde ocorreu a pesquisa e também consentimento dos alunos, alvo do estudo.

Uma cópia das situações problemas, foi entregue a cada participante da pesquisa, que responderam individualmente, de modo que não foram influenciados em suas atribuições.

Participaram desta pesquisa 50 alunos do 1º do ensino médio da Escola Pública da cidade de Imperatriz MA, em 2018 e o tempo médio para a resolução da atividade proposta foi de aproximadamente 50 minutos. De acordo com Martins (2005), essa amostra ficou estabelecida dentro dos padrões de credibilidade estatísticos.

Os pesquisadores elaboraram situações-problemas com o propósito de avaliarem as percepções dos alunos acerca do conceito de função, sua representação e análise de gráficos.

O procedimento técnico adotado é a pesquisa exploratória, fundamentada na leitura de livros, revistas científicas e artigos impressos, que serviram para expor ideias consideradas pertinentes na elaboração do artigo, podendo envolver exemplos que estimulem a compreensão. O delineamento foi feito a partir da pesquisa de campo, com levantamento de dados.

4 MÉTODO

Trata-se de uma pesquisa quantitativa e qualitativa de caráter interventivo, em que a metodologia consistiu em vivenciar como ocorreria a compreensão conceitual e as habilidades dos estudantes ao resolverem problemas envolvendo função afim, à luz de representações semióticas.

Segundo Lakatos e Marconi (2010), o método consiste no conjunto de atividades sistemáticas, que permite discorrer ou alcançar com maior segurança conhecimentos válidos e verdadeiros sobre um determinado fenômeno ou pesquisa, traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões dos cientistas.

Método “é o caminho pela qual se chega a determinado resultado, ainda que esse caminho não tenha sido fixado de antemão de modo refletido e deliberado” (LAKATOS; MARCONI, 2010 p. 9).

O método de investigação desta pesquisa tem abordagem do tipo quantitativo, pois se faz necessária a constatação da relação da realidade com o objeto de estudo, obtendo várias interpretações de uma análise indutiva por parte do pesquisador. Os valores são adicionados ao conceito operacional, para transformá-lo em variável qualitativa ou quantitativa (LAKATOS; MARCONI, 2010).

A pesquisa tem uma abordagem quantitativa na quantificação dos dados obtidos nos questionários e na apresentação e análise gráfica dos resultados. Quanto ao objetivo, é de caráter exploratória, por proporcionar maior entrosamento com o problema, visando torná-lo explícito, ou construir hipóteses pesquisáveis para estudos futuros (SILVA; MENEZES, 2005).

Dessa forma, por meio da resolução de atividades de função afim em sala de aula, visou-se o diagnóstico conceitual do estudantes sobre o conteúdo de funções.

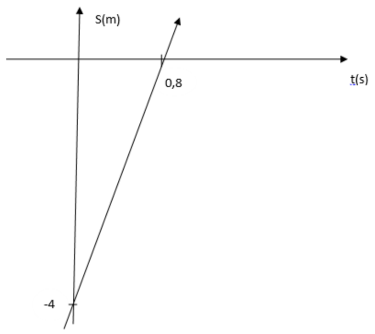
Ressalta a diversidade existente entre os trabalhos qualitativos e enumera um conjunto de características essenciais capazes de identificar uma pesquisa desse tipo, a saber: 1) ambiente natural como fonte direta de dados; 2) o caráter descritivo; 3) o significado que as pessoas dão as coisas e à sua vida como preocupação do investigador; 4) enfoque indutivo (GODOY, 1995, p. 62).

O método quantitativo, segundo Richardson et al. (1999), caracteriza-se pelo emprego da quantificação tanto nas modalidades de coleta de informações quanto no tratamento delas por meio de técnicas estatísticas. A pesquisa quantitativa lida com números, usa modelos estatísticos para explicar os dados.

Os critérios de inclusão previstos para a participação nesta pesquisa foram: ser aluno do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública em Imperatriz (MA); sem distinção de gênero; escolhido por ocasião da coleta de dados; e que aceitasse participar voluntariamente da investigação. Já os critérios de exclusão estão relacionados ao total de indivíduos, até que se completasse a amostra desejada.

