

Cálculo Integral:

NOTAS DE AULA

Arlane Vieira e Pedro Lima
Bacharelado em Ciência e Tecnologia

2017

Arlane Vieira e Pedro Lima

Cálculo Integral:

NOTAS DE AULA

SÃO LUÍS



EDUFMA

2017

Copyright © 2017 by EDUFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Profa. Dra. Nair Portela Silva Coutinho
Reitora

Prof. Dr. Fernando Carvalho Silva
Vice-Reitor

EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Sanatiel de Jesus Pereira
Diretor

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. Jardel Oliveira Santos

Profa. Dra. Michele Goulart Massuchin

Prof. Dr. Jadir Machado Lessa

Profa. Dra. Francisca das Chagas Silva Lima

Bibliotecária Tatiana Cotrim Serra Freire

Profa. Dra. Maria Mary Ferreira

Profa. Dra. Raquel Gomes Noronha

Prof. Dr. Ítalo Domingos Santirocchi

Prof. Me. Cristiano Leonardo de Alan Kardec Capovilla Luz

Revisão

Cláuberson Carvalho

Projeto Gráfico

Arlane Vieira e Pedro Lima

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Vieira, Arlane.

Cálculo integral: notas de aula / Arlane Vieira, Pedro Lima. — São Luís: EDUFMA, 2017.

119 p.

ISBN: 978-8578626976

1. Cálculo integral. 2. Integrais de funções. 3. Sequências. 4. Séries. I. Lima, Pedro.
II. Título.

CDD 515.43

CDU 517.3

Agradecimentos

Pedro Lima agradece a Sathya Sai Baba pela orientação.

Ambos os autores agradecem a Lauro Mandela pela edição e revisão de partes do texto desta obra.

Conteúdo

1	Primitivas	11
1.1	Relação entre funções com derivadas iguais	11
1.2	Primitivas imediatas	13
1.3	Integração por substituição	14
1.4	Integração funções racionais: caso 1	17
1.4.1	Numerador constante	17
1.4.2	Numerador de primeiro grau	18
1.4.3	Numerador de grau maior que um	18
1.5	Integração funções racionais: caso 2	19
1.5.1	$Q(x)$ admite uma única raiz real	19
1.5.2	$Q(x)$ admite apenas duas raízes reais distintas	20
1.5.3	$Q(x)$ admite três raízes reais distintas	20
1.6	Integração por partes	21
1.7	Integração funções racionais: caso 3	23
1.8	Substituições trigonométricas	28
1.9	Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	29
1.10	Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	33
1.11	Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{(x+\lambda)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$	34
1.12	Integração funções racionais: caso geral	35
1.13	Integração funções racionais: Método de Ostrogradsky	36
1.14	A substituição $u = \tan(x/2)$	37
1.15	Integrais de funções irracionais	39
1.16	Integrais de binômios diferenciais	40
1.17	Integração de funções da forma $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	41
1.17.1	Primeira substituição de Euler	41
1.17.2	Segunda substituição de Euler	42
1.17.3	Terceira substituição de Euler	43

2	Integral de Riemann	45
2.1	Teorema Fundamental do Cálculo	45
2.2	Mudança de variável na integral definida	53
2.3	Integração por partes	54
2.4	Áreas	55
2.5	Função dada por uma integral	56
2.6	Volume	57
2.7	Área de superfície de revolução	61
2.8	Comprimento de gráfico de função	63
2.9	Área e comprimento de curva em coordenadas polares	64
2.10	Centro de massa	65
3	Integrais impróprias	67
3.1	Introdução	67
3.2	Transformada de Laplace	72
4	Sequências e Séries	81
4.1	Sequências	81
4.2	Séries Numéricas	87
4.3	Séries de Potências	106
4.4	Equações diferenciais e séries de potências	114

Prefácio

Este livro teve início como uma lista de exercícios usada na disciplina Cálculo Integral do curso Bacharelado de Ciência e Tecnologia. Eventualmente, foi incluído também o conteúdo das notas de aula do mesmo curso.

Os capítulos 1 e 2 foram elaborados pelo Prof. Arlane Vieira, e os demais pelo Prof. Pedro Lima, embora toda obra possua participação de ambos os autores.

O conteúdo teórico do livro apresenta-se sob forma resumida; o objetivo principal é fornecer as principais técnicas e resultados para solução dos exercícios propostos.

Os autores agradecem a Editora da Universidade Federal do Maranhão pela revisão do trabalho.

Capítulo 1

Primitivas

1.1 Relação entre funções com derivadas iguais

Teorema 1.1: Teorema do Valor Médio (TVM)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1.1.1)$$

Exercício 1.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha ainda que f é derivável em (a, b) e que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$.*

Exercício 1.2. *Sejam f e g duas funções reais contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = g(x) + c, \quad (1.1.2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Exercício 1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x real. Mostre que existe uma constante k tal que $f(x) = ke^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exercício 1.4. *Determine a função cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ e tal que a reta tangente no ponto de abscissa x intercepte o eixo Ox no ponto de abscissa $x + 1$.*

Exercício 1.5. Encontre uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo aberto $I \ni 1/2$, tal que $f(1/2) = -1$ e, para todo $x \in I$,

$$\frac{dy}{dx} = 3y^3.$$

Exercício 1.6. Determine uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo aberto, satisfazendo as condições dadas:

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^3}, y(0) = 1 \qquad 2. \frac{dy}{dx} = y \sin x, y(0) = 1$$

Exercício 1.7. Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes derivável e que $f''(x) - f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Prove que $g(x) := e^x[f'(x) - f(x)]$, para $x \in \mathbb{R}$, é constante.

2. Prove que existe uma constante A real tal que,

$$\left[\frac{f(x) - Ae^{-x}}{e^x} \right]' = 0$$

para todo x .

3. Conclua de (b) que existe uma constante B tal que

$$f(x) = Ae^{-x} + Be^x$$

para todo x real.

Exercício 1.8. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis onde $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Suponha que

$$f'(x) = g(x) \qquad e \qquad g'(x) = -f(x)$$

para todo x real.

1. Prove que, para todo x ,

$$[f(x) - \sin x]^2 + [g(x) - \cos x]^2 = 0.$$

2. Conclua que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, para todo x real.

Exercício 1.9. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e tais que

$$f'(x) = 2g(x) \qquad e \qquad g'(x) = -f(x)$$

para todo x real. Suponha, ainda, que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Prove que o ponto $(f(x), g(x))$ pertence à elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, para todo x real.

Respostas-Seção 1.1:

Questão 1.4: $y = x^2 + x + 1$

Questão 1.6: a) $y = \sqrt[4]{2x^2 + 1}$, b) $y = e^{-\cos x}$

1.2 Primitivas imediatas

Definição 2.0: Primitivas

Sejam f uma função real e $I \subseteq \text{Dom}(f)$ um intervalo^a. Dizemos que uma função F , derivável no intervalo I , é uma **primitiva** de f em I se

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

^a $\text{Dom}(f)$ é o *domínio* da função f .

1. Suponha que $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma primitiva F no intervalo $I \subseteq \text{Dom}(f)$. Mostre que o conjunto de todas as primitivas de f em I é a coleção

$$G(x) = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é constante.} \quad (1.2.1)$$

Notação 1.10. Representaremos a família das primitivas de f em (1.2.1) por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Dizemos que $\int f(x)dx$ é a **integral indefinida** de f (no intervalo I).

2. Calcule:

(a) $\int dx$

(d) $\int x^\alpha dx, \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\int x^3 dx$

(e) $\int \sqrt[3]{x^5} dx$

(c) $\int \frac{1}{x} dx, x > 0$

(f) $\int \frac{1}{x^5} dx$

3. (**Propriedades básicas**) Seja α um número real e suponha que f e g são funções reais com primitivas em um intervalo I . Mostre que:

$$(a) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(b) \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

4. Calcule:

$$(a) \int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx$$

$$(d) \int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x})dx$$

$$(b) \int \left(x - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$(e) \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx$$

$$(c) \int e^{\alpha x} dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f) \int (2e^x - 3 \tan^2 x) dx$$

5. Determine $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{dy}{dx} = x^4$.

6. Determine a única solução, definida em $\mathbb{R}$, de $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^4 \\ y(0) = -2. \end{cases}$

7. Determine $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{d^2y}{dx^2} = x + 1$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Respostas-Seção 1.2:

Questão 5: $y(x) = \frac{x^5}{5} + C$

Questão 6: $y(x) = \frac{x^5}{5} - 2$

Questão 7: $y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1$

1.3 Integração por substituição

Teorema 3.1: Fórmula da Substituição

Sejam $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que g é derivável e $\text{Im}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$. Se f admite uma primitiva em um intervalo $I \subseteq \text{Im}(g)$, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad (1.3.1)$$

Demonstração. Seja F uma primitiva de f em I e considere a função H definida por $H(x) := F(g(x))$, para todo $x \in I$. Como

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

em I , segue-se que H é uma primitiva de $x \mapsto f(g(x))g'(x)$ em I . Portanto,

$$\int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C = H(x) + C = \int f(g(x))g'(x)dx.$$

□

Abaixo apresentamos algumas substituições para [integrais trigonométricas](#).

Sejam $m, n \geq 0$ inteiros. Escrevemos

$$\int \sin^{2m+1}(x) \cos^n(x)dx = \int [1 - \cos^2(x)]^m \cos^n(x) \sin(x)dx$$

e usamos a substituição $u = \cos x$.

Exercício 1.11. Calcule a integral $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.

Sejam $m, n \geq 0$ inteiros. Usamos as identidades

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para escrever

$$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x)dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^n dx$$

Exercício 1.12. Calcule a integral $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Sejam $m \geq 0$ e $n \geq 2$ inteiros. Escrevemos

$$\int \tan^m(x) \sec^{2n}(x)dx = \int \tan^m(x)[1 + \tan^2(x)]^{n-1} \sec^2(x)dx$$

e usamos a substituição $u = \tan x$.

Exercício 1.13. Calcule a integral $\int \tan(x) \sec^4(x)dx$.

Sejam $m \geq 0$ e $n \geq 1$ inteiros. Escrevemos

$$\int \tan^{2m+1}(x) \sec^n(x) dx = \int [\sec^2(x) - 1]^m \sec^{n-1}(x) \sec(x) \tan(x) dx$$

e usamos a substituição $u = \sec x$.

Exercício 1.14. Calcule a integral $\int \tan^3(x) \sec^2(x) dx$.

Exercício 1.15 (fórmula de recorrência). Prove que, para cada $n \geq 2$,

$$\int \sec^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \tan(x) \sec^{n-2}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx.$$

Sejam $m, n \geq 0$ inteiros. Escrevemos

$$\int \tan^{2m}(x) \sec^{2n+1}(x) dx = \int [\sec^2(x) - 1]^m \sec^{2n+1}(x) dx$$

e usamos a fórmula de recorrência.

Exercício 1.16. Calcule a integral $\int \tan^4(x) \sec^3(x) dx$.

1. Determine as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \tan x dx$

(i) $\int \sin x \cos^3 x dx$

(b) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

(j) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

(c) $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(k) $\int \frac{2}{3+4x^2} dx$

(d) $\int (2x-3)^{2017} dx$

(l) $\int \sec x dx$

(e) $\int \frac{1-x}{1+x^2} dx$

(m) $\int \cos x \sqrt{\sin x} dx$

(f) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$

(n) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

(g) $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

(o) $\int \sqrt{1-\cos x} dx$

(h) $\int \frac{2x^2}{1+x^6} dx$

1.4 Integração funções racionais: caso 1

Seja $P(x)$ um polinômio real não nulo. O objetivo desta seção é discutir a solução de integrais da forma

$$\mathbf{I} := \int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Seja $\Delta := b^2 - 4ac$, o discriminante de $ax^2 + bx + c$. Observe que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

1.4.1 Numerador constante

Suponha que $P(x) \equiv 1$. Neste caso,

$$\mathbf{I} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 - \frac{\Delta}{4a^2}},$$

onde $u = x + \frac{b}{2a}$. Dependendo do discriminante, temos três casos a considerar:

Caso 1: Se $\Delta = 0$ então

$$\mathbf{I} = \frac{-1}{au} + C = \frac{-2}{2ax + b} + C,$$

onde C é constante.

Caso 2: Se $\Delta > 0$ podemos escrever $\alpha := \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, e com isso temos

$$\mathbf{I} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha a} \ln \left| \frac{u - \alpha}{u + \alpha} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2ax + b + \sqrt{\Delta}} \right| + C,$$

onde C é constante.

Caso 3: Se $\Delta < 0$ podemos escrever $\alpha := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, e com isso temos

$$\mathbf{I} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha a} \arctan \left(\frac{u}{\alpha} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + C,$$

onde C é constante.

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} & \text{(f)} \int \frac{dx}{9x^2 + 4} & \text{(k)} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \\
 \text{(b)} \int \frac{dx}{3x^2 - x - 1} & \text{(g)} \int \frac{dx}{a^2x^2 - c^2} & \text{(l)} \int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1} \\
 \text{(c)} \int \frac{dx}{9 - 12x + 4x^2} & \text{(h)} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} & \text{(m)} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} \\
 \text{(d)} \int \frac{dx}{4 + x^2} & \text{(i)} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4} & \\
 \text{(e)} \int \frac{dx}{4 - 9x^2} & \text{(j)} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1} &
 \end{array}$$

1.4.2 Numerador de primeiro grau

Suporemos $P(x) = Ax + B$, onde $A, B \in \mathbb{R}$ com $A \neq 0$. Para calcular a integral I , observamos que

$$I = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

A primeira integral pode ser calculada usando a substituição $u = ax^2 + bx + c$ enquanto a segunda pode ser calculada usando o método da seção anterior.

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx & \text{(c)} \int \frac{3x - 2}{5x^2 - 3x + 2} dx & \text{(e)} \int \frac{7x + 1}{6x^2 + x - 1} dx \\
 \text{(b)} \int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 11} dx & \text{(d)} \int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx & \text{(f)} \int \frac{2x - 1}{5x^2 - x + 2} dx
 \end{array}$$

1.4.3 Numerador de grau maior que um

Se $P(x)$ é um polinômio de grau > 1 , então existe um único polinômio $Q(x)$ e constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)Q(x) + (Ax + B)$$

Portanto,

$$I = \int Q(x) dx + \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$(a) \int \frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} dx \quad (b) \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^2 - 2x + 5} dx \quad (c) \int \frac{x^3 - 6}{x^2 + 6x + 8} dx$$

1.5 Integração funções racionais: caso 2

Sejam $P(x)$ um polinômio real não-nulo e $Q(x)$ um polinômio cúbico. O objetivo desta seção é discutir a solução de integrais da forma

$$\mathbf{I} := \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Pode-se verificar que $Q(x)$ possui, ao menos, uma raiz real. Dessa forma, a natureza das raízes desse polinômio determinará a técnica a ser usada para calcular a integral $\mathbf{I}$.

1.5.1 $Q(x)$ admite uma única raiz real

Neste caso, em particular, podemos escrever

$$Q(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c),$$

onde x_0, a, b, c são números reais, com $a \neq 0$ e $\Delta := b^2 - 4ac < 0$.

Teorema 5.1: Decomposição em frações parciais

Dados os números reais m, n, p , existem A, B e D constantes tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x - x_0)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c} \quad (1.5.1)$$

Exercício 1.17. Calcule as seguintes integrais:

1. $\int \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - 8} dx$
2. $\int \frac{4x^2 + 17x + 13}{(x + 1)(x^2 + 6x + 10)} dx$
3. $\int \frac{4x + 1}{x^2 + 6x + 12} dx$
4. $\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$
5. $\int \frac{x + 2}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx$
6. $\int \frac{2x^2 + 4}{(x - 1)^3} dx$

Exercício 1.18. Calcule:

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 6x + 1}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$$

$$3. \int \frac{x^4 - 1}{6x^3 + x^2 - 1} dx$$

$$2. \int \frac{x^4 + 2x^2 - 8x + 4}{x^3 - 8} dx$$

$$4. \int \frac{x^5 - x}{3x^3 + 5x^2 + 5x + 2} dx$$

1.5.2 $Q(x)$ admite apenas duas raízes reais distintas

Neste caso, uma das raízes deve ter multiplicidade 2, e em particular, podemos escrever

$$Q(x) = c(x - a)^2(x - b),$$

onde a, b, c são números reais, com $c \neq 0$.