5 RESULTADOS

Foram elaborados 3 situações problemas e colocadas para 50 alunos de 1º responderem. Em aproximadamente 50 minutos, os estudantes responderam e devolveram os problemas propostos. Segue na quadro 1 os exercícios propostos, aplicados que tem por objetivo avaliar a capacidade do aluno em realizar uma conversão partido do registro língua natural para o algébrico e a realização de tratamento.

Atividade 1	Em uma loja de eletrodoméstico, um funcionário recebe um salário fixo de R$ 1.120,00 e mais uma comissão de 15% do valor vendido no mês. Baseado nestas informações, encontrar: a) A lei de formação (função) que permita calcular o salário dos funcionários. b) Qual o salário mensal de um funcionário que vender R$ 6.420,00 durante um mês? c) Quanto o funcionário precisará vender durante um mês para que o seu salário seja R$ 4.800,00?
Atividade 2	Passando férias com a família, um casal resolveu, certo dia, levar seus filhos para pescar. Descobriu que próximo ao hotel onde estavam hospedados existiam dois pesque-pagues (I) e (II) No Pesque-pague I a entrada é R$ 7,00 por família e R$ 12,00 quilo de peixe que levar, enquanto no pesque-pague II, a entrada custa R$ 15,00 por família e R$ 10,00 por cada quilo de peixe que levar. O gasto total de uma família num pesque-pague é calculado pelo valor da entrada e da quantidade (em kg) de peixe que levar. Baseado nestas informações pede-se encontrar: a) A lei de formação Matemática que permita calcular a função gasto total para uma família que for ao pesque-pague (I). b) A lei de formação Matemática que permita calcular a função gasto total para uma família que for ao pesque-pague (II). c) Quanto uma família pagará no pesque-pague (I), se levar quatro quilos de peixe? d) Quanto uma família pagará no pesque-pague (I), se levar seis quilos de peixe? E quanto pagaria no pesque-pague (II), se levar a mesma quantidade de peixe? e) Quantos quilos de peixe uma família levaria pagando o mesmo valor tanto no pesque-pague (I), quanto no (II) f) represente graficamente as funções dos itens (a) e (b)
Atividade 3	O gráfico abaixo representa o deslocamento de um ponto material ao longo de uma trajetória, onde o espaço percorrido é dado em metros e o tempo gasto em segundos:  Pede-se: a) Encontrar a função do espaço em função do tempo, b) O espaço percorrido após 3s, c) O ponto que o corpo passa pela origem do espaço.

Quadro 1 – Exercícios propostos aplicados aos estudantes.
Fonte: Elaboras pelos autores, 2018.

O Maranhão vem demostrando avanços, nos resultados da avaliação IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), mesmo que pequenos e ainda insatisfatórios, além da representatividade. De acordo com as diretrizes Nacionais, os estudantes são capazes de responder a questões definidas com clareza, que envolvem contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes. São capazes de executar ações óbvias. Essa constatação é apresentada no gráfico 01.

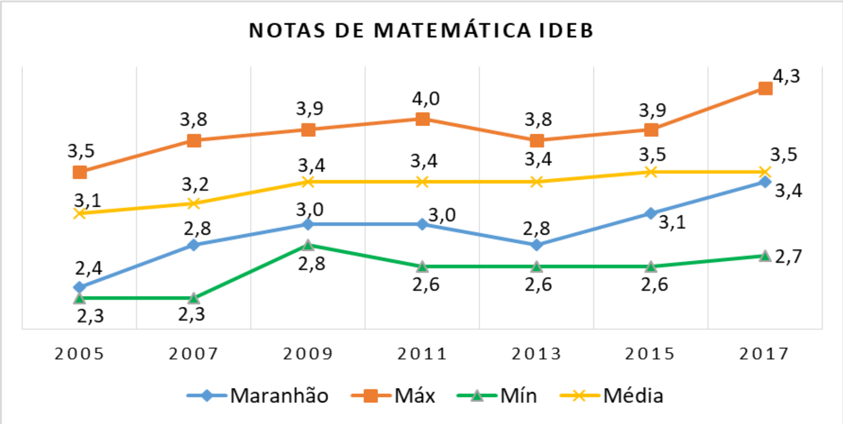


GRÁFICO 01 – IDEB Maranhão.
Fonte: MEC/INEP, 2018.

Percebe-se que o Maranhão, mesmo melhorado seu desempenho nas últimas avaliações, está longe de atingir a meta que é 6,0. Os dados mostram um fraco aumento nas últimas edições do IDEB.

Uma proporção cada vez maior de situações cotidianas requer algum nível de conhecimento matemático para enfrentar desafios nos aspectos pessoal, ocupacional, social e científico. Portanto, é fundamental ter um discernimento sobre o grau em que os jovens egressos da escola estão preparados para aplicar a matemática na compreensão dos assuntos e na solução de problemas significativos.

Nesse contexto, com o questionário aplicado aos alunos de 1º ano do Ensino Médio, buscou-se verificar o grau de entendimento de conceitos matemáticos e capacidade de resolução de problemas cotidianos no que diz respeito ao conteúdo de funções do primeiro grau.

Segundo a Secretaria do Estado do Maranhão, os descritores de matemática elencados nas diretrizes curriculares, que versam especificamente sobre função afim, são:

D19 – Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.

D20 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais aprsentadas em gráficos.

D21 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

D23 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º por meio de seus coeficientes.

D24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado seu gráfico.

Dessa forma o gráfico 02, mostra os resultados obtidos na primeira situação problema.

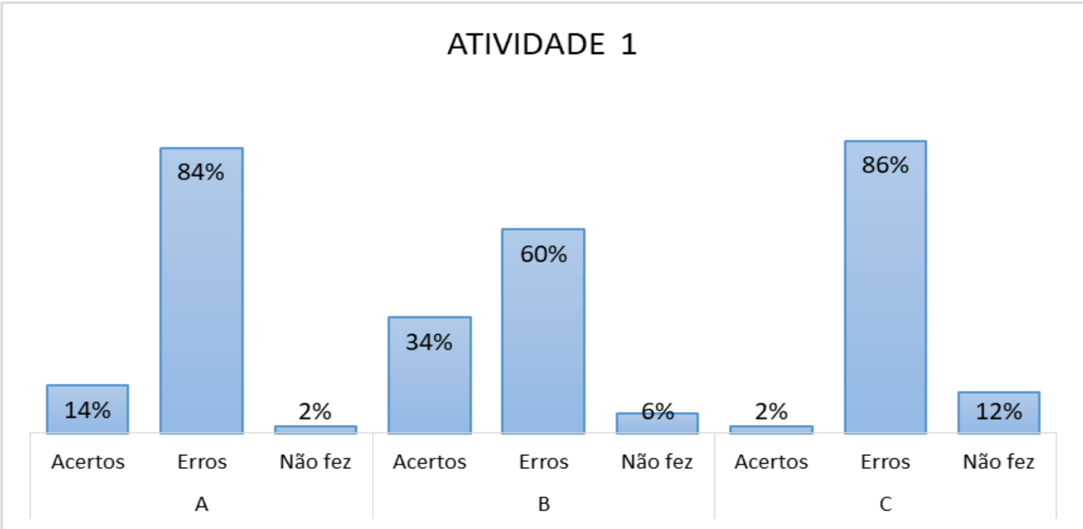


GRÁFICO 02 – Atividade 1.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O gráfico revela que 14% dos estudantes acertaram o item (a), 34% acertaram o item (b), e apenas 2% acertaram ao item (c). Apenas 2% conseguiram responder a situação problema completamente correta. Mostrando uma situação, no mínimo preocupante, em relação aos descritores elencandos nas Diretrizes Curriculares do Estado. Para o gráfico 03, a situação quase não muda.