Teorema 5.2: Decomposição em frações parciais

Dados os números reais m, n, p , existem A, B e C constantes tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x - a)^2(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{(x - b)^2} \quad (1.5.2)$$

1. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \frac{2x - 1}{2x^3 - 2x^2} dx$$

$$(d) \int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

$$(b) \int \frac{x^2}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)} dx$$

$$(e) \int \frac{2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

$$(c) \int \frac{x^2 + x - 1}{4 + 8x + 5x^2 + x^3} dx$$

$$(f) \int \frac{x^2 + 1}{12x^3 - 4x^2 - 5x + 2} dx$$

2. Calcule:

$$(a) \int \frac{x^4 - 6x + 1}{3x^3 + 6x^2 + 3x} dx$$

$$(b) \int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{2x^3 + 6x^2 - 8} dx$$

1.5.3 $Q(x)$ admite três raízes reais distintas

Neste caso, podemos escrever

$$Q(x) = d(x - a)(x - b)(x - c),$$

onde a, b, c, d são números reais, com $d \neq 0$.

Teorema 5.3: Decomposição em frações parciais

Dados os números reais m, n, p , existem A, B e C constantes tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \quad (1.5.3)$$

1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int \frac{x-1}{2x^3-x} dx$

(c) $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2-x+2} dx$

(b) $\int \frac{x^2+1}{x(x-2)(x+3)} dx$

(d) $\int \frac{4}{6x^3+x^2-5x-2} dx$

2. Calcule:

(a) $\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x} dx$

(c) $\int \frac{x^5+1}{x^3-4x} dx$

(b) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x} dx$

(d) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x} dx$

1.6 Integração por partes

Teorema 6.1

Sejam f e g duas funções reais deriváveis em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se $f \cdot g'$ e $f' \cdot g$ admitem primitivas em I então

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int x \sin x dx$

(f) $\int \sec^3 x dx$

(b) $\int \ln x dx$

(g) $\int t \ln t dt$

(c) $\int \arctan x dx$

(h) $\int \arccos x dx$

(d) $\int e^x \cos x dx$

(i) $\int (x^2-5) \cos 2x dx$

(e) $\int \sin^2 x dx$

(j) $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$

2. Seja $n \geq 2$ um número natural. Mostre que

$$(a) \int \sec^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}(x) \tan(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx$$

$$(b) \int \tan^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x) dx$$

$$(c) \int \cotan^n(x) dx = -\frac{1}{n-1} \cotan^{n-1}(x) - \int \cotan^{n-2}(x) dx$$

3. Verifique que, para todo inteiro positivo n , tem-se:

$$(a) \int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx.$$

$$(b) \int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx.$$

4. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \sin^5 x dx \quad (b) \int \cos^4 x dx \quad (c) \int \sec^5 x dx \quad (d) \int \tan^6 x dx$$

5. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \sin 7x \cos 2x dx \quad (c) \int \sin 3x \sin 5x dx \quad (e) \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$(b) \int \cos 2x \cos x dx \quad (d) \int \cos 2x \sin x dx \quad (f) \int \cos x \sin 2x \cos 3x dx$$

6. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \cos^2 3x dx \quad (c) \int \sin^2 3x \cos^2 2x dx \quad (e) \int \sin^2 2x \cos^2 3x dx$$

$$(b) \int \cos^3 x \sin^2 x dx \quad (d) \int \cos 2x \cos^4 x dx \quad (f) \int \cos 2x \sin^2 2x dx$$

7. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \sec^5 x \tan^3 x dx \quad (c) \int \tan^3 3x \sec 3x dx \quad (e) \int \sec^2 x \tan^3 x dx$$

$$(b) \int \sec x \tan^2 x dx \quad (d) \int \frac{\tan^5 x}{\sec^4 x} dx \quad (f) \int \frac{\sec^3 x}{\tan x} dx$$

1.7 Integração funções racionais: caso 3

Seja $Q(x) = (x^2 + px + q)^n$, onde $n \geq 2$ é inteiro e $p^2 - 4q < 0$. O objetivo desta seção é discutir a solução de integrais da forma

$$\mathbf{I} := \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

onde $P(x)$ um polinômio real não nulo. Uma técnica importante neste caso é a decomposição do integrando em frações parciais.

Teorema 7.1: Decomposição em frações parciais

Dado um inteiro $n \geq 1$, seja $P(x)$ um polinômio de grau *menor do que* $2n$. Então, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, existem A_j e B_j reais, tais que

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + px + q)^n} \quad (1.7.1)$$

O caso geral, em que $\text{grau}[P(x)] \geq 2n$, pode ser reduzido ao do Teorema acima através de divisão polinomial, observando-se que

$$P(x) = (x^2 + px + q)^n Q(x) + R(x),$$

onde $Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios, com $\text{grau}[R(x)] < 2n$. E portanto,

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n} = Q(x) + \frac{R(x)}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Exercício Resolvido 1.19. Calcule a integral $\int \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$.

Solução. Primeiro observamos que, após a divisão polinomial,

$$x^5 - x^2 + 1 = (x + 4)(x^2 - 2x + 2)^2 + (8x^3 - 25x^2 + 28x - 15),$$

e portanto,

$$\frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} = (x + 4) + \frac{8x^3 - 25x^2 + 28x - 15}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Em relação à última fração, na identidade acima, decompomos em frações parciais:

$$\frac{8x^3 - 25x^2 + 28x - 15}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{8x - 9}{x^2 - 2x + 2} - 3 \cdot \frac{2x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

Logo,

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{8x - 9}{x^2 - 2x + 2} dx - 3 \int \frac{2x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

Falta calcular as integrais do lado direito (à cima). Primeiro,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \arctan(x-1) + C$$

Depois, fazendo $x-1 = \tan \theta$ e $dx = \sec^2(\theta)d\theta$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} &= \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\ &= \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} + C \end{aligned}$$

Com isso,

$$\int \frac{8x-9}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{4(2x-2)-1}{x^2-2x+2} = 4 \ln(x^2-2x+2) - \arctan(x-1) + C$$

E analogamente,

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2} dx = \int \frac{(2x-2)+1}{(x^2-2x+2)^2} = -\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \arctan(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+2} + C,$$

isto é,

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \arctan(x-1) + C.$$

Portanto,

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{5}{2} \arctan(x-1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{x-3}{x^2 - 2x + 2} + C$$

□

Descreveremos a seguir uma forma alternativa para calcular esse tipo de integral por meio de fórmula de redução (recorrência). Para simplificar a notação, escreveremos

$$I_n(x) := \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

Dessa forma,

$$I_n(x) = \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx$$

Por outro lado,

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2} \int \left[x \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} \right] dx = -\frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} - I_{n-1} \right]$$

e portanto,

$$I_n(x) = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2n-2} \right) I_{n-1}(x) \quad (1.7.2)$$

Corolário 1.20. *Sejam $n \geq 1$ inteiro e $a > 0$ um número real. Então*

$$I_n(a, x) := \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot I_n\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1.7.3)$$

Demonstração. Com a substituição $x = au$ obtemos $dx = adu$ e

$$I_n(a, x) = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \frac{du}{(u^2 + 1)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} I_n(u) = \frac{1}{a^{2n-1}} I_n\left(\frac{x}{a}\right)$$

□

Exercício Resolvido 1.21. *Calcule a integral $\int \frac{x^3 - x^2 + x}{(3x^2 + 1)^4} dx$*

Solução. Dividindo-se o polinômio $x^3 - x^2 + x$ por $3x^2 + 1$ obtemos

$$x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}(x-1)(3x^2 + 1) + \frac{1}{3}(x+1),$$

e portanto,

$$\frac{x^3 - x^2 + x}{(3x^2 + 1)^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{(3x^2 + 1)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{(3x^2 + 1)^4},$$

de onde segue-se que

$$\mathbf{I} := \int \frac{x^3 - x^2 + x}{(3x^2 + 1)^4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{(3x^2 + 1)^3} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{(3x^2 + 1)^4} dx$$

e portanto,

$$\mathbf{I} = \frac{1}{3} \int \frac{x}{(3x^2 + 1)^3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{x}{(3x^2 + 1)^4} dx + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^4}$$

Etapa 1: Temos:

$$\int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^3} dx = \int \frac{1}{27(x^2 + 1/3)^3} dx = \frac{1}{27} I_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, x\right)$$

Por (1.7.3),

$$I_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, x\right) = 9\sqrt{3}I_3(x\sqrt{3})$$

e por (1.7.2),

$$I_3(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{(y^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{3}{8} \arctan(y),$$

onde $y = x\sqrt{3}$. Logo,

$$I_3(x\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{x}{3x^2 + 1} + \frac{3}{8} \arctan(x\sqrt{3})$$

e

$$I_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, x\right) = \frac{27}{4} \cdot \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} + \frac{81}{8} \cdot \frac{x}{3x^2 + 1} + \frac{27\sqrt{3}}{8} \arctan(x\sqrt{3})$$

Com isso,

$$\int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{3x^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan(x\sqrt{3})$$

Etapla 2: Analogamente,

$$\int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^4} = \int \frac{dx}{81(x^2 + 1/3)^4} = \frac{1}{81} I_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, x\right)$$

Para $y = x\sqrt{3}$, temos

$$I_4(x\sqrt{3}) = I_4(y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{y}{(1 + y^2)^3} + \frac{5}{6} \cdot I_3(y)$$

Como $\frac{y}{(1 + y^2)^3} = 9\sqrt{3} \frac{x}{(x^2 + 3)^3}$ e $I_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, x\right) = 27\sqrt{3}I_4(x\sqrt{3})$, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^4} &= \frac{\sqrt{3}}{3} I_4(x\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{y}{(1 + y^2)^3} + \frac{5}{6} \cdot I_3(y) \right] \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 3)^3} + \frac{5\sqrt{3}}{18} \cdot I_3(x\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{(3x^2 + 1)^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 3)^3} + \frac{5}{24} \cdot \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x}{3x^2 + 1} + \frac{5\sqrt{3}}{48} \arctan(x\sqrt{3}) + C$$

Etapas 3: Veja que

$$\int \frac{x}{(3x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{(3x^2 + 1)^3} dx = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 1)^2} + C$$

Etapas 4: Da mesma forma,

$$\int \frac{x}{(3x^2 + 1)^4} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{(3x^2 + 1)^4} dx = -\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{(3x^2 + 1)^3} + C$$

Com os resultados das Etapas 1-3, concluímos que

$$\int \frac{x^3 - x^2 + x}{(3x^2 + 1)^4} dx = \frac{3x/2 - 1/18}{3(3x^2 + 1)^3} - \frac{x/24 + 1/12}{3(3x^2 + 1)^2} - \frac{x/16}{3(3x^2 + 1)} - \frac{\sqrt{3}}{144} \arctan(x\sqrt{3}) + C$$

□

Exercício 1.22. Calcule as seguintes integrais:

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ | 4. $\int \frac{dx}{(3x^2 + 2)^4}$ | 7. $\int \frac{x^2 - 1}{(2x^2 + 3x + 2)^2} dx$ |
| 2. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^5}$ | 5. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2}$ | 8. $\int \frac{3x^3}{(x^2 - x + 1)^3} dx$ |
| 3. $\int \frac{dx}{(x^2 + 3)^3}$ | 6. $\int \frac{3x - 1}{(x^2 - x + 3)^3} dx$ | 9. $\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{(3x^2 - 2x + 1)^4} dx$ |

1.8 Substituições trigonométricas

Uma substituição trigonométrica é aquela em que a nova variável é uma função trigonométrica elementar, por exemplo, $u = \sin x$ ou $u = \tan x$.

Exercício 1.23. Dado um número real a positivo, calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx & 4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} & 7. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} \\
 2. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx & 5. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} & 8. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \\
 3. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx & 6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} & 9. \int \frac{2}{t \sqrt{t^4 + 1}} dt
 \end{array}$$

Exercício 1.24. Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \sqrt{2x - x^2} dx & 3. \int \sqrt{1 - (x - 1)^2} dx & 5. \int \sqrt{x - x^2} dx \\
 2. \int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx & 4. \int \sqrt{-x^2 + 4x - 3} dx & 6. \int \sqrt{1 - 2x - 3x^2} dx
 \end{array}$$

1.9 Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

A principal técnica para calcular integrais da forma

$$I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

onde $P(x)$ é um polinômio e $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $b^2 - 4ac < 0$, é usar *substituições trigonométricas* no caso em que $P(x)$ é um polinômio constante ou de primeiro grau. O caso geral reduz-se ao primeiro realizando-se, inicialmente, uma divisão polinomial. Mais precisamente, se $\text{grau}[P(x)] \geq 2$, então existem dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)Q(x) + R(x),$$

onde $\text{grau}[R(x)] \leq 1$. Isto implica que

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Logo,

$$I = \int Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Exercício Resolvido 1.25. Calcule a integral $\int \frac{x^4 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

Solução. Efetuando-se a divisão de $x^4 + 1$ por $x^2 + x + 1$ obtemos

$$x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x + 1)$$

Portanto,

$$\int \frac{x^4 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int (x^2 - x) \sqrt{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

Para concluir a solução, é suficiente calcular separadamente cada uma das integrais do lado direito da igualdade acima. Dessa forma, fazendo-se

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$$

temos $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2(\theta) d\theta$ e as seguintes relações:

$$\sin \theta = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \sec(\theta) d\theta = \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C = \ln |1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + C$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1) + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \ln |1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + C \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 + x + 1} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta) - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int \tan(\theta) \sec^3(\theta) d\theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sec^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \sec^3(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sec^3(\theta) d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\theta) - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^3(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sec^3(\theta) \, d\theta - \frac{3}{4} \int \sec^3(\theta) \tan(\theta) \, d\theta + \\
 &\quad + \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sec^3(\theta) \tan^2(\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sec^3(\theta) \, d\theta - \frac{1}{4} \sec^3(\theta) + \\
 &\quad + \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sec^5(\theta) \, d\theta - \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sec^3(\theta) \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{4} \sec^3(\theta) - \frac{2\sqrt{3}}{8} \int \sec^3(\theta) \, d\theta + \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sec^5(\theta) \, d\theta
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 - x) \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx &= -\frac{\sec^3(\theta)}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sec^5(\theta) \, d\theta \\
 &= -\frac{\sec^3(\theta)}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{32} \sec^3(\theta) \tan(\theta) + \\
 &\quad + \frac{9\sqrt{3}}{64} \left[\sec(\theta) \tan(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| \right] + C \\
 &= -\frac{3\sqrt{3}}{16} (x^2 + x + 1)^{3/2} + \frac{\sqrt{3}}{12} (2x + 1) (x^2 + x + 1)^{3/2} + \\
 &\quad + \frac{9\sqrt{3}}{64} \left[\frac{2}{3} (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1} + \ln \left| 1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right| \right] + C
 \end{aligned}$$

□ —

Um *método alternativo* para calcular **I** é o seguinte: dado um polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$, se $b^2 - 4ac < 0$, então existem um polinômio $Q(x)$ de grau $n - 1$ e um número real λ tal que

$$\mathbf{I} = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Neste caso, para determinar os coeficientes de $Q(x)$ e o número λ , usa-se a identidade

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \left[Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} \right]' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Exercício Resolvido 1.26. Calcule a integral $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$.

Solução. Como $\text{grau}[x^2 + 1] = 2$, existem um polinômio $Q(x) := Ax + B$ de primeiro grau e uma constante λ tais que

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

Neste caso,

$$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \left[(Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \right]' + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

Como

$$\left[(Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \right]' = A\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{(Ax + B)(x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}},$$

concluimos que

$$x^2 + 1 = A(x^2 - 2x + 2) + (Ax + B)(x - 1) + \lambda,$$

e como consequência, $A = 1/2$ e $B = \lambda = 3/2$. Além disso, como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \ln |\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1| + C$$

obtemos

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = \frac{x + 3}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1| + C$$

□

Exercício 1.27. Calcule as seguintes integrais:

1. $\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

- | | |
|--|---|
| 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$ | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2+a^2}}$ | 17. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ |
| 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ | 18. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ | 19. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$ |
| 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ | 20. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}$ |
| 13. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$ | 21. $\int \frac{3x^3-3x+1}{\sqrt{x^2-x}}dx$ |
| 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$ | 22. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}$ |

1.10 Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

No caso particular em que $P(x) \equiv 1$, usa-se a substituição

$$u = \frac{1}{mx+n}$$

Quanto ao caso geral, se $\text{grau}[P(x)] \geq 1$ então existe um polinômio $Q(x)$ e uma constante R tal que

$$P(x) = (mx+n)Q(x) + R$$

Dessa forma,

$$\int \frac{P(x)}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{Q(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + R \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Exercício 1.28. Calcule as seguintes integrais:

$$1. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$4. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$$

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$3. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$6. \int \frac{x^3-1}{(2x+1)\sqrt{x^2+2x}}$$

1.11 Integração de funções da forma $\frac{P(x)}{(x+\lambda)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Para integrais dessa forma, consideramos dois casos. Se $\text{grau}[P(x)] < n$, então existem $A_1, A_2, \dots, A_n$ constantes tais que

$$\frac{P(x)}{(x+\lambda)^n} = \frac{A_1}{x+\lambda} + \frac{A_2}{(x+\lambda)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x+\lambda)^n},$$

e portanto,

$$\int \frac{P(x)}{(x+\lambda)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \sum_{k=1}^n \int \frac{A_k}{(x+\lambda)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Para as integrais da forma

$$\int \frac{dx}{(x+\lambda)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

usa-se a mudança de variáveis

$$u = \frac{1}{x+\lambda}$$

No caso geral, quando $\text{grau}[P(x)] \geq n$, existem dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, com $\text{grau}[R(x)] < n$, tais que

$$P(x) = (x+\lambda)^n Q(x) + R(x),$$

de onde segue-se que

$$\int \frac{P(x)}{(x+\lambda)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \int \frac{Q(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \int \frac{R(x)}{(x+\lambda)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Exercício 1.29. Calcule as seguintes integrais:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+1}}$ | 4. $\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{1-x^2}}$ | 5. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+x-1}}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-2}}$ | 6. $\int \frac{x^3-1}{(2x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} dx$ |

1.12 Integração funções racionais: caso geral

Seja $Q(x)$ um polinômio mônico, isto é, o coeficiente do *termo líder* (de maior grau) é igual a 1. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra podemos escrever

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \cdots (x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\ell_2} \cdots (x^2+p_nx+q_n)^{\ell_n},$$

onde $m, n \geq 0$ são inteiros, $k_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, m$, $p_j^2 - 4q_j < 0$ e $\ell_j \geq 0$ para cada $j = 1, \dots, n$, e

$$(k_1 + \cdots + k_m) + 2(\ell_1 + \cdots + \ell_n) = \text{grau}(Q(x))$$

Dessa forma, se $P(x)$ é um polinômio de grau menor que $\text{grau}(Q(x))$, podemos escrever

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-a_j)^i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\ell_j} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i}$$

onde A_{ij}, B_{ij} e C_{ij} são *coeficientes indeterminados*. A expressão do lado direito da igualdade acima é chamada *decomposição em frações parciais* da função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exercício 1.30. Em cada item, encontre a decomposição em frações parciais:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $\frac{x^3}{(x-1)^2(x+1)^3}$ | 4. $\frac{2x+3}{x(x^2+1)}$ |
| 2. $\frac{x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}$ | 5. $\frac{x^5-3x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ |
| 3. $\frac{x^4-x}{x(x^2+3x+2)}$ | 6. $\frac{x^3-x+1}{x(x^2+2x+2)}$ |

$$7. \frac{x-2}{(x^2+1)(x^2+x+5/4)}$$

$$10. \frac{1-(x-1)^3}{(x-1)(x^2-x-2)^2}$$

$$8. \frac{x^2+1}{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$11. \frac{2}{(x+1)(x^2-1)(x^2+4)^3}$$

$$9. \frac{x^4}{x(x^2-1)^2}$$

$$12. \frac{x^4-x^3+2}{(x^2+1)^2(x-1)^3(x^2+2x+2)}$$

Exercício 1.31. Calcule a integral indefinida de cada uma das funções racionais do Exercício anterior.

1.13 Integração funções racionais: Método de Ostrogradsky

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma *função racional própria*, ou seja, $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios primos entre si e $\text{grau}[P(x)] < \text{grau}[Q(x)]$. Suponha ainda que $Q(x)$ possua raízes múltiplas. Então existem dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ com coeficientes indeterminados tais que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

onde:

- (a) $Q_1(x)$ é o máximo divisor comum entre $Q(x)$ e $Q'(x)$;
- (b) $Q_2(x)$ é o polinômio $Q(x)/Q_1(x)$;
- (c) $\text{grau}[P_1(x)] < \text{grau}[Q_1(x)]$;
- (d) $\text{grau}[P_2(x)] < \text{grau}[Q_2(x)]$.

Para determinar os coeficientes de $P_1(x)$ e $P_2(x)$, usa-se a identidade

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

Essa identidade pode ser verificada da seguinte forma. Como

$$\int \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \right] dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

segue-se que $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ é uma primitiva de $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, e portanto,

$$\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Exercício 1.32. Use o Método de Ostrogradsky para calcular a integral indefinida de cada uma das funções a seguir.

1. $\frac{2x}{(x^3 - 1)^2}$

7. $\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

2. $\frac{x^2 + 2}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2}$

8. $\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 1)(x + 2)}$

3. $\frac{x^2 + 3x}{(x^4 - 1)^2}$

9. $\frac{x^4}{x(x^2 - 1)^2}$

4. $\frac{3}{(x^2 + 1)^4}$

10. $\frac{1 - (x - 1)^3}{(x - 1)(x^2 - x - 2)^2}$

5. $\frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

11. $\frac{2}{(x + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 4)^3}$

6. $\frac{x^3}{(x - 1)^2(x + 1)^3}$

12. $\frac{x^4 - x^3 + 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)^3(x^2 + 2x + 2)}$

1.14 A substituição $u = \tan(x/2)$

Seja $R = R(x, y)$ uma função racional nas variáveis x e y . Para calcular integrais da forma

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

podemos transformar o integrando em um função racional através da substituição $u = \tan(x/2)$. Neste caso,

$$\sin(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \quad \text{e} \quad \cos(x/2) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Logo,

$$\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

e

$$\cos(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$$

Como $\cos(x)dx = 2 \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} du$, temos que $dx = -\frac{2}{1+u^2} du$, e portanto,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \tilde{R}(u) du,$$

onde $\tilde{R}$ é uma função racional na variável u .

Observação 1.33. No caso particular em que $R(\sin x, \cos x)$ apresenta apenas **potências pares** de $\sin x$ e $\cos x$ é mais indicado usar a substituição $u = \tan(x)$.

Exercício 1.34. Calcule as seguintes integrais:

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$11. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$$

$$2. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$12. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$$

$$3. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$$

$$4. \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}$$

$$5. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$$

$$15. \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^3} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$16. \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$7. \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$$

$$17. \int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$$

$$18. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx$$

$$9. \int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$$

$$19. \int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$$

$$10. \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$$

$$20. \int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$$

1.15 Integrais de funções irracionais

O objetivo é apresentar uma técnica calcular integrais da forma

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots \right] dx,$$

onde R é uma função racionais de várias variáveis. Neste caso usamos a substituição

$$u^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

onde n é o *mínimo múltiplo comum* dos números $q_1, q_2, \dots$.

Exercício Resolvido 1.35. Calcule a integral $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} dx$

Solução. Com a substituição $z^{12} = x$ obtemos $dx = 12z^{11}dz$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} dx = 12 \int \frac{z^{14}}{z-1} dz = 12 \left(\ln|1-z| + \sum_{k=1}^{14} \frac{z^k}{k} \right) + C$$

e portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} dx = 12 \left(\ln \left| 1 - \sqrt[12]{x} \right| + \sum_{k=1}^{14} \frac{x^{k/12}}{k} \right) + C$$

□

Exercício 1.36. Calcule as seguintes integrais

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

6. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

3. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}} dx$

7. $\int \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$

$$9. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$11. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

$$10. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$12. \int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx$$

1.16 Integrais de binômios diferenciais

Um *binômio diferencial* é uma expressão da forma $x^m(a + bx^n)^p$ onde m , n e p são números racionais. Nem sempre é possível escrever o integrando em termos de funções elementares. Em alguns casos, que correspondem às *condições de Tchebichev*, é possível transformar o binômio diferencial em uma função racional:

1. Se p é inteiro, desenvolve-se as potências do integrando;
2. Se $\frac{m+1}{n}$ é inteiro, usa-se a substituição $a + bx^n = z^s$, onde s é o denominador de p ;
3. Se $p + \frac{m+1}{n}$ é inteiro, usa-se a substituição $ax^{-n} + b = z^s$, onde s é o denominador de p .

Exercício Resolvido 1.37. Calcule a integral $\int \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Solução. Como

$$\frac{\sqrt{3 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-1/3}(3 + x^{2/3})^{1/2},$$

temos $m = -1/3$, $n = 2/3$, e portanto, $\frac{m+1}{n} = 1$ (inteiro). A substituição

$$3 + x^{2/3} = z^2$$

resulta em $x^2 = (z^2 - 3)^3$ e $dx = 3z(z^2 - 3)^{1/2} dz$. Dessa forma

$$\int \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int 3z^2 dz = z^3 + C = (2 + x^{2/3})^{3/2} + C$$

□

Exercício 1.38. Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll}
 1. \int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx & 4. \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} & 7. \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} \\
 2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2}}} & 5. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} & 8. \int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}} \\
 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} & 6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} & 9. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

1.17 Integração de funções da forma $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$

Nesta seção apresentaremos o método de Euler, para calcular integrais da forma

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

onde R é uma função racional de duas variáveis. O objetivo é transformar o integrando em uma função racional.

1.17.1 Primeira substituição de Euler

Se $a > 0$ então definimos a nova variável t fazendo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t \quad (1.17.1)$$

Inicialmente, o sinal de $\sqrt{a}$ na relação acima pode ser negativo. De (1.17.1) obtemos

$$bx + c = 2\sqrt{a} \cdot xt + t^2,$$

e portanto,

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a} \cdot t}$$

Em particular,

$$dx = \frac{2bt - 2\sqrt{a}(c + t^2)}{(b - 2\sqrt{a} \cdot t)^2} dt$$

Exercício Resolvido 1.39. Para $c > 1/4$, calcule a integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + c}}$

Solução. Neste exemplo, $a = b = 1$ e com isso, usando a primeira substituição de Euler,

$$\sqrt{x^2 + x + c} = x + t \quad \text{e} \quad x = \frac{t^2 - c}{1 - 2t}$$

Como

$$dx = -2 \cdot \frac{t^2 - t + c}{(1 - 2t)^2} dt \quad \text{e} \quad x + t = -\frac{1 - 2t}{t^2 - t + c},$$

temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + c}} = 2 \int \frac{dt}{1 - 2t} = -\ln|1 - 2t| + C = \ln \left| 1 + 2x - 2\sqrt{x^2 + x + c} \right| + C$$

□

Exercício 1.40. Dado um número real c , calcule a integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$.

1.17.2 Segunda substituição de Euler

Se $c > 0$, escrevemos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

Em geral, usaremos o sinal positivo em $\sqrt{c}$. Dessa forma, $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c} \cdot t$, e portanto,

$$x = \frac{t^2 - a}{b - \sqrt{c} \cdot t}$$

Em particular,

$$dx = -\frac{a\sqrt{c} - 2bt + \sqrt{c} \cdot t^2}{(b - \sqrt{c} \cdot t)^2}$$

Exercício Resolvido 1.41. Calcule a integral $\int \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{x^3 \sqrt{x^2 + 2}} dx$.

Solução. Fazendo $\sqrt{x^2 + 2} = xt - \sqrt{2}$ temos

$$x = \frac{1 - t^2}{t\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad dx = -\left(\frac{1 + t^2}{t^2\sqrt{2}}\right) dt.$$

Além disso,

$$\sqrt{x^2 + 2} = -\frac{1 + t^2}{\sqrt{2}},$$

e portanto,

$$\int \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{x^3 \sqrt{x^2 + 2}} dx = 2 \int \frac{1 - t - t^2 - t^3}{(1 - t^2)^3} dt. \quad (1.17.2)$$

Agora que

$$\int \frac{1 - t - t^2 - t^3}{(1 - t^2)^3} dt = -\frac{t(t^2 + t - 1)}{2(t^2 - 1)^2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right|. \quad (1.17.3)$$

O resultado é então obtido por 1.17.2 e 1.17.3 usando-se que $t = \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{2}}{x}$. □

1.17.3 Terceira substituição de Euler

Seja α e β as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$. Escrevemos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

Exercício Resolvido 1.42. *Calcule a integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$*

Exercício 1.43. *Calcule as seguintes integrais:*

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}}$

6. $\int \sqrt{2x - x^2} dx$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$

8. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 + x + x^2}}$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$

9. $\int \frac{x + 1}{(2x + x^2)\sqrt{2x + x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$

10. $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{1 + x + x^2}} dx$

Capítulo 2

Integral de Riemann

2.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Dados um número inteiro n positivo e um intervalo $[a, b]$, uma *partição regular de ordem n* de $[a, b]$ é uma coleção de pontos

$$P_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

uniformemente distribuídos neste intervalo, de modo que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Usualmente escrevemos

$$P_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

para representar a partição P_n . Essa partição divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $I_1 := [x_0, x_1], \dots, I_n := [x_{n-1}, x_n]$, todos de mesmo comprimento, que denotaremos por Δx . Neste caso, temos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Exercício 2.1. *Seja F uma primitiva de f em $[a, b]$. Dada uma partição regular de ordem n ,*

$$P_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

mostre que existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tais que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x.$$

Suponha agora que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer. Dada uma partição regular P_n de $[a, b]$ e uma coleção de *pontos amostrais* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $1 \leq i \leq n$, formamos a soma

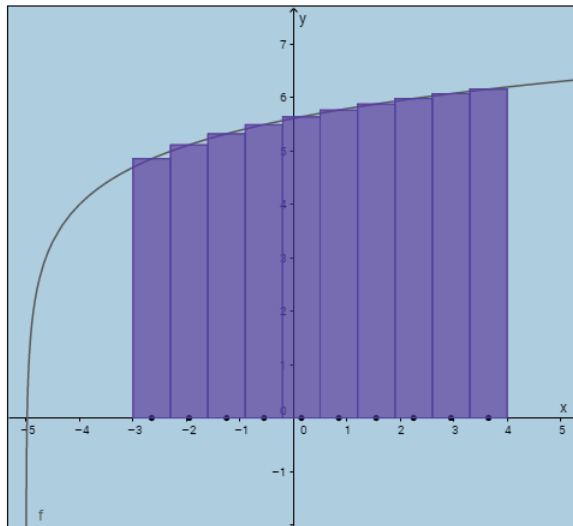
$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (2.1.1)$$

A soma (2.1.1) é chamada *soma de Riemann* relativa à partição P_n e à escolha dos pontos amostrais $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Se existir um número real L tal que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

e este limite independe da escolha dos pontos amostrais, dizemos que f é *integrável sobre* $[a, b]$.



Soma de Riemann particular: $n = 10$, $a = -3$, $b = 4$ e c_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \dots, 10$

O limite L , quando existe, chama-se *integral de Riemann* de f em $[a, b]$ e denota-se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x. \quad (2.1.2)$$

Diz-se também que f é (*Riemann*) *integrável* no intervalo $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x) dx$ é a *integral definida* de f em $[a, b]$. Definimos as seguintes situações particulares:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 1.1: Continuidade implica integrabilidade

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável no intervalo $[a, b]$.

Demonstração. Suponha que f é contínua e seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Dado $n \geq 1$, considere a partição regular

$$P_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

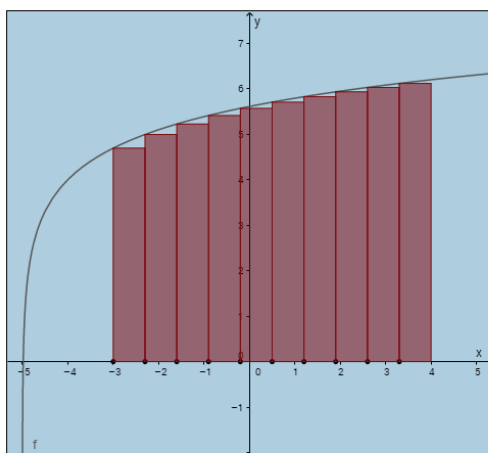
e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Como f é contínua em cada subintervalo definido pela partição, existem $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$f(\alpha_i) \leq f(x) \leq f(\beta_i)$$

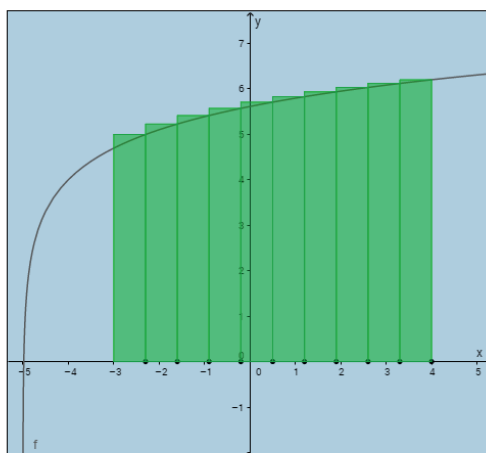
para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ e cada $i = 1, 2, \dots, n$. Defina

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta x \quad \text{e} \quad S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\beta_i) \Delta x,$$

as somas inferior e superior de f relativamente à partição P_n , respectivamente.