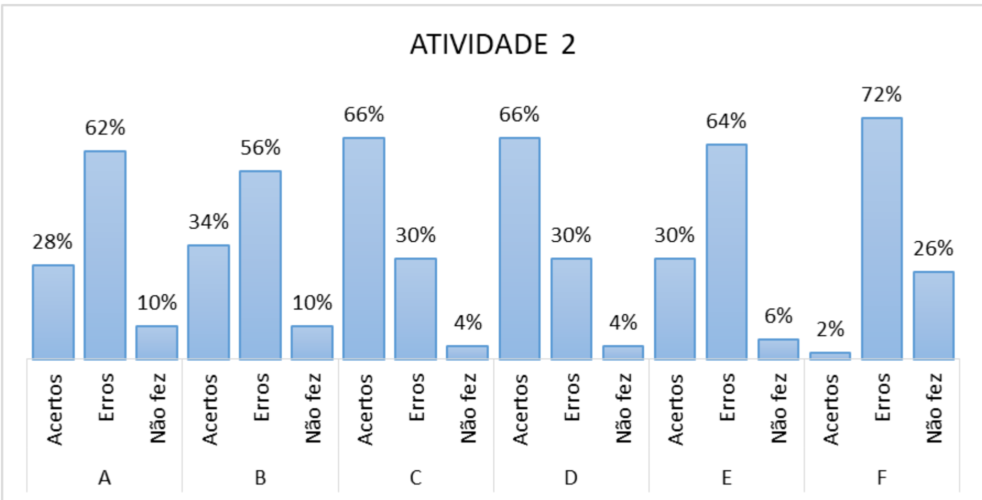


GRÁFICO 03 – Atividade 2.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O gráfico 03 aponta que os alunos não conseguem escrever a linguagem matemática, no item (a) e (b), mas conseguem resolver o item (c) e (d) pois não necessitam necessariamene da linguagem algébrica da atividade. Quanto a construação do gráfico apenas 2% consegui elaborar um esboço correto da situação abordada.

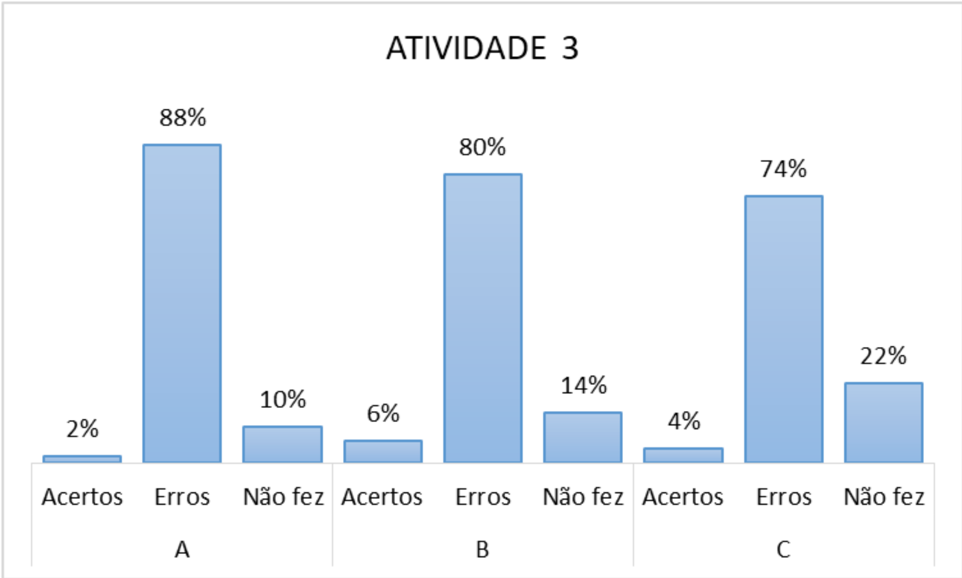


GRÁFICO 04 – Atividade 3.
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

No gráfico 04, sobre a atividade 3, que aborda o descritor 24 (D24) – Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado seu gráfico. Nota-se um índice muito alto de alunos que não responderam satisfatoriamente a atividade. Nenhum dos alunos acertou 100% o problema.

Os três exercicios mostram um péssimo desempenho por parte dos alunos, o que está condizente com as médias IDEB do resto do Estado do maranhão. Nenhum dos descitores foram alcançados satisfatoriamente pelos alunos. Segundo o MEC, sete de cada dez alunos do ensino médio têm nível insuficiente em português e matemática. A pesquisa deixou claro que os estudantes ainta tem grandes desafios para superar na matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Historicamente percebe-se uma lenta evolução no aprendizado da matemática. Essa situação tende a se manter, mesmo a matemática se relacionando com importantes áreas do conhecimento.

A aprendizagem da matemática, entendida como um processo de desenvolvimento global e de integração em uma visão de totalidade, permite fazer um componente importante na construção da cidadania, uma vez que a sociedade, está em constante modificação, insere novas formas de ver, de pensar, de ler e de se relacionar com o mundo e com os seres.