Soma inferior de uma função f : $n = 10$, $a = -3$, $b = 4$



Soma superior de uma função f : $n = 10$, $a = -3$, $b = 4$

Por outro lado, como f é equicontínua no intervalo $[a, b]$, existe $\delta := \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon/(b - a),$$

com $x, y \in [a, b]$.

Seja $n_0 \geq 1$ um inteiro tal que $n_0 > b-a/\delta$. Então, dado $n \geq n_0$ temos que $|\beta_i - \alpha_i| < \delta$ e portanto,

$$f(\beta_i) - f(\alpha_i) = |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon/(b-a)$$

Logo,

$$S_n(f) - s_n(f) = \sum_{i=1}^n [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] \Delta x < n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x = \epsilon$$

□

Exercício 2.2. *Verifique que*

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Exercício Resolvido 2.3. *Encontre a integral $\int_0^1 x^2 dx$.*

Solução. Considere a partição

$$P_n : 0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_i = \frac{i}{n} < \dots < x_n = 1$$

do intervalo $[0, 1]$. Escolhemos $c_i = \frac{i}{n}$. Temos

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

De acordo com o Teorema 1.1, a função x^2 é integrável no intervalo $[0, 1]$. Então, a escolha dos elementos amostrais escolhidos acima é suficiente para concluir que

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

□

Proposição 2.4. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(b) λf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

(c) se $f(x) \geq 0$, para $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(d) se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exercício 2.5. Sejam $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ três funções integráveis em $[a, b]$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para cada $x \in [a, b]$. Prove que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx.$$

Exercício 2.6. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que m e M são, respectivamente, o valor mínimo e o valor máximo de f em $[a, b]$. Prove que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Teorema 1.2: Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in (a, b)$ tal que^a

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2.1.3)$$

^aO número $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ é chamado *valor médio* de f no intervalo $[a, b]$.

Demonstração. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass f admite valores máximo e mínimo no intervalo $[a, b]$, ou seja, existem α e β neste intervalo tais que

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto,

$$f(\alpha)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(\beta)(b-a),$$

isto é,

$$f(\alpha) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(\beta).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 1.3: Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (2.1.4)$$

é uma primitiva de f em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Além disso,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.1.5)$$

Demonstração. Sejam x um ponto arbitrário no intervalo $[a, b]$ e h um número real não nulo tal que $x + h \in [a, b]$. Vamos verificar inicialmente que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Para tanto, consideraremos dois casos: se $h > 0$ então $a \leq x < x+h$ e portanto,

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

de onde se segue a identidade acima. Já no caso $h < 0$, temos $a \leq x+h < x$ e portanto,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_{x+h}^x f(t)dt = F(x+h) + \int_{x+h}^x f(t)dt.$$

Como $\int_{x+h}^x f(t)dt = -\int_x^{x+h} f(t)dt$, provamos que também vale a identidade neste caso.

Por outro lado, como f é contínua $[x, x+h]$ segue-se do Teorema do Valor Médio para Integrais que existe $c := c(h)$ neste intervalo tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h$$

Logo

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

Como f é contínua e $\lim_{h \rightarrow 0} c(h) = x$, pelo Teorema do Confronto, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Isto prova que F é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Para concluir a prova, note que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt,$$

uma vez que $\int_a^a f(t)dt = 0$. □

Corolário 2.7. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f admite primitiva no intervalo $[a, b]$.*

Exercício 2.8. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e G uma primitiva qualquer de f no intervalo $[a, b]$. Mostre que*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

e que, para todo $x \in [a, b]$,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a).$$

Exercício 2.9. *Calcule as seguintes integrais definidas:*

$$(a) \int_0^{\pi/3} \sin(x) \cos(2x)dx \qquad (b) \int_1^2 (2/x + 3/x^2)dx$$

(c) $\int_0^{\pi/4} \sec^3(x) dx$

(d) $\int_0^1 3^x e^x dx$

Exercício 2.10. Num circuito elétrico, a voltagem $V(t)$ e a corrente $i(t)$ no instante t são dadas por $V(t) = 160 \sin(t)$ e $i(t) = 2 \sin(t - \frac{\pi}{6})$. A potência média é dada por

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(t)i(t)dt,$$

onde T é o período de ambas, voltagem e corrente. Determine T e calcule a potência média.

Exercício 2.11. Se uma xícara de café tem uma temperatura de 95°C em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20°C de acordo com a Lei Do Resfriamento de Newton, a temperatura do café após t minutos será

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Exercício 2.12. Em uma certa cidade, a temperatura (em $^\circ\text{F}$) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função $T(t) = 50 + 14 \sin(\frac{\pi t}{12})$. Calcule a temperatura média durante o período entre 9h e 21h.

2.2 Mudança de variável na integral definida

Nesta seção, discutiremos uma técnica importante para o cálculo de integrais definidas, a saber, o Teorema de Mudança de Variáveis (TMV).

Teorema 2.1

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que f admite primitiva em $[a, b]$. Se $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 no intervalo $[c, d]$ tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$ então $(f \circ g)g'$ é contínua em $[c, d]$ e

$$\int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx \quad (2.2.1)$$

Demonstração. Seja F uma primitiva de f em $[a, b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a) = F(g(d)) - F(g(c))$$

Considere a função definida por $h(x) := F(g(x))$, para $x \in [c, d]$. Como $h'(x) = f(g(x))g'(x)$ para cada $x \in [c, d]$, segue-se que h é uma primitiva de $(f \circ g)g'$ em $[c, d]$ e portanto,

$$\int_c^d f(g(x))g'(x)dx = h(d) - h(c) = F(g(d)) - F(g(c))$$

Logo,

$$\int_a^b f(u)du = \int_c^d f(g(x))g'(x)dx$$

□

Exercício 2.13. Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll} (a) \int_{1/3}^3 x\sqrt{3x+1}dx & (c) \int_0^1 xe^{-x^2/3}dx & (e) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx \\ (b) \int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx & (d) \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx & (f) \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} \end{array}$$

Exercício 2.14. Dado $r > 0$, seja $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que:

$$(a) \text{ se } f \text{ é par então } \int_{-r}^r f(x)dx = 2 \int_0^r f(x)dx$$

(b) se f é ímpar então $\int_{-r}^r f(x)dx = 0$

Exercício 2.15. Suponha que $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Calcule $\int_{-2}^2 xf(x^2)dx$.

Exercício 2.16. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{x^2 + 1} dx$.

Exercício 2.17. Mostre que $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercício 2.18. Verifique que $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

2.3 Integração por partes

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 . Então

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

- Fazendo-se $u = f(x)$ e $v = g(x)$ tem-se

$$du = f'(x)dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)dx$$

- Portanto:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exercício 2.19. Calcule as integrais:

1. $\int_0^{\pi} x \sin(2x)dx$

3. $\int_0^e \ln(x)dx$

2. $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$

4. $\int_0^{\pi} \sin(2x)e^{3x} dx$

Exercício 2.20. Seja $n \geq 1$ um inteiro e defina $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$. Prove que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$$

2.4 Áreas

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não negativa, seja R a região do plano limitada pelo gráfico de f , o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$. A área de R é definida por

$$\text{área}(R) = \int_a^b f(x) dx$$

Exercício 2.21. Calcule a área da região limitada pela parábola $y = x^2/2$, pelas retas $x = 1$ e $x = 3$ e pelo eixo das abscissas.

Exercício 2.22. Calcule a área da região limitada pela curva $x = 2 - y - y^2$ e pelos eixos coordenados.

No caso geral, em que a região R está limitada pelos gráficos de duas funções contínuas f e g , com $f \leq g$ em $[a, b]$, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, definimos

$$\text{área}(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

Exercício 2.23. Calcule a área S da região limitada pelas curvas $y = 2 - x^2$ e $y^3 = x^2$.

Exercício 2.24. Determine a área da região limitada pela hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 9$, o eixo Ox e o diâmetro que passa pelo ponto $(5, 4)$.

Exercício 2.25. Encontre a área da região limitada pela curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ e pelo eixo Ox .

Exercício 2.26. Encontre a área da figura compreendida entre a hipérbole $xy = m^2$, as retas verticais $x = a$ e $x = 3a$ (com $a > 0$) e o eixo Ox .

Exercício 2.27. Determine a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$.

Exercício 2.28. Encontre a área da região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercício 2.29. Encontre a área da figura limitada pela curva

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

Exercício 2.30. Determine a área delimitada pela astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Exercício 2.31. Calcule a área das duas partes em que a parábola $y^2 = 2x$ divide o círculo $x^2 + y^2 = 8$.

2.5 Função dada por uma integral

Exercício 2.32. Seja $A \subset [a, b]$ um conjunto finito e suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. É possível definir a integral de f em $[a, b]$? Justifique sua resposta

Exercício 2.33. Esboce o gráfico da função F dada por $F(x) = \int_0^x e^{-|t|} dt$.

Exercício 2.34. Seja $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t < 1, \\ 1/t, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$.
Mostre que $F'(x) = f(x)$ para todo x .

Exercício 2.35. Calcule a derivada das seguintes funções:

$$1. F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\ln t}$$

$$3. F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$$

$$2. F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt$$

$$4. F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$$

Exercício 2.36. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $x_0 \in [a, b]$, definimos $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Mostre que F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Exercício 2.37. Calcule $F'(x)$ sabendo-se que $F(x) = \int_x^1 \arctan(t^3) dt$.

Exercício 2.38. Encontre uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que, para todo x , $\varphi(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t) dt$

Exercício 2.39. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período p .

1. Mostre que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \int_x^{x+p} f(t) dt$, é constante .

2. Conclua que $\int_x^{x+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.40. Seja $f(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$. Calcule $\int_0^2 xf(x)dx$.

Exercício 2.41. Encontre uma função f sabendo que $f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$.

Exercício 2.42. Seja uma função f tal que $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$. Encontre $f(4)$.

Exercício 2.43. Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que f' é estritamente crescente. Se $f(0) = 0$, mostre que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ é estritamente crescente para $x > 0$.

2.6 Volume

Sólido de revolução em torno do eixo Ox

1. Seja R a região limitada pelo gráfico de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.
2. Seja S o sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox (figura abaixo).

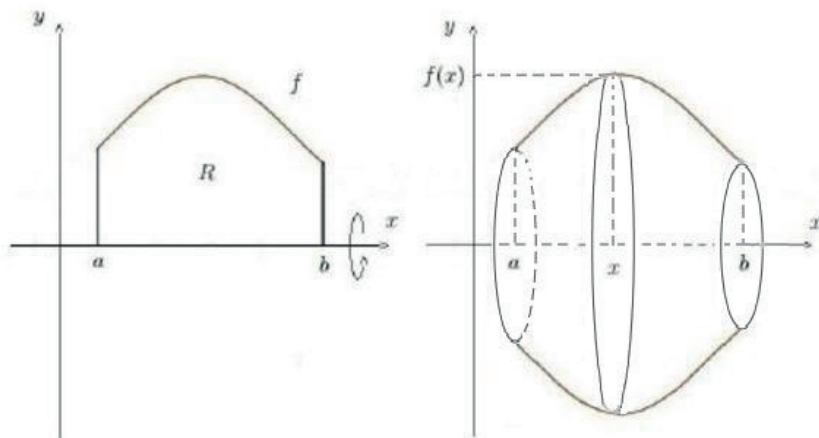


Figura 2.1: Sólido de revolução

Observe que a segunda circunferência na figura acima possui área $\pi[f(x)]^2$.

Definição 2.44. Se f é contínua, o volume de S é dado por

$$V(S) := \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Exercício 2.45. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1/x \text{ e } 1 \leq x \leq e\}$ em torno do eixo Ox .

Exercício 2.46. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo Ox .

Exercício 2.47. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, com $a > 0$ e $f(x) \geq 0$ para todo x e $[a, b]$, e A a região limitada pelo gráfico dessas funções, pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo x . Considere o sólido B obtido pela rotação da região A em torno do eixo y . Defina o volume de B .

Exercício 2.48. Calcule o volume do elipsoide, formado pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em torno do eixo OX .

Exercício 2.49. Demonstrar que o volume da parte do corpo de revolução formado ao girar a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ em torno do eixo OX , que intercepta o plano $x = 2a$, é igual ao volume de uma esfera de raio a .

Exercício 2.50. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y , do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \arctan(x)$.

Exercício 2.51. Calcule o volume do corpo formado pela rotação em torno do eixo x , da astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, com $a > 0$, em torno do eixo y .

Exercício 2.52. Calcule o volume do toro, formado pela rotação do círculo $(x - a)^2 + y^2 \leq r^2$, com $a \geq r > 0$, em torno do eixo y .

Exercício 2.53. Ache o volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo OX pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Exercício 2.54. O plano de um triângulo móvel permanece perpendicular ao diâmetro fixo de um círculo de raio a . A base do triângulo é a corda desse círculo, enquanto que seu vértice resvala por uma reta paralela ao diâmetro fixo, que se encontra a uma distância h do plano do círculo. Determine o volume do corpo formado pelo movimento do triângulo de um extremo do diâmetro ao outro.

Exercício 2.55. Nas questões a seguir, encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

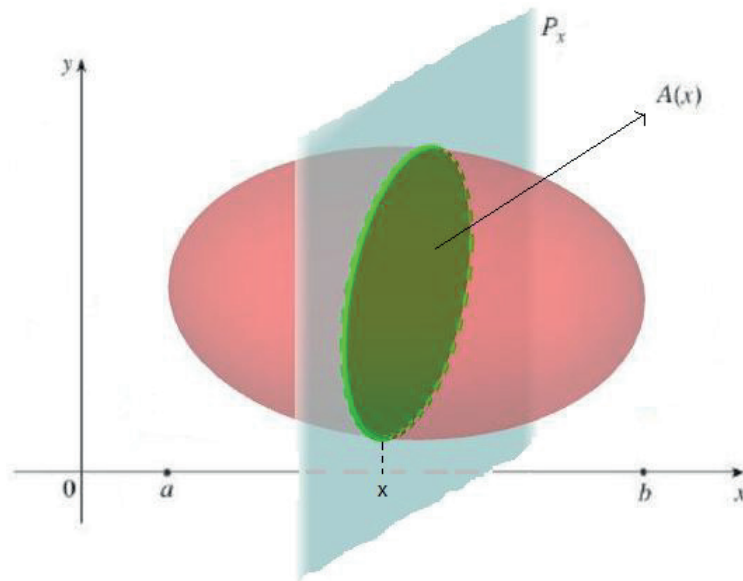
1. $y = e^x, y = 0, x = 1, x = 2$; em torno do eixo Ox ;
2. $\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}$; em torno do eixo Ox ;
3. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = 0$; em torno do eixo Ox ;
4. $y = x, y = \sqrt{x}$; em torno de $y = 1$
5. $y = \sin(x), y = 0, x = 0, x = \pi$; em torno do eixo Ox ;
6. $y = \ln(x), y = 1, y = 2, x = 0$; em torno do eixo Oy ;
7. $y = e^{-x}, y = 1, x = 2$; em torno de $y = 2$;
8. $y^2 = 2x, y = x$; em torno do eixo Ox ;
9. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, a \geq x \geq 0, a \geq y \geq 0$; em torno do eixo Oy ;
10. $y = x, y = 0, x = 2, x = 4$; em torno de $x = -1$;
11. $y = x^2, x = y^2$; em torno de $x = -1$;
12. $y = \tan x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$; em torno do eixo Ox ;
13. $y = \sec x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$; em torno do eixo Ox ;

Volume de um sólido qualquer

1. Sejam S um sólido e P_x o plano perpendicular ao eixo Ox , no ponto x , conforme a figura ao lado.
2. Suponha que S está na região limitada pelos planos P_a e P_b e, que $P_x \cap S \neq \emptyset$ para cada $x \in [a, b]$.
3. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x .

Definição 2.56. Se a função $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, o volume de S é definido por

$$V(S) := \int_a^b A(x) dx$$

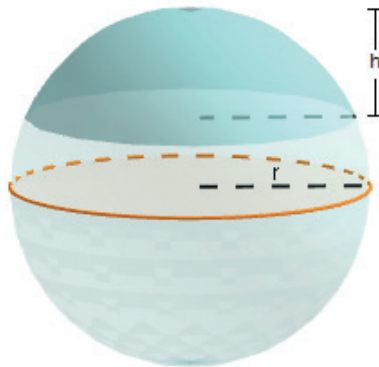


Exercício 2.57. Prove que o volume de um tronco de cone circular reto tal que uma esfera de raio $r > 0$ é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Exercício 2.58. Seja S um tronco de cone circular reto cujos raios das bases são iguais a r e R e altura h . Prove o volume de S é dado por

$$V(S) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$$

1. A base de S é uma região elíptica limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo Ox são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.
2. Calcule o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e altura h .
3. Calcule o volume de uma calota de altura h em uma esfera de raio r .



4. Uma cunha é cortada de um cilindro circular de raio a por dois planos. Um plano é perpendicular ao eixo do cilindro, o outro intercepta o primeiro com um ângulo de 30° ao longo do diâmetro do cilindro. Encontre o volume da cunha.
5. A altura de um monumento é de 20 metros. Uma seção transversal horizontal a uma distância de x metros do topo é um triângulo equilátero com lado $\frac{x}{4}$ metros. Encontre o volume do monumento.
6. O segmento de reta que une a origem ao ponto (a, b) gira em torno do eixo Ox . Achar o volume do cone obtido.
7. Um tanque de óleo na forma de uma esfera tem um diâmetro de 18 metros. Quanto óleo o tanque contém, se a profundidade do óleo é de 7 metros?

2.7 Área de superfície de revolução

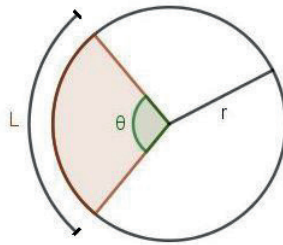
Área de um setor circular

A área A de um setor circular com ângulo central θ e raio r (figura abaixo) é dada por $A = \frac{r^2\theta}{2}$.

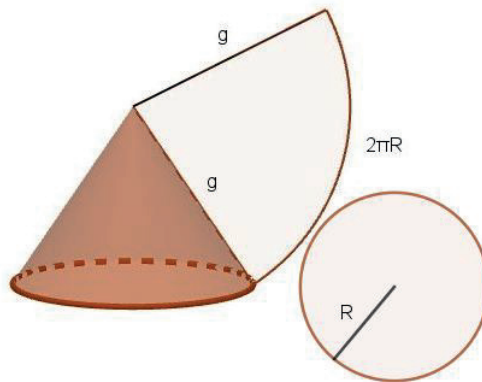
E ainda, temos $L = r\theta$ e portanto,

$$A = \frac{rL}{2}$$

Área da superfície de um cone



A área A da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base é R e cuja geratriz é g é dada por $A = \pi Rg$.

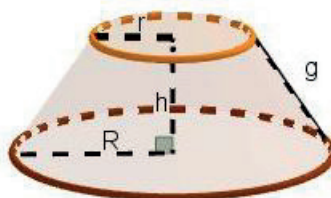


Área da superfície de um tronco de cone

A área A da superfície de um tronco de cone circular reto, com geratriz g e raios superior e inferior r e R , respectivamente, é dada por

$$A = \pi s g$$

onde $s = \frac{r+R}{2}$.



Área de superfície de revolução

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Denotaremos por $S_x(f)$ a superfície obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x (ver figura 2.6).

Então, a área de $S_x(f)$ é definida por

$$A_x := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exercício 2.59. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x , do gráfico de $f(x) = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Exercício 2.60. Determine a área da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y , do gráfico de $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.

1. Calcule a área da superfície de revolução do gráfico de $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $-R \leq x \leq R$, $R > 0$, em torno do eixo Ox .
2. Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$ ao redor do eixo Ox .
3. A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, é girada ao redor do eixo Ox para formar uma superfície chamada elipsoide. Calcule a área de sua superfície.
4. Calcule a área da superfície do "fuso" que forma ao girar uma semionda senoide $y = \sin(x)$ em torno do eixo Ox .
5. A astroide $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ gira em torno do eixo Ox . Determinar a área da superfície do sólido de revolução.
6. A curva $y = x^2$ gira em torno do eixo Ox . Calcule a área da superfície do sólido.

2.8 Comprimento de gráfico de função

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Denotaremos por $L(f)$ o comprimento do gráfico de f . Então

$$L(f) := \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exercício 2.61. Calcule o comprimento do gráfico de:

(a) $y = x^2 + 1, -1 \leq x \leq 1.$

(b) $y = \ln x, 1 \leq x \leq e.$

1. Calcule o comprimento do arco total da hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
2. Um falcão voando a 15 m/s a uma altitude de 180 metros acidentalmente derruba sua presa. A trajetória parabólica de sua presa caindo é descrita pela equação $y = 180 - \frac{x^2}{45}$ até que ela atinja o solo onde y é a altura acima do solo e x , a distância horizontal percorrida em metros. Calcule a distância percorrida pela presa do momento em que ela é derrubada até o momento em que ela atinge o solo.
3. Determine o comprimento da evolvente do círculo $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t + t \cos t)$.
4. Achar o comprimento do arco da espiral logarítmica $r = ae^{m\phi}$ ($m > 0$), que se encontra dentro do círculo $r = a$.
5. Achar o comprimento do arco $y = \arcsin e^{-x}$ desde $x = 0$ até $x = 1$.
6. Achar o comprimento da cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.
7. Calcule o comprimento da curva $y = \ln(1 - x^2)$, com $0 \leq x \leq 1/2$.

2.9 Área e comprimento de curva em coordenadas polares

1. Ache a equação polar do gráfico dado por sua equação cartesiana, dado abaixo.
 - (a) $x^2 + y^2 = a^2.$
 - (b) $x + y = 1.$
 - (c) $x^2 - y^2 = 16 .$
 - (d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0 .$
 - (e) $2xy = a^2.$
 - (f) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$
2. Esboce as curva baseadas em suas equações dadas em coordenadas polares.

- (a) $r = a \cos 2\theta$. (d) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.
 (b) $r = a \sin 3\theta$. (e) $r = a\theta$.
 (c) $r = 2a \cos 3\theta, r = a$. (f) $r = 2a \cos 3\theta$.
3. Calcular a área limitada pelas curvas dadas em coordenadas polares.
- (a) $r = 3 \cos \theta$. (g) $r = 2, r = 3 - 2 \cos \theta$.
 (b) $r = 2 - \sin \theta$. (h) $r = 4 \sin \theta, r = 4 \cos \theta$.
 (c) $r^2 = 4 \sin 2\theta$. (i) $r = 3 \sin 2\theta, r = 3 \cos 2\theta$.
 (d) $r^2 = \cos \theta$. (j) $r^2 = 4 \sin 2\theta, r = \sqrt{2}$.
 (e) $r = 4 \sin^2 \theta \cos \theta$. (k) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.
 (f) $r = 4 \cos 3\theta$.
4. Calcular a área da região limitada pela curva $r = 2a \cos 3\theta$ que está fora do círculo $r = a$.
5. Calcular a área compreendida entre a primeira e a segunda espira da espiral de Arquimedes $r = a\theta$.
6. Calcular o comprimento total das curvas dadas em coordenadas polares.
- (a) $r = \theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$. (e) $r = e^{-\theta}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 (b) $r = a(1 + \cos \theta)$. (f) $r = 2 \sin \theta$.
 (c) $r = a \sin 3\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (g) $r = a\theta$.
 (d) $r = \sec \theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. (h) $r = \cos^2 \theta$.

2.10 Centro de massa

- Mostre que o centro de massa de uma faixa reta e fina ou barra de densidade constante situa-se no meio do caminho entre o extremo e outro.
- A barra de 10 metros de comprimento (figura abaixo) fica mais espessa da esquerda para a direita, de modo que sua densidade, em vez de constante, é $\alpha(x) = 1 + \frac{x}{10}$ (kg/m). Determine o centro de massa da barra.

3. Determine o centro de massa do sistema constituído pelas massas m , $m/3$ localizadas nos pontos $(x, 2y)$ e $(2x, y)$, respectivamente.
4. Considere uma placa fina, homogênea, com densidade superficial constante $\alpha = 2,5g/cm^2$, que ocupa a região $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{b^2 - x^2}, \text{ onde } 0 < a < b\}$. Determine:
 - (a) o momento M_x da placa em torno do eixo x .
 - (b) a massa da placa.
 - (c) a ordenada do centro de massa da placa.
5. Encontre o centro de massa da região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.
6. Ache as coordenadas do centroide da figura limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
7. Achar o centro de gravidade do arco da semicircunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $(y \geq 0)$.
8. Encontre as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e pelos eixos Ox e Oy , com $y \geq 0$, $x \geq 0$.
9. Determine o centro de massa do gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$.
10. Determine o centro de massa de uma placa fina de densidade $\alpha(x) = \frac{2}{1+x}$ no ponto (x, y) , que cobre a região limitada superiormente pela parábola $y = x - x^2$ e inferiormente pelo eixo Ox .

Capítulo 3

Integrais impróprias

3.1 Introdução

Intervalos infinitos

1. Se $\int_a^t f(x)dx$ existe para cada $t \geq a$, então

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

2. Se $\int_t^b f(x)dx$ existe para cada $t \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

desde que o limite exista.

3. As *integrais impróprias* $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ são chamadas *convergentes* se os limites correspondentes existem e *divergentes*, se os limites não existem.

1. Se ambas $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ são convergentes, para algum $a \in \mathbb{R}$, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

Exercício 3.1. Determine se a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ é convergente ou divergente.

Exercício 3.2. Calcule as integrais:

1. $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Exercício 3.3. Para quais valores de $p \in \mathbb{R}$, a integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ é convergente?

Exercício 3.4. A velocidade média das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-Mv^2/2RT} dv$$

em que M é o peso molecular do gás; R , a constante do gás; T , a temperatura do gás; e v , a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Integrandos descontínuos

1. Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

desde que o limite exista.

2. Se $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

desde que o limite exista.

3. A integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ é chamada *convergente* se o limite correspondente existe e *divergente*, se o limite não existe.

Integrandos descontínuos

1. Se f é contínua em $[a, c)$ e $(c, b]$, e ambas $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Exercício 3.5. Calcule as integrais $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ e $\int_0^1 \ln x dx$.

Exercício 3.6. Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ e $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ converge ou diverge.

Exercício 3.7. Esboce o gráfico de $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ onde $f(t) = 1$ se $|t| \leq 1$ e $f(t) = 0$ se $|t| > 1$.

Teorema 1.1: Critério da comparação

Sejam f e g duas funções reais integráveis em $[a, t]$ para cada $t > a$. Suponha ainda que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$. Então:

(i) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ convergente.

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ divergente.

Exercício 3.8. Mostre que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2(x)dx$ é convergente.

Exercício 3.9. Prove que $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}dx$ é divergente.

Proposição 3.10. Seja f uma função integrável em $[a, t]$ para cada $t > a$. Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também é convergente.

Exercício 3.11. Verifique se $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}dx$ converge ou diverge.

Exercício 3.12. Em cada item, verifique se a integral imprópria é convergente ou divergente:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

(b) $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$.

1. Determine se cada integral é convergente ou não.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(3x+2)^2} & \text{(d)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx & \text{(g)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \\
 \text{(b)} \int_0^{+\infty} e^{-x/4} dx & \text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(h)} \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx \\
 \text{(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx & \text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx & \text{(i)} \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^6}} dx
 \end{array}$$

2. Determine se cada integral é convergente ou não.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} & \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx & \text{(e)} \int_0^2 x^2 \ln x dx \\
 \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(d)} \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - x - 6} & \text{(f)} \int_1^{+\infty} \frac{2 + e^{-x}}{x} dx
 \end{array}$$

3. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie-a para tais p .

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} & \text{(b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} & \text{(c)} \int_0^1 x^p \ln x dx
 \end{array}$$

4. Seja $s > 0$. Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t dt$.

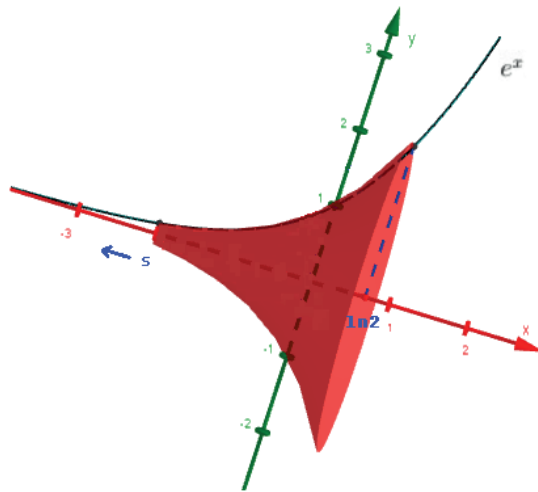
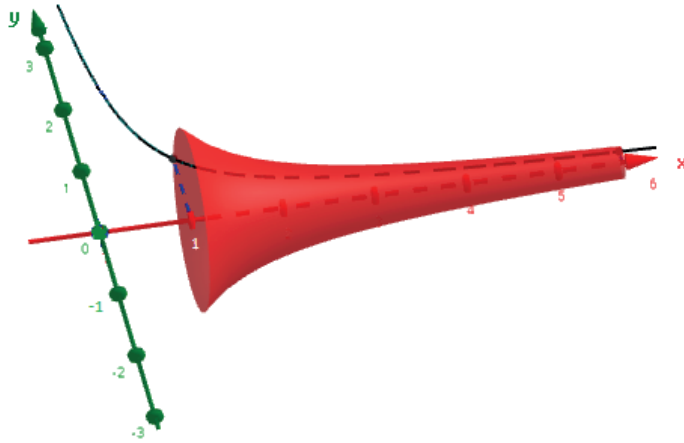
5. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Esboce o gráfico e calcule sua área com $-\infty \leq x \leq +\infty$.

6. Seja R a região à direita de $x = 1$ que é limitada pelo eixo x e pela curva $y = 1/x$. Quando essa região gira em torno do eixo x , ela gera um sólido cuja superfície é conhecida como corneta de Gabriel. Mostre que o sólido tem um volume finito, mas que sua superfície tem uma área infinita.

7. As secções transversais do sólido da figura abaixo, perpendiculares ao eixo x , são discos circulares com raios que vão do eixo x à curva $y = e^x$, onde $-\infty \leq x \leq \ln 2$. Encontre o volume do sólido.

8. Verifique que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$ é divergente.

9. É convergente ou divergente? Justifique.



(a) $\int_{10}^{+\infty} \frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}} dx.$

(e) $\int_0^{\pi/2} \tan x dx.$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3} dx.$

(f) $\int_0^1 \ln x dx.$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

(g) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} dx.$

(d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x + 1}} dx.$

(h) $\int_{-3}^1 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx.$

10. Seja R a região infinita no primeiro quadrante, entre a curva $y = e^{-x}$ e o eixo x .

(a) Calcule a área da região.

- (b) Calcule o centroide da região.
- (c) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo y .
- (d) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo x .
11. Esboce o gráfico de $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ nos casos:
- (a) $f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$ (b) $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

3.2 Transformada de Laplace

Seja f uma função definida em $[0, +\infty)$. A função g dada por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

denomina-se *transformada de Laplace* de f . O domínio de F é o conjunto de todos os s para os quais a integral imprópria do lado direito é convergente.

Começemos com um exemplo para ilustrar esta definição.

Exemplo 3.13. *Determine a transformada de Laplace de $f(t) = t$.*

Solução. Pela definição acima, temos:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^n e^{-st} t dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^n - \int_0^n \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{ne^{-nt}}{-s} + \frac{1}{s} \int_0^n e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{ne^{-nt}}{-s} + \frac{1}{s} \frac{e^{-st}}{(-s)} \Big|_0^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{ne^{-nt}}{-s} + \frac{1}{s} \left(\frac{e^{-sn}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \right] = \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace de $f(t) = t$ é a função

$$F(s) = \frac{1}{s^2},$$

para $s > 0$.