Nessa perspectiva, a aplicação dos exercícios mostrou que na escola em questão, ainda tem-se grandes dificuldades no aprendizado da matemática, principalmente quando contextualizadas, conforme os dados obtidos na pesquisa. Os dados mostram ainda, um grande atraso no aprendizado de matemática no Maranhão, com índices abaixo da média esperada em relação ao restante do país.

Um aspecto que pode melhorar essa situação é uma contínua busca por qualidade de ensino por parte do docente. Outro é a revolução tecnológica na educação, com computadores, calculadoras, vídeos, entre outros. São algumas das ferramentas que modificam as rotinas de aula e que exigem, por parte do professor e alunos, uma nova postura em relação ao aprendizado matemático.

Nesta pesquisa buscou-se investigar, a aprendizagem dos alunos no uso didático da conversão e tratamento de registros, por meio de questões previamente elaboradas que contemplam os descritores matemáticos em Imperatriz (MA).

Cabe agora persistir nessa evolução e no crescimento do conhecimento matemático, acelerando cada vez mais a inclusão de camadas sociais que ainda não conseguiram chegar ao Ensino Superior. Ainda que todos desejassem que tal inclusão ocorresse em ritmo mais rápido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Lorena Luquini de Barros. Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática: o caso da função afim. Pós-Graduação em Educação Matemática. Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora Instituto de Ciências Exatas. Dissertação de Mestrado. Juíz de Fora. MG, 2011.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da Didática da Matemática. 1ª ed. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007.

ANDRADE FILHO, Dazilicio Manoel de. Processos de conversão de registros em língua natural para linguagem matemática: análise com base na teoria da relevância. Dissertação de Mestrado. Universidade do Sul de Santa Catarina. Tubarão – SC, 2013

BRAGA, Ciro. Função: a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006. 174 p.

BRASIL. Ministério da Educação. PCNs +. Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilía. DF, 2006.

D'AMORE, B. Epistemologia e didática da Matemática. São Paulo: Escrituras, Título do original: Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didatica della matemática. 2005.

DELEDIEQ & LASSAV. Faire des mathématiques, 4ème. Paris: Cédic. 1979)

DUVAL, R. ; EGRET, M. A. Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. Repères, 12, p. 114-140, 1993.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: registros em representação semiótica. Ed. Papirus, São Paulo. 2003.

______. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Coleção Contextos da Ciência, fascículo 1.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008.

DUVAL, R. Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma - entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FREITAS, José Luiz M. de. Registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 113-124. (Coleção Papirus Educação).

GODOY, Arida S., Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. In: Revista de Administração de empresas, V35, n. 2. São Paulo, 1995.

GÓMEZ, Jorge J. Delgado; VILELA, Maria Lúcia T. Pré-Cálculo; Volume 2, Módulos 3 e 4. 4. ed. 2007, Rio de Janeiro. Fundação Cecierj / Consórcio Cederj... Rio de Janeiro: Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro, 2007.

KAMMI, C.. Desvendando a aritmética: implicações na teoria de Piaget. – Campinas-SP: Papirus, 1995.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LOPES, Alice Ribeiro Casimiro. Currículo e epistemologia. Ijuí, RS: UNIJUÍ, 2007.

MARTINS, Gilberto de Andrade. Estatística Geral e Aplicada. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2005. p. 186 – 188.

NERES, R. L. Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino - aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental. 2010. 196 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília /SP, 2010.

______. Aprendizagem Matemática usando Registros Semióticos. ARETÉ -MANAUS. v.7, p.72 - 82, 2014.

NERES, R. L.; CASTRO, E. R.; MIGUEL, J. C. Mathematics in the Initial Years of Fundamental Teaching in Brazil: An Experience with Teachers in Training in the Pedagogy Course. Creative Education. v.8, p.607 - 626, 2017.

PEIRCE, Charles Sanders. Semiótica. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

RICHARDSON, R. J et al. Pesquisa social: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 3ª edição, 1999.

<http://portal.inep.gov.br/consulta, acesso em 10 de setembro de 2018.>

ABEU
Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

EDUFMA
Editora da Universidade
Federal do Maranhão

UFMA

A VIDA É COMBATE

Universidade Federal do Maranhão

PROFMAT

ISBN 978-65-86619-29-4

9 786586 619294 >

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

EDUFMA