□

Seja f uma função definida em $[0, +\infty)$. Dizemos que f é de *ordem exponencial* γ , $\gamma \in \mathbb{R}$, se existir uma constante $M > 0$ tal que para todo $t \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}.$$

Vejamos um teorema que nos fornece condições para garantir que uma função f seja de ordem exponencial γ .

Teorema 2.1

Seja f definida em $[0, +\infty)$. Suponha que f seja limitada em $[0, \alpha]$ para todo $\alpha > 0$ e suponha que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{\gamma t}}$$

exista e seja finito. Então f é de ordem exponencial γ .

Portanto, pelo Teorema anterior, segue que as funções constantes, $\sin t$, $\cos t$, $e^{\alpha t}$, t^n , $e^{\alpha t} \cos t$ são de ordem exponencial.

O próximo teorema diz respeito às transformadas de Laplace de funções derivada.

Teorema 2.2

(a) Se f for de classe $\mathcal{C}^1$ em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial γ , então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > \gamma.$$

(b) Se f for de classe $\mathcal{C}^2$ em $[0, +\infty)$ e se f e f' forem de ordem exponencial γ , então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0), \quad s > \gamma.$$

Demonstração. (a) Para $s > \gamma$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f'(t)e^{-st} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} \Big|_0^n + \int_0^n se^{-st} f(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)e^{-sn} - f(0) + s \int_0^n e^{-st} f(t) dt \\
 &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}.
 \end{aligned}$$

(b) Basta aplicar o item anterior a $g(t) := f'(t)$.

□

A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar a aplicação dos resultados anteriores na resolução de EDOs.

Exemplo 3.14. *Determine a solução do problema:*

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = 1, & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Solução. Precisamos supor inicialmente que o problema tenha uma solução $x(t)$ que satisfaça as condições do item b) do Teorema 2.2.

Temos

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} - x\} = \mathcal{L}\{1\},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{1\}.$$

Pelo Teorema 2.2 (item(b)), temos

$$s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) - \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

o que implica em

$$(s^2 - 1)\mathcal{L}\{x(t)\} - 1 = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 (s^2 - 1)\mathcal{L}\{x(t)\} &= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^n e^{-st} dt \right] \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^n \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-sn}}{-s} + \frac{1}{s} \right] \\
 &= 1 + \frac{1}{s}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t)\} &= \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{s^2-1} \\
 &= \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s(s-1)}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando frações parciais, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s(s-1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} \\
 &= \frac{A(s-1) + Bs}{s(s-1)} = \frac{(A+B)s - A}{s(s-1)}.
 \end{aligned}$$

Disto, obtemos:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

o que implica

$$A = -1 \text{ e } B = 1.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}. \quad (3.2.2)$$

Pela tabela da transformada de Laplace, temos: $\mathcal{L}\{-1\} = \frac{-1}{s}$ e $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$.

Segue por linearidade que

$$x(t) = -1 + e^t \quad (3.2.3)$$

satisfaz (3.2.2), e é, portanto, a solução do sistema (3.2.1) para $t \geq 0$.

Observe agora que $x(t)$ satisfaz as condições do Teorema 2.2(b), conforme supusemos inicialmente.

□

Observação 3.15. *No Exemplo 3.2.2, na solução do problema de valor inicial (3.2.1), não consideramos a possibilidade de haver outras funções além da função dada em (3.2.3), que também possua a transformada de Laplace (3.2.2). De fato, pode-se mostrar que, se f é uma função contínua de ordem exponencial com transformada de Laplace F , então não existe outra tal função com que possua a mesma transformada. Este fato é conhecido como Teorema de Lerch.*

A seguir, deixaremos um exercício para os alunos resolverem em casa e para ser corrigido na próxima aula.

Exemplo 3.16. *Determine a solução da equação:*

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \cos t, & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Solução. Precisamos supor inicialmente que o problema tenha uma solução $x(t)$ que satisfaça as condições do item b) do Teorema 2.2.

Vamos então resolver a nossa equação usando transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros, temos:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + x\} = \mathcal{L}\{\cos t\},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\cos t\}.$$

Pelo Teorema 2.2 (parte (b)), temos:

$$s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0) + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\cos t\}.$$

Logo,

$$(1 + s^2)\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\cos t\}. \quad (3.2.5)$$

Por outro lado, aplicando integração por partes, temos

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{1 + s^2}.$$

Portanto, por (3.2.5), temos

$$(1 + s^2)\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{1 + s^2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{s}{(1 + s^2)^2}.$$

Pela tabela, vemos que a função que admite $\frac{s}{(1+s^2)^2}$ como transformada de Laplace é $\frac{1}{2}t \sin t$. Logo, pelo Teorema de Lerch, conseguimos que

$$x(t) = \frac{1}{2}t \sin t$$

é a solução da EDO de 2ª ordem (3.2.4).

Observe que, de fato, $x(t)$ satisfaz as condições do Teorema 2.2(b), conforme supusemos inicialmente. □

1. Em cada item, esboce o gráfico da função dada e calcule sua transformada de Laplace, caso exista.

$$(a) \ f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & t > 2 \end{cases} \quad (b) \ f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ t-1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

2. (**Funções degrau**) A função de Heaviside ou degrau unitário é definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

Mostre que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$, para $s > 0$.

3. Para cada uma das seguintes funções, determine sua transformada de Laplace (caso exista) e o domínio da transformada.

$$\begin{array}{lll} (a) \ f(t) = \ln t & (e) \ f(t) = \cos at & (i) \ f(t) = te^{-t} \\ (b) \ f(t) = t^{2015} & (f) \ f(t) = \sinh at & (j) \ f(t) = e^{at} \\ (c) \ f(t) = 1/t & (g) \ f(t) = \cosh bt & (k) \ f(t) = t^2 e^{at} \\ (d) \ f(t) = \sin at & (h) \ f(t) = e^{t^2} & (l) \ f(t) = e^{at} \cos bt \end{array}$$

4. A função Gama é definida por $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, para todo p real. Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$$

Conclua que $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/s^{3/2}$, $s > 0$ [Use $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$]

5. Esboce o gráfico da função definida por $h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, $t \geq 0$, e calcule sua transformada de Laplace.

6. Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que sua transformada de Laplace existe para $s > a \geq 0$. Dada uma constante c positiva, mostre que

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s > a$$

7. Em cada item, encontre a transformada de Laplace da função dada.

$$(a) \quad f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi/4 \\ \sin t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$$

8. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > 0$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad s > a$$

9. Em cada item, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

$$(a) \quad F(s) = \frac{3}{s^2+4}$$

$$(e) \quad F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5}$$

$$(i) \quad F(s) = \frac{1-2s}{s^2+4s+5}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{4}{(s-1)^3}$$

$$(f) \quad F(s) = \frac{2s-3}{s^2-4}$$

$$(j) \quad F(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+10}$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{2}{s^2+3s-4}$$

$$(g) \quad F(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2}$$

$$(k) \quad F(s) = \frac{1}{s^2-4s+5}$$

$$(d) \quad F(s) = \frac{3s}{s^2-s-6}$$

$$(h) \quad F(s) = \frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$$

$$(l) \quad F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

10. Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

$$(a) \quad \begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} y^{(4)} - 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2, y'''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y'' + y = \sin 2t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$(h) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \cos t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (j) \begin{cases} y'' + 2y' + y = 4e^{-t} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

11. Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

$$(a) \quad y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases} ; y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(b) \quad y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} ; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$(c) \quad y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} ; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

12. Uma partícula de massa m está suspensa do teto por uma mola de constante elástica k . A partícula é solta em repouso, com a mola relaxada. Calcule a posição da partícula em função do tempo. ($\frac{k}{m} = w^2$)

13. Suponha que $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes de ordem exponencial. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > a$, mostre que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

14. Suponha que $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Se $G(s)$ e $F(s)$ são as transformadas de Laplace de g e f , respectivamente, mostre que $G(s) = F(s)/s$.

15. Suponha que $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica de período T . Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

Capítulo 4

Sequências e Séries

4.1 Sequências

Convenções

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ é o conjunto dos números inteiros não negativos.
- Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.
- **Notação:** (a_n) , $(a_1, a_2, \dots)$, $(a_n)_{n \geq 1}$
- a_n indica o valor da sequência no natural n , e é chamado termo geral da sequência.

Exercício 4.1. *Determine os 5 primeiros termos da sequência cujo termo geral é*

$$a_n = 2 \cdot 3^n$$

Exercício 4.2. *Determine os 4 primeiros termos da sequência cujo termo geral é*

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$$

Progressão Geométrica

Exercício 4.3. *Considere a sequência de termo geral $s_n = \sum_{k=0}^n x^k$, onde $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Verifique que*

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Convergência

Definição 4.4. Consideremos uma sequência de termo geral a_n , e seja a um número real. Definimos

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \text{ natural tal que} \\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \end{cases}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \text{ natural tal que} \\ n > n_0 \Rightarrow a_n > \epsilon \end{cases}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = +\infty$.

Exercício 4.5. Calcule o limite (caso exista) da sequência de termo geral

$$a_n = \frac{3n - 1}{2n + 1}$$

Exercício 4.6. Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências reais tais que

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
2. existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n \leq b_n$$

Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

Exercício 4.7 (Desigualdade de Bernoulli). Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$ inteiro. Use o **Princípio de Indução Finita** para provar que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Convergência e funções contínuas

Exercício 4.8. Seja a um número real positivo. Mostre que:

- (i) se $0 < a < 1$ então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

- (ii) se $a > 1$ então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

Exercício 4.9. Calcule¹ o limite da sequência de termo geral

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n}$$

Exercício 4.10. Seja a_n o termo geral de uma sequência e suponha que f é uma função real que satisfaz

$$f(n) = a_n$$

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Exercício 4.11. Calcule o limite (caso exista) da sequência de termo geral

$$a_n = \frac{3n^2}{5n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercício 4.12. Seja a_n o termo geral de uma sequência que converge para a . Verifique que, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

Exercício 4.13. Calcule o limite (caso exista) da sequência de termo geral

$$y_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$$

Exercício 4.14. Prove que o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Exercício 4.15. Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$, onde $a > 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$, onde $a > 0$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n)}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$

1. Use a definição para calcular os limites a seguir.

¹Use a propriedade: se $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ então $\lim a_n b_n = ab$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+1} & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n, a > 0. & \text{(g)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{n} + \left(\frac{3}{5} \right)^n \right] \\
 \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+2}{2n^3+n-1} & \text{(h)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+5^n}{2+3^n} \\
 \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+3}{3n^3-2} & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + 2 \right] & \text{(i)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}
 \end{array}$$

Solução do item (g). Mostraremos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{n} + \left(\frac{3}{5} \right)^n \right] = 0$. Para tanto, seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

Para $a := 3/5$, inicialmente vamos provar por indução em n que $a^n \leq 1/n$ para todo $n \geq 2$. De fato, para $n = 1$ a desigualdade é trivialmente satisfeita. Dessa forma, vamos supor que $a^n \leq 1/n$ para algum $n \geq 2$ e provaremos que $a^{n+1} \leq 1/(n+1)$. Temos:

$$a^{n+1} - \frac{1}{n+1} = a \cdot a^n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{a}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(a-1)n+a}{n(n+1)} = -\frac{2n-3}{5n(n+1)} < 0$$

se $n \geq 2$. Logo, $a^{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Seja $n_0 > \max\{2, \epsilon/3\}$. Então

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{2}{n} + \left(\frac{3}{5} \right)^n \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n} \leq \frac{3}{n_0} < \epsilon.$$

□

2. (**propriedades básicas**) Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes e $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Mostre que:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab \\
 \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ se } b \neq 0
 \end{array}$$

3. Dada uma sequência (a_n) de números reais, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

4. Seja (a_n) uma sequência de números reais e suponha que a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(n) = a_n$ para todo n natural. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
5. Seja (a_n) uma sequência convergente de números reais positivos tal que $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para todo n . Encontre o limite dessa sequência.
6. Seja (a_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ que converge para a . Suponha que a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. Se $a_n \in D_f$ e $a_n \neq a$ para todo n natural, mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.
7. Dado o termo geral das sequências abaixo discuta sua convergência ou divergência:

(a) $a_n = n \sin(1/n)$	(i) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
(b) $a_n = \frac{n^2 - 1}{3n + 1}$	(j) $a_n = n^2 e^{-n}$
(c) $a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$	(k) $a_n = \int_2^n \frac{dx}{x^2 - x}$
(d) $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$	(l) $a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^p}$, para p real.
(e) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$	(m) $a_n = \sin \frac{1}{n}$
(f) $a_n = n[\ln(n+1) - \ln n]$	(n) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$
(g) $a_n = \arctan n$	(o) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
(h) $a_n = \frac{4^{n+1} + 3}{4^n}$	
8. Prove que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ é convergente e calcule seu limite.
9. Prove que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ é convergente e calcule seu limite.
10. Seja (a_n) uma sequência numérica convergente. Dada uma subsequência (a_{n_j}) , mostre que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$
11. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Solução. Para cada $n \geq 1$, seja

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A sequência (c_n) é crescente e converge para o número e (Guidorizzi, vol. 1). Também é possível verificar que

$$d_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

define uma sequência decrescente tal que $c_n < d_n$ para todo $n \geq 1$. Em particular, para todo $n \geq 1$,

$$c_n < e < d_n.$$

E ainda, temos

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = c_1 c_2 \cdots c_n < e^n < d_1 d_2 \cdots d_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!},$$

e portanto,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e < \frac{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Dessa desigualdade, obtemos

$$\frac{ne}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{(n+1)e}{n}.$$

A conclusão segue do Teorema do Confronto. □

12. Sejam (a_n) e (b_n) sequências numéricas e suponha que exista n_0 natural tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

13. Calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan \frac{1}{n} & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + n^2 \sin(1/n)}{1 - n^2 \sin(1/n)} \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n[1 - \cos(1/n)] & \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [n - n^2 \sin(1/n)] \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\sin \left(\frac{1+n^3}{n^2} \right) - \sin n \right] & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n[e^{\sin(1/n)} - 1] \end{array}$$

14. (**Produto de Wallis**) Mostre que:

- (a) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$ para todo $n \geq 2$ natural.
- (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx$ para todo n natural.
- (c) $\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx} \leq 1$ para todo n natural.
- (d) $\frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)(2n-3)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi}.$
- (e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{(1 \cdot 3)(3 \cdot 5) \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$

15. (**Teorema do Confronto**) Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências convergentes e suponha que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = s = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Dada uma seqüência numérica (c_n) para a qual existe n_0 natural tal que

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

mostre que (c_n) é convergente e que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = s.$$

16. Calcule $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k}.$

17. (**Teorema da seqüência monótona**) Toda seqüência monótona limitada é convergente.

4.2 Séries Numéricas

- Dada uma seqüência (a_n) construímos uma nova seqüência cujo termo geral é

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- Uma **série numérica** é uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- s_n é chamada n -ésima **soma parcial** da série.
- Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *convergente* se a sequência das somas parciais converge, e o valor desse limite é chamado **soma da série**. Caso contrário, a série é dita divergente.

Série Geométrica

Exercício 4.16. Considere a sequência de termo geral $s_n = \sum_{k=0}^n x^k$, onde $0 < x < 1$. Verifique que (s_n) converge e que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Mostre, ainda, que (s_n) é divergente se $|x| \geq 1$.

Exercício 4.17. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n}$ converge ou diverge. Se convergir, encontre sua soma.

Crítério do Termo Geral

Exercício 4.18. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Exercício 4.19. Verifique se as séries abaixo são convergentes:

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n} [1 - \cos(e^{-n})]$$

Crítério da Comparação

Exercício 4.20. Dadas duas sequências (a_n) e (b_n) , suponha exista n_0 natural tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

para todo $n \geq n_0$. Mostre que:

(i) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

(ii) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também diverge.

Exercício 4.21. Verifique se a série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \cdots$$

é convergente.

Exercício 4.22. Verifique se a série

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots$$

é convergente.

Exercício 4.23. Verifique que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

é divergente.

Exercício 4.24. Verifique se a série

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \cdots + \frac{\ln k}{k} + \cdots$$

é convergente.

Exercício 4.25 (Série telescópica). Verifique se a série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$$

é convergente. Em caso afirmativo, encontre sua soma.

Propriedades algébricas

1. **(Soma de séries)** Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem. Então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ também são convergentes e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. **(Produto por escalar)** Seja λ um número real não-nulo e suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ também converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Exercício 4.26. *Obtenha a soma da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^n} + \frac{2}{5^{n-1}} \right)$$

1. Escreva a fórmula mais simples do termo geral das seguintes séries, de acordo com os termos indicados:

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ (b) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$ (c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$ (d) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14}$	(e) $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$ (f) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots$
---	--

2. **(Teste da Divergência)** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

3. Determine se as séries são convergentes ou divergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$	(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^3 + 3n + 2}$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n}$	(k) $\frac{1-1+1-1+1-}{1+\dots}$	(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$	(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^n}$	(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - (-1)^n$	(m) $\frac{0,9}{0,009} + \frac{0,09}{0,009} + \dots$	(q) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$	(n) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1-n}$	

4. (**Propriedades elementares**) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ também convergem e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

5. (**Teste da Comparação**) Dadas duas seqüências (a_n) e (b_n) , suponha que exista n_0 natural tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$. Mostre que

- (a) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.
- (b) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também diverge.

6. Use o Teste da Comparação para verificar se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^{1/3}}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^2 + 1}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n} \right)$	(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$	(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin n + 5^n}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 3n + 1}$	(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{(5n+1)3^n} \quad (n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \quad (o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2n}$$

7. (**Série harmônica**) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Solução. Dado n natural, seja b_n o único número inteiro que satisfaz

$$2^{b_n-1} < n \leq 2^{b_n} \quad (4.2.1)$$

Em particular, segue do Critério da Comparação que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Por outro lado, da desigualdade (4.2.1) obtemos

$$\frac{1}{2^{b_n}} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{2^{b_n-1}},$$

e portanto, podemos escrever:

$$a_n = \frac{1}{2^0} + \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{b_n}} + \frac{1}{2^{b_n}+1} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

Observe que a j -ésima parcela na soma acima é igual a

$$\frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j-1}$$

Esta soma é composta por 2^{j-1} parcelas e cada uma delas é maior que $\frac{1}{2^j}$, e portanto,

$$\frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j-1} > 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j-1} > \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$a_n > \frac{1}{2^0} + \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{b_n-1}} + \frac{1}{2^{b_n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{b_n}-1} \right)$$

Nesta última desigualdade, o lado direito é composto por uma soma com b_n parcelas e, como vimos acima, cada parcela é maior que $1/2$, de onde segue-se que

$$a_n > \frac{b_n}{2}$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{2} = +\infty$, o Teste da Comparação implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

□

Solução (LEO GOLDMAKHER). Suponha que a série harmônica converge para H . Então

$$\begin{aligned} H &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + H \end{aligned}$$

Essa contradição prova que a série harmônica é divergente.

□

8. Em cada item, discuta a convergência da série.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$

9. Investigue a convergência das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

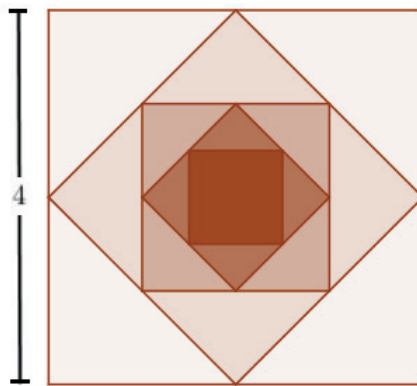
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

10. Uma bomba de ar comum está evacuando um recipiente de volume V . O cilindro da bomba, com o pistão em cima, tem volume v e a massa total de ar no recipiente no princípio é M . Na n -ésima bombeada, a massa de ar removida do recipiente é:

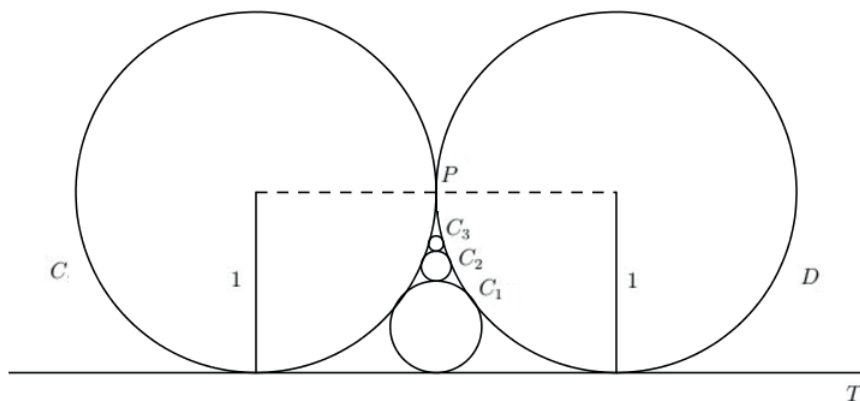
$$\frac{Mv}{V+v} \left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-1}$$

Supondo que a bomba opere “para sempre”, qual é a massa total de ar removida do recipiente?

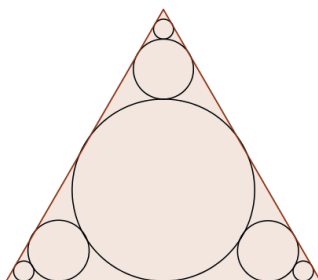
11. Uma bola é largada de uma altura de 4 metros. Cada vez que ela atinge o solo depois de ter caído de uma altura de h metros, é rebatida a uma altura de $0,75h$ metros. Calcule a distância vertical total que a bola percorre para cima e para baixo.
12. A figura a seguir mostra os primeiros cinco quadrados de uma sequência. O quadrado externo tem área 4 m^2 . Cada um dos outros quadrados é obtido ligando-se os pontos médios dos lados dos quadrados anteriores. Calcule a soma das áreas de todos os quadrados.



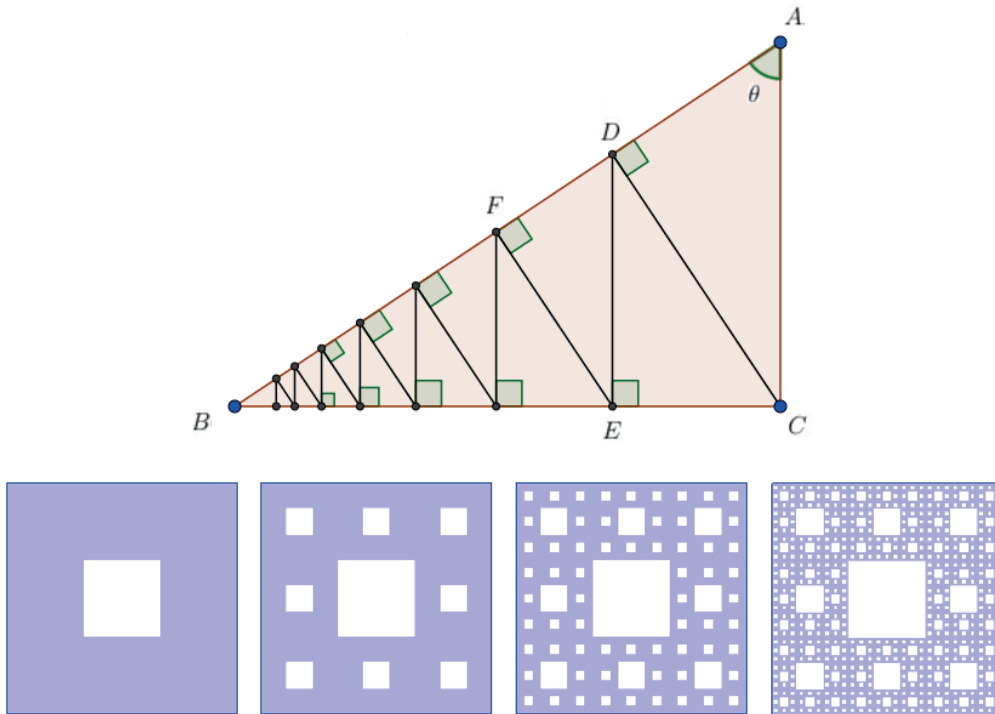
13. A figura abaixo exibe dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P . T é uma reta tangente comum; C_1 é o círculo que toca C , D e T ; C_2 é o círculo que toca C , D e C_1 ; C_3 é o círculo que toca C , D e C_2 . Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma sequência infinita de círculos C_n . Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n .



14. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.

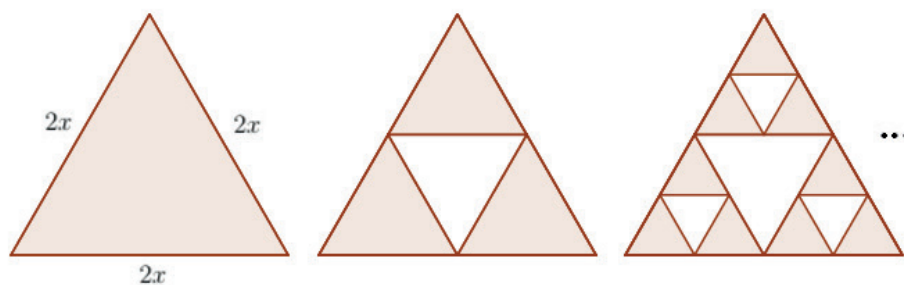


15. É dado um triângulo ABC com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB , DE é desenhado perpendicularmente a BC , $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o comprimento total de todas as perpendiculares.
16. O tapete de Sierpinski é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim sucessivamente. A figura abaixo apresenta quatro etapas da construção. Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso significa que o tapete de Sierpinski possuirá área 0.



17. São retirados triângulos equiláteros “de cabeça pra baixo” do triângulo equilátero original, de lado $2x$, como sugerido pelos desenhos. A soma das áreas dos triângulos removidos formam uma série infinita.

- Encontre essa série;
- Encontre a soma, e assim, a área total removida do triângulo original.



18. A trajetória de cada oscilação de um pêndulo, após a primeira, é 80% da trajetória da oscilação anterior de um lado até o outro. Se a trajetória da primeira oscilação mede 18 cm de comprimento e, se a resistência

do ar leva o pêndulo ao repouso, quanto mede o trajeto percorrido pelo pêndulo até que ele pare.

19. (**Teste da Integral**) Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua positiva e não-crescente. Defina $a_n = f(n)$ para todo n natural. Mostre que:

(a) Se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(b) Se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

20. Use o teste da integral para mostrar que a p -série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge se $p \leq 1$ e converge se $p > 1$.

21. Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$ (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$

22. Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1+n^2)^p$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n \ln n)^p}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ (f) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}$

23. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

24. (**Teste da Comparação para Limites**) Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências numéricas positivas tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, onde c é um número real

positivo. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente.

25. (**Teste de D'Alembert**) Seja (a_n) uma sequência numérica, e suponha que exista n_0 natural tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$. Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$. Mostre que:

- (a) se $c < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.
 (b) se $c > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, existe $n_1 = n_1(\epsilon) \geq n_0$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right| < \epsilon$$

para cada $n \geq n_1$. Neste caso,

$$c - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < c + \epsilon$$

e portanto,

$$(c - \epsilon)a_n < a_{n+1} < (c + \epsilon)a_n$$

sempre que $n \geq n_1$. A partir deste ponto suporemos que $0 < \epsilon < c$. Por indução em k segue-se que

$$(c - \epsilon)^k a_n < a_{n+k} < (c + \epsilon)^k a_n$$

para todo k natural e $n \geq n_1$. Em particular,

$$(c - \epsilon)^k a_{n_1} < a_{n_1+k} < (c + \epsilon)^k a_{n_1}$$

para todo k natural, e definindo-se $n = n_1 + k$ obtemos $k = n - n_1$ e

$$(c - \epsilon)^{n-n_1} a_{n_1} < a_n < (c + \epsilon)^{n-n_1} a_{n_1}$$

Substituindo-se $\alpha := \frac{a_{n_1}}{(c - \epsilon)^{n_1}}$ e $\beta := \frac{a_{n_1}}{(c + \epsilon)^{n_1}}$ na desigualdade acima, obtemos:

$$\alpha(c - \epsilon)^n < a_n < \beta(c + \epsilon)^n \quad (4.2.2)$$

para todo $n > n_1$.

Caso 1: Suponha que $0 < c < 1$ e escolha $\epsilon = \min\{c/2, (1-c)/2\}$. Pela desigualdade (4.2.2) temos

$$a_n < \beta(c + \epsilon)^n \leq \beta(c + (1-c)/2)^n \leq \beta\left(\frac{1+c}{2}\right)^n,$$

de onde segue-se que

$$0 < a_n < \beta\left(\frac{1+c}{2}\right)^n,$$

para todo $n > n_1$. Como

$$0 < \frac{1+c}{2} < 1,$$

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta\left(\frac{1+c}{2}\right)^n$ é uma série geométrica com razão

$\frac{1+c}{2}$, e portanto, convergente. Pelo Teste da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

também converge.

Caso 2: Suponha agora que $c > 1$ e escolha $\epsilon = \min\{c/2, (c-1)/2\}$. Pela desigualdade (4.2.2) temos

$$a_n > \alpha(c - \epsilon)^n \geq \alpha(c - (c-1)/2)^n \geq \alpha\left(\frac{1+c}{2}\right)^n,$$

de onde segue-se que

$$0 < \alpha\left(\frac{1+c}{2}\right)^n < a_n,$$

para todo $n > n_1$. Como

$$\frac{1+c}{2} > 1$$

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{1+c}{2}\right)^n$ é uma série geométrica com razão

$\frac{1+c}{2}$, e portanto, divergente. Pelo Teste da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

também diverge.



26. Seja (a_n) uma sequência numérica, e suponha que exista n_0 natural tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ é divergente.}$$

27. Seja (a_n) uma sequência numérica, e suponha que exista n_0 natural tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

28. Investigue a convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$	(g) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$	(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2}}$
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$	(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$	(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$
(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$	(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$	(o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$
(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$	(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$	(p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n}$
(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$	(q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$
(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$	(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$	(r) $\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n x^n$

29. Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências numéricas positivas e suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente. Sabendo que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

30. Investigue a convergência das seguintes séries:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\
 \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}} \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{5^n} &
 \end{array}$$

31. Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências numéricas positivas e suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente. Sabendo que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge.

32. Investigue a convergência das seguintes séries:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^4} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \\
 \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} &
 \end{array}$$

33. Mostre que nem o teste da razão nem o teste da raiz ajudam a investigar a convergência de séries do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

34. Discuta a convergência das séries:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n! n!}{(2n)!} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} & \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n} & \text{(m)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n} \\
 \text{(h)} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n & \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{n!} & \text{(n)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \\
 \text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} & \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{7^n (n+1)} & \text{(o)} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n}
 \end{array}$$

35. (**Teste de Leibniz**) Seja (a_n) uma sequência numérica não negativa. Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e que $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n natural. Mostre

que a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Solução. Seja s_n a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Como

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$$

e

$$a_{2n+1} \geq a_{2n+2},$$

para todo n natural, segue-se que $s_{2n+2} \geq s_{2n}$, isto é,

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots.$$

Logo, (s_{2n}) é uma sequência monótona (não-decrescente) cujos termos são não-negativos, já que $s_2 = a_1 - a_2 \geq 0$. Além disso, lembrando que $a_n - a_{n+1} \geq 0$ para todo n natural, concluímos que

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

e portanto, (s_{2n}) é limitada:

$$0 \leq s_{2n} \leq a_1$$

Pelo Teorema da Sequência Monótona, (s_{2n}) é convergente e assim, podemos escrever

$$s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n}$$

Por outro lado, como $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ para todo n natural, devemos ter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

E mais,

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n-1}$$

de onde concluímos que (s_{2n+1}) é uma sequência não-crescente e, para todo n natural,

$$s_{2n} \leq s_{2n-1}$$

Agora, definindo-se

$$\phi(n) = \begin{cases} n-2, & \text{se } n \text{ for par} \\ n-1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

segue que $\phi(n)$ é par e $\phi(n) < n$, para todo $n \geq 3$ natural. Em particular, para $n \geq 3$,

$$s_{\phi(n)} \leq s_n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{\phi(n)} = s$$

Analogamente considera-se a função

$$\psi(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \text{ for par} \\ n+2, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

de onde segue que $\psi(n)$ é ímpar e $\psi(n) > n$, para todo n natural. Em particular, para todo n ,

$$s_{\psi(n)} \geq s_n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{\psi(n)} = s$$

Em resumo, para todo $n \geq 3$ temos

$$s_{\phi(n)} < s_n < s_{\psi(n)}.$$

Pelo Teorema do Confronto, (s_n) é convergente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$. □

36. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ é convergente. Em caso afirmativo, decida se a convergência é absoluta ou condicional.

Solução. Primeiro observe que $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ é uma sequência decrescente no intervalo $[0, 1]$. Como a função tangente é crescente neste intervalo, devemos ter

$$\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) > \tan\left(\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right)$$

para todo n natural. Definindo-se $a_n = \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ concluímos que a sequência (a_n) é decrescente e, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ segue do Teste de Leibniz que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ é convergente.

A seguir mostraremos que a série dada é absolutamente convergente. Para tanto, considere a função definida por

$$\phi(x) = \tan x - 2x$$

Como

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \sec^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pi/4$$

e $\phi'(x) \leq 0$ para $x \in [0, \pi/4]$, segue-se que ϕ é decrescente em $[0, \pi/4]$, e portanto, $\phi(x) \leq \phi(0)$ para todo $x \in [0, \pi/4]$. Lembrando que $\phi(0) = 0$ obtemos:

$$\tan x \leq 2x$$

para todo $x \in [0, \pi/4]$. Por outro lado, para cada $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \in [0, \pi/4]$$

e portanto,

$$0 \leq \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \leq \frac{2}{n\sqrt{n}}$$

para $n \geq 2$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$ é convergente (é uma p -série com

$p = 3/2 > 1$), segue do Teste da Comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ é

convergente, e portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ é absolutamente convergente. $\square$

37. (**Sedan Filiph Gusmão Silva**) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seja divergente.

Pode-se dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge? Justifique.

Resposta: Não! Considere $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ para cada n natural. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é a série harmônica, e portanto divergente, e no entanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pelo Teste de Leibniz. □

38. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seja convergente. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

39. (**Teste de Cauchy**) Seja (a_n) uma sequência numérica tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe e é igual a L . Mostre que:

(a) se $L < 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(b) se $L > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

40. Seja (a_n) uma sequência numérica tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

41. Discuta a convergência das séries a seguir:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+3)}{n(n+2)}$	(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$	(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$	(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$	(h) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n\sqrt{n} - 1}$
(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$	(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$	(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (x+2)^n$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n} & \text{(o)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{n!} & \text{(t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \\
 \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} & \text{(p)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} & \text{(u)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{n+1}}{(2n+1)!} \\
 \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} & \text{(q)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n} & \text{(v)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}} \\
 \text{(m)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{\ln n} & \text{(r)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(4n)!}{(n!)^2} & \\
 \text{(n)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^3+4} & \text{(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{[\ln n+1]^n} &
 \end{array}$$

42. Seja (a_n) uma sequência numérica tal que $a_n \geq 0$ e $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n natural. Suponha ainda que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Se $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ e $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, mostre que

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

para todo n natural. O número $R_n = s - s_n$ é o resto da série.

43. Encontre a soma da série com precisão de quatro casas decimais.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n} \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} & \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}
 \end{array}$$

4.3 Séries de Potências

- Toda série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

é chamada *série de potências* em torno de a , onde x é uma variável e os a_n 's são os coeficientes da série.

- Convenção:** $(x - a)^0 = 1$.

- **Observação:** Toda série de potências em torno de a converge quando $x = a$.

Exercício 4.27. Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

Exercício 4.28. Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$ é convergente?

- Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos, onde a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

é convergente.

- Neste caso, a série define uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Função de Bessel de ordem 0

Exercício 4.29. Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Teorema 3.1: Raio de convergência

Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ existem apenas três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$.
2. A série converge para todo x real.
3. Existe $R > 0$ tal que a série converge quando $|x-a| < R$ e diverge quando $|x-a| > R$.

- O número R é chamado *raio de convergência* da série, e consideramos $R = 0$, no primeiro caso, e $R = \infty$, no segundo.
- O *intervalo de convergência* da série é o conjunto dos pontos onde a série converge.

Exercício 4.30. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} (x-1)^n$$

Exercício 4.31. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{4^n}$$

Sobre o raio de convergência

Exercício 4.32. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ e suponha que exista $p \geq 0$ inteiro tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq p$. Mostre que o raio de convergência desta série é dado por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Exercício 4.33. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$$

1. Determine o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n3^n} x^n \quad (d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} \quad (g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(x-4)^{2n}}{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)!(x-8)^n \quad (e) \sum_{n=0}^{+\infty} (n!)(x+2)^n \quad (h) \sum_{n=1}^{+\infty} n(x-7)^n$$

$$(c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n!} \quad (i) \sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n} & \text{(m)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n} & \text{(p)} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n!} \\
 \text{(k)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} & \text{(n)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}} & \text{(q)} \sum_{n=1}^{+\infty} n! x^{n!} \\
 \text{(l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}} & \text{(o)} \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{4^k \ln k} & \text{(r)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}
 \end{array}$$

2. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n.$$

3. Identifique a função cuja representação em séries de potências é

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

para $-1 \leq x \leq 1$.

4. Use a fórmula $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$, para escrever a expressão dada como série de potências:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{(d)} \ln(1+x) & \text{(g)} \frac{1}{3-x} \\
 \text{(b)} \frac{x^2}{2+3x} & \text{(e)} \frac{x+2}{3-x} & \text{(h)} \frac{2}{x^2-4x+3} \\
 \text{(c)} \frac{1}{1+x} & \text{(f)} \frac{1}{1+x^2} & \text{(i)} \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt
 \end{array}$$

5. Escreva uma série de potências para $f'(x)$ e encontre seu raio de convergência.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} & \text{(c)} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 \text{(b)} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n^3}}{n^3} & \text{(d)} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n
 \end{array}$$

6. (a) Mostre que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é uma solução da equação diferencial $y' = y$.

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

7. Mostre que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ é uma solução da equação diferencial $y'' + y = 0$.

8. Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

(a) $\int_0^{0,2} \frac{dx}{1+x^5}$

(c) $\int_0^{0,4} \ln(1+x^4)dx$

(b) $\int_0^{1/3} \frac{x^2}{\arctan(x^4)}dx$

(d) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^6}$

q

9. (a) Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

(b) Calcule $J'_0(x)$.

(c) Mostre que $x^2 J''_0(x) + x J'_0(x) + x^2 J_0(x) = 0$.

(d) Calcule $\int_0^1 J_0(x)dx$ com precisão de três casas decimais.

10. A função de Bessel de ordem 1 é definida por $J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}$.

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J''_1(x) + x J'_1(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0$$

(b) Verifique que $J'_0(x) = -J'_1(x)$.

11. A série $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ converge para $\sin x$ para todo x real.

(a) Encontre os seis primeiros termos de uma série para $\cos x$. Para quais valores de x a série deve convergir?

(b) Calcule $\sin 2$ com precisão de até três casas decimais.

12. Avalie a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio e o intervalo de convergência?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \frac{x - \arctan x}{x^3} dx & \text{(c)} \int \frac{\ln(1-t)}{t} dt \\ \text{(b)} \int \frac{t}{1-t^8} dt & \text{(d)} \int \arctan^2 x dx \end{array}$$

13. Encontre a expansão em série de potências (MacLaurin) das seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \cosh x & \text{(e)} f(x) = \cos x \\ \text{(b)} f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} & \text{(f)} f(x) = e^{x^2} \\ \text{(c)} f(x) = \sin x & \text{(g)} f(x) = \frac{\sin x}{x} \\ \text{(d)} f(x) = e^x & \end{array}$$

14. (a) Calcule $\int \frac{dx}{1+x^5}$ como uma série de potências.

(b) Use a parte (a) para aproximar $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$ com precisão de 10^{-10} .

15. Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^1 x \cos(x^3) dx \text{ (três casas decimais)} & \\ \text{(b)} \int_0^{0,2} [\arctan(x^3) + \sin(x^3)] dx \text{ (cinco casas decimais)} & \\ \text{(c)} \int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \text{ (|erro|} < 10^{-8}) & \\ \text{(d)} \int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx \text{ (|erro|} < 0,0001) & \end{array}$$

16. Use séries para avaliar o limite.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} \end{array}$$

17. (**Fórmula de Euler**) Seja $z = x + i\theta$ onde $i = \sqrt{-1}$. Mostre, usando série de Maclaurin, que

$$e^z = e^x (\cos \theta + i \sin \theta).$$

18. Em estatística a função $E(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ recebe o nome de Função Erro. Encontre a série de MacLaurin da função $E(x)$.
19. Use a série de potências para $\arctan x$ para provar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

20. (a) Completando o quadrado, mostre que $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- (b) Ao fatorar $1+x^3$ como uma soma de cubos, reescreva a integral do item (a). Depois expresse $1/(x^3+1)$ como uma série de potências e use-a para provar a seguinte fórmula para π :

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right).$$

21. Use a série binomial para expandir a função como uma série de potências. Estabeleça o intervalo de convergência.

(a) $\frac{1}{(1+x)^2}$	(c) $\sqrt{1+x}$	(e) $\sqrt[3]{(1-x)^2}$
		(f) $\sqrt[4]{1-8x}$
(b) $\frac{1}{\sqrt{4-x}}$	(d) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$	(g) $\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

22. (a) Use a série binomial para expandir $1/\sqrt{1-x^2}$.
- (b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin para $\arcsin x$.
23. (a) Use a série binomial para expandir $1/\sqrt{1+x^2}$.
- (b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin para $\sinh x$.
24. (a) Expanda $\sqrt[3]{1+x}$ em série de potências.
- (b) Use a parte (a) para estimar $\sqrt[3]{1,01}$ com precisão de quatro casas decimais.
25. (a) Expanda $f(x) = (x+x^2)/(1-x)^3$ como uma série de potências.
- (b) Use a parte (a) para encontrar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

26. (a) Dado α real não-nulo, considere a função $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
- (b) Mostre que $g'(x) = \alpha g(x)/(1+x)$ para $|x| < 1$.
- (c) Seja $h(x) = g(x)/(1+x)^\alpha$ e mostre que $h'(x) = 0$.
- (d) Conclua que $g(x) = h(x)$.

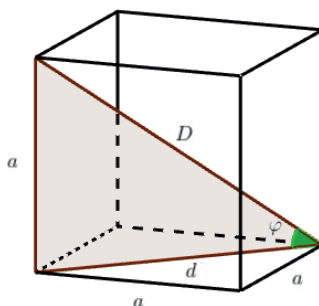
27. Na teoria da relatividade de Einstein a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é a diferença entre sua energia total e sua energia em repouso:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

- (a) Mostre que, quando v for muito pequeno comparado a c , essa expressão para K coincide com a física clássica de Newton $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
- (b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a diferença entre essas expressões para K quando $|v| \leq 100$ m/s.
28. (a) Aproxime a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.
- (b) Qual é a precisão dessa aproximação quando $7 \leq x \leq 9$.
29. (a) Qual é o máximo erro possível usando a aproximação $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ quando $-0,3 \leq x \leq 0,3$.
- (b) Use o item (a) para encontrar $\sin 12^\circ$ com precisão de seis casas decimais.
- (c) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?
30. Dado o cubo a seguir, de aresta a , encontre o ângulo φ formado entre a diagonal da face e a diagonal principal do cubo com uma precisão de 0,00005.



31. Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2 m/s^2 em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro percorre no próximo segundo. Seria razoável utilizar esse polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?
32. Use séries para calcular os limites:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \end{array}$$

4.4 Equações diferenciais e séries de potências

Exercício 4.34. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Mostre que,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

para $|x| < 1$.

Exercício 4.35. Expresse $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ como uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

Exercício 4.36. Encontre uma representação em série de potências para $x \mapsto \frac{1}{2+3x}$, e encontre o intervalo de convergência.

Exercício 4.37. Encontre uma representação em série de potências para $x \mapsto \frac{x^2}{3-5x}$, e encontre o intervalo de convergência.

Teorema 4.1: Derivação e Integração de séries de potências

Suponha que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tenha raio de convergência $R > 0$ e intervalo de convergência $I \supseteq (a-R, a+R)$. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

então f é diferenciável em $(a-R, a+R)$ e

$$(i) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

Exercício 4.38. A função de Bessel de ordem 0 é definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

Prove que J_0 é solução da equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0.$$

Exercício 4.39. Expresse $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ como uma série de potências em torno de $a = 0$. Qual é o raio de convergência?

Exercício 4.40. Expresse $x \mapsto \ln(1-x)$ como uma série de potências em torno de $a = 0$. Qual é o raio de convergência? Conclua que

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n2^n} + \cdots$$

Exercício 4.41. Encontre uma expressão em série de potências para

$$f(x) = \arctan x$$

em torno de $a = 0$. Qual é o raio de convergência? Conclua que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Exercício 4.42. Ache uma fórmula para calcular $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, para $|x| < 1$. Use esse resultado para determinar a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots$$

Exercício 4.43. Calcule $\int \frac{dx}{1+x^5}$ como uma série de potências e, determine $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$ com precisão de 10^{-6} .

Exercício 4.44. Suponha que a série de potências $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tenha raio de convergência R , onde $R > 0$ ou $R = \infty$. Mostre que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

para todo $n \geq 1$. Conclua que

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-a)^n$$

Exercício 4.45. Determine uma solução da equação diferencial

$$y'' + xy = 0$$

que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

1. Usando séries de potências, encontre a solução da equação $y'' + 2y'/x + y = 0$, com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Solução. Suponha que a solução seja da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com raio de convergência $R > 0$ ou $R = \infty$. Então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Também podemos escrever

$$y' = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

já que $a_1 = y'(0) = 0$, e

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$$

Substituindo na equação $y'' + 2y'/x + y = 0$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} + \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

ou melhor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Portanto, para todo $n \geq 0$,

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + 2(n+2) a_{n+2} + a_n = 0.$$

Logo, para cada $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+3)}.$$

Fazendo-se $n = 1$ na identidade acima, e lembrando que $a_1 = 0$, obtemos $a_3 = 0$. Por indução em n , concluímos que $a_{2n-1} = 0$ para todo n natural.

Por outro lado, também segue da identidade acima que

$$a_2 = \frac{-1}{2 \cdot 3} a_0 = \frac{-1}{2 \cdot 3},$$

já que $a_0 = y(0) = 1$. E ainda,

$$a_4 = \frac{-1}{4 \cdot 5} a_2 = \frac{-1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{-1}{2 \cdot 3}$$

Por indução em n , obtemos

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Com isso,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

Essa série de potências tem raio de convergência $R = \infty$, pelo Teste de D'Alembert. Note ainda que, para $x \neq 0$,

$$y = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\sin x}{x}$$

Portanto, a solução procurada é

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

□

2. Usando séries de potências, encontre as soluções das seguintes equações com as condições iniciais indicadas. Investigue a convergência das soluções encontradas.

- | | |
|---|--|
| <p>(a) $y'' - xy = 0$, $y(0) = a$ e $y'(0) = b$.</p> <p>(b) $y' = x + y$, $y(0) = 1$.</p> <p>(c) $y' = y + x^2$, $y(0) = -2$.</p> <p>(d) $y' = 2y + x - 1$, $y(1) = y_0$.</p> <p>(e) $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = 1/2$.</p> <p>(f) $(1-x)y' = 1+x-y$, $y(0) = 0$.</p> | <p>(g) $xy'' + y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.</p> <p>(h) $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.</p> <p>(i) $\frac{d^2 x}{dt^2} + x \cos t = 0$, $x(0) = a$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.</p> |
|---|--|

Referências:

1. Demidovitch, B., *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, 6ª Edição, Mir Moscou, 1987.

2. Ginzburg, A. *Calculus: problems and solutions*, 1^a Edição, Dover, 2011.
3. Guidorizzi, H.L. *Um curso de Cálculo*, Volume 1, 5^a Edição, Rio de Janeiro: LTC, 2011.
4. Guidorizzi, H.L. *Um curso de Cálculo*, volume 4, 5^a Edição, Rio de Janeiro: LTC, 2011.
5. Klymchuk, S. *Counterexamples in Calculus*, 1^a Edition, MAA, 2010.
6. Maron, I.A., *Problems in Calculus of One Variable*, 1^a Edition, Mir Moscou, 1973.
7. Piskunov, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, Tomo I, 3^a Edição, Mir Moscou, 1977.
8. Spivak, M., *Cálculo Infinitesimal*, 2^a Edição, Editora Reverté, 1996.
9. Stewart, J. *Cálculo*, 7^a Edição, Cengage, 2013.
10. Software: GeoGebra, <https://www.geogebra.org>, 2017.